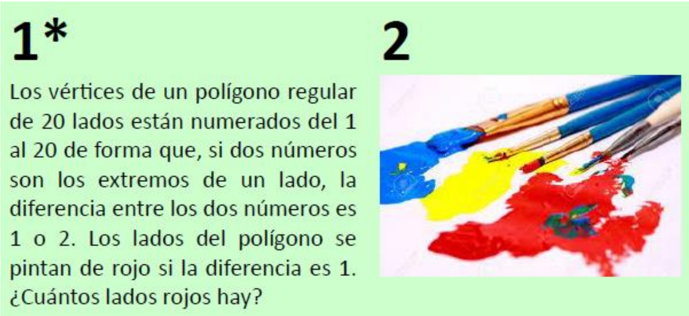
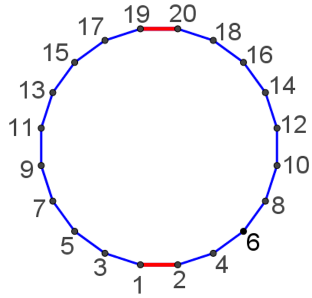
SOLUCIONES · NOVIEMBRE 2024





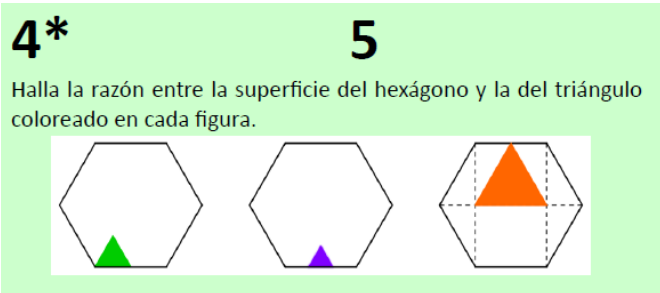
SOLUCIÓN:

Si empezamos colocando el 1 en uno de los vértices, los dos que están junto a él, forzosamente estarán numerados con el 2 y el 3.

Si ahora buscamos qué número va junto al 2, la única opción que nos queda es el 4, ya que los otros posibles son el 1 y el 3 que ya están puestos.

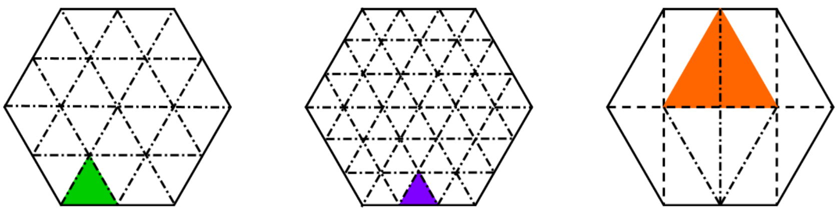
Siguiendo este procedimiento llegamos a la distribución que hay en la imagen adjunta.

Sólo habrá 2 lados rojos.



SOLUCIÓN:

Para poder hacerlo, trocearemos cada hexágono en triángulos iguales al coloreado, obteniendo:



En el caso del verde, obtenemos 24 triángulos, la razón pedida es: $r_{verde} = \frac{1}{24}$.

Para el azul, obtenemos 54 triángulos, la razón será: $r_{azul} = \frac{1}{54}$.

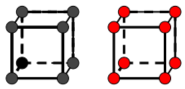
En el caso del naranja, partiéndolo en dos por su altura obtenemos 12 triángulos rectángulos iguales. La razón será: $r_{naranja} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

6** **7**

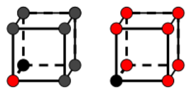
Tenemos palillos de brochetas y gominolas de dos colores, rojas y negras, para montar un cubo.
¿Cuántos cubos distintos podré montar? (Atendiendo al color y posición de las gominolas empleadas).

SOLUCIÓN:

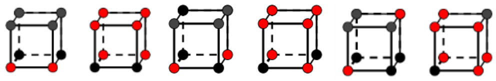
Con todas las gominolas del mismo color tenemos dos opciones:



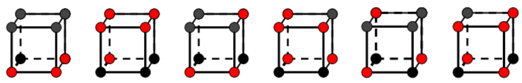
Con siete de un color y una del otro, otras dos opciones:



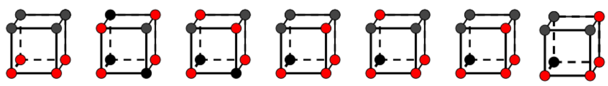
Con seis de un color y dos del otro, hay seis en total:



Con cinco de un color y tres del otro, otras seis opciones:



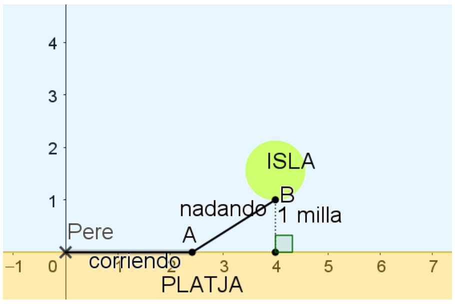
Con cuatro de cada color, un total de siete:



El número total de cubos distintos es 2+2+6+6+7=23 cubos.

8 ggb **9**

Pere corre a 6 millas por hora y nada a 3 millas por hora. Se encuentra en la orilla (recta) de la playa, 4 millas al oeste de una isla que está a 1 milla al norte de la costa. ¿Dónde debe empezar a nadar para minimizar el tiempo para llegar a la isla?



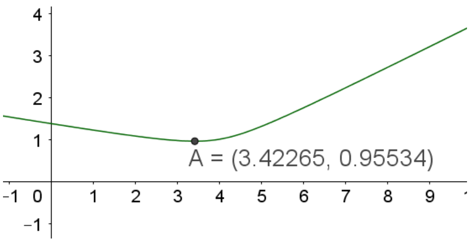
SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Llamaremos x a la longitud que recorre corriendo. Nadando recorrerá la distancia correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos $4 - x$ y 1 .

Como sabemos las velocidades a las que corre y nada, para calcular el tiempo empleado usaremos la fórmula $t = \frac{e}{v}$.

El tiempo total en función de dónde esté el punto en que empieza a nadar (x), viene dado por la función $f(x) = \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{(4-x)^2+1^2}}{3} = \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{17-8x+x^2}}{3}$

Para saber dónde se encuentra el mínimo, introducimos la función en la barra de entrada de geogebra:



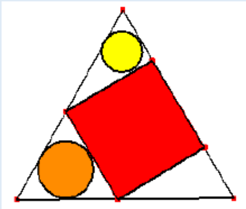
Para introducirla, hay que tener en cuenta: las raíces cuadradas se introducen con sqrt : $\sqrt{a} = sqrt(a)$.

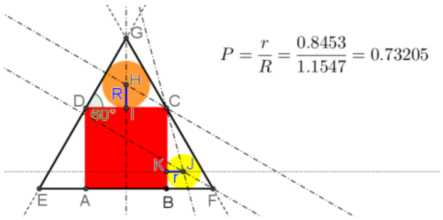
Para la multiplicación usamos el asterisco.

Con extremos relativos obtenemos el mínimo en el punto A. La abscisa de este nos da la distancia x que buscábamos: x=3.42265 millas.

11 ggb **12**

En un triángulo equilátero se ha inscrito un cuadrado.
Calcula la proporción entre los radios de las dos circunferencias inscritas en los dos triángulos exteriores al cuadrado.





SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Pasos a seguir:

1. Con polígono regular dibujamos un cuadrado.
2. Sobre uno de los vértices superiores con ángulo de amplitud dada, marcamos un ángulo de 60° y trazamos la recta que pasa por el vértice formando un ángulo de 60°.
3. Trazamos la mediatriz de la base del cuadrado.
4. En la intersección de la recta situada en la base del cuadrado y la trazada en el punto anterior tenemos uno de los vértices del triángulo. Otro será el resultado de intersecar la recta del punto 2 con la mediatriz de la base. Con estos dos puntos y seleccionando polígono regular, trazamos el triángulo.
5. Para dibujar los dos círculos, necesitamos dos bisectrices en cada uno de los triángulos. El punto de corte de estas (H y J) será el centro de cada uno de los círculos.
6. El punto I, intersección de la mediatriz de la base del cuadrado con la base superior del mismo pertenece a la circunferencia naranja. Ya podemos trazarla al tener el centro y un punto de esta.
7. Para la amarilla, tenemos el centro, pero falta un punto. Para obtenerlo, trazamos la paralela a la base del triángulo que pase por el centro (J). El punto K obtenido de la intersección de esta recta con el cuadrado es el que necesitábamos para poder dibujarla.
8. Trazamos los segmentos correspondientes a cada uno de los radios para obtener su longitud.
9. Al dividir $\frac{r}{R}$ obtenemos que la proporción pedida es

$$P = \frac{r}{R} = \frac{0.8453}{1.1547} = 0.73205$$

13*** **14**

Hay 15 chicos y n chicas en la clase. El número total de notas puestas durante 6 meses es $n^2 + 13n - 2$, y todos los alumnos tienen la misma cantidad de notas.
a) ¿Puede haber 16 chicas en la clase?
b) ¿Cuántas chicas hay en la clase?
c) Cuántas notas ha recibido cada alumno durante el semestre?

SOLUCIÓN:

a) Si $n = 16$, el número total de notas es $16^2 + 13 \cdot 16 - 2 = 462$, que no es divisible por $15 + 16 = 31$ alumnos, y por tanto no todos tendrían el mismo número de notas.

No puede haber 16 chicas.

b) El número total de notas $n^2 + 13n - 2$ ha de ser divisible por el total de alumnos $n + 15$.
Manipulando la expresión:

$$n^2 + 13n - 2 = n^2 + 15n - 2n - 2 = n(n+15) - 2n - 2 =$$
$$= n(n+15) - 2n - 30 + 28 = n(n+15) - 2(n+15) + 28 \Leftrightarrow$$

28 ha de ser divisible por $n + 15, n > 0 \Longrightarrow n + 15 \geq 15$. El único divisor de 28 que no es inferior a 15 es el mismo 28

$n + 15 = 28 \Longrightarrow n = \mathbf{13}$ **chicas**

c) Como n=13, el número total de notes es
$n^2 + 13n - 2 = 13^2 + 13 \cdot 13 - 2 = 336$

El número total de alumnos es $15 + 13 = 28$

El número de notas de cada alumno es $\frac{336}{28} = 12$

15** **16**

En la familia Martínez el 30% de los varones adultos es igual al 60% de las mujeres adultas, y el 15% de ellas es igual al 20% de los niños. ¿Qué porcentaje del total representan los niños?

SOLUCIÓN:

Llamaremos M al número total de mujeres, H al de hombres y N al de niños. Con los datos del problema tenemos:

$30\%H=60\%M \quad \rightarrow \quad H=2M$

$15\%M=20\%N \quad \rightarrow \quad 3M=4N \quad \rightarrow \quad M=\frac{4}{3}N \quad \rightarrow \quad H=2M=\frac{8}{3}N$

$N+M+H=N+\frac{4}{3}N+\frac{8}{3}N=\frac{15}{3}N=5N$

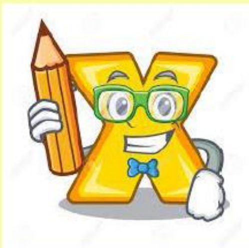
La fracción del total que representan los niños será

$$\frac{N}{N+M+H}=\frac{N}{5N}=\frac{1}{5}=0.20$$

Lo que corresponde a un 20%.

18 ** **19**

Se eligen al azar tres números enteros (no necesariamente distintos) del conjunto {1, 2, ..., 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los tres enteros sea par?



SOLUCIÓN:

En total podemos elegir $10^3=1000$ ternas de números enteros.

El producto será par siempre que haya al menos uno de los tres números que sea par, e impar cuando los tres números sean impares. Por lo tanto:

El producto será impar en 5^3 de los casos. (Sólo podemos elegir las cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9).

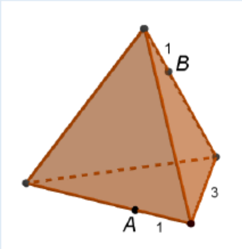
En el resto de los casos $(10^3 - 5^3 = 100 - 125 = 875)$ el producto será par.

La probabilidad pedida resulta ser:

$$P(\text{producto sea par})=\frac{875}{1000}=\frac{7}{8}.$$

20 ggb 21

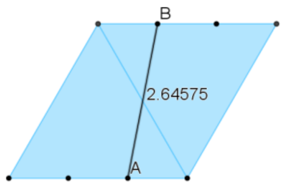
En un tetraedro regular de arista 3 cm, colocamos dos puntos A y B en dos aristas opuestas a 1 cm de distancia del vértice más próximo.
Calcula la distancia mínima que tiene que recorrer una hormiga para ir de A a B caminando sobre la superficie del tetraedro.



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Si recortamos las dos caras del tetraedro que tiene que recorrer la hormiga y las extendemos sobre un plano, es fácil ver que el recorrido de la hormiga sigue el segmento que une los puntos A y B.

Dibujamos los dos triángulos equiláteros de lado 3, marcamos los puntos A y B a distancia 1 cm de los vértices correspondientes y trazamos el segmento que los une. Obtenemos que tiene una longitud de 2.64575 cm.



SOLUCIÓN ANALÍTICA:

Al trazar una perpendicular a la base de la figura por el punto B obtenemos un triángulo rectángulo de vértices A, B y F (punto de intersección de la perpendicular con la base).

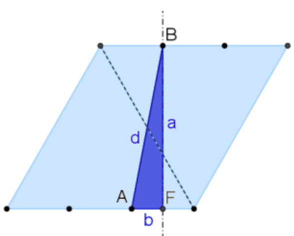
La distancia que buscamos es la hipotenusa de este.

Conocemos la longitud de la base b=0.5 cm.

La altura es la de un triángulo equilátero de lado 3 cm, es decir:

$$a = \sqrt{3^2 - 1.5^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Calculamos la distancia buscada: $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{7} \cong 2.64575\ cm$



22*

César no vive junto a Juan, Adrián no vive junto a Víctor y Víctor no vive junto a César. Si los cuatro viven en la misma calle en casas distintas, ubicadas una junto a otra, ¿quién vive en las casas centrales?

23

SOLUCIÓN:

La información que nos da el problema es la siguiente:

César/ Juan	¿?	Juan/César

Adrián/Víctor	¿?	Víctor/Adrián

César/ Víctor	¿?	Víctor/César

Ahora debemos encajar a los cuatro amigos en cuatro casas contiguas cumpliendo estas condiciones.

Víctor no vive junto a César ni Adrián, con lo que debe vivir en un extremo junto a Juan.

Como Juan no vive junto a César, y si junto a Víctor, al otro lado estará Adrián.

César vivirá en el otro extremo.

La disposición es una de estas dos:

César	Adrián	Juan	Víctor

Víctor	Juan	Adrián	César

Con lo que Adrián y Juan son los nombres que buscamos.

25*** **26**

Tenemos tres números de dos cifras: ab, cd, ef que forman una progresión aritmética. Estudia en qué casos los números resultantes de invertir las cifras (ba, dc, fe) también forman una progresión aritmética. ¿Qué relación hay entre las diferencias de las dos progresiones?

SOLUCIÓN:

Analizaremos los casos posibles dividiéndolos en tres grupos: la cifra de las decenas coincide, la cifra de las unidades coincide y el resto de casos.

1. Coinciden las decenas
   Para que los tres números formen una progresión aritmética, es necesario que las tres cifras de las unidades también estén en progresión aritmética (da igual que la diferencia sea positiva que negativa).
   Por ejemplo:
   a) 31, 35, 39 la diferencia será $d=4=10\cdot0+4$
      13, 53, 93 la diferencia será $d=40=10\cdot4+0$
   b) 27, 26, 25 la diferencia será $d=-1=10\cdot0+(-1)$
      72, 62, 52 la diferencia será $d=-10=10\cdot(-1)+0$
2. Coinciden las unidades
   Igual que en el caso anterior, las cifras que no coinciden, en este caso las de las decenas, deben estar en progresión aritmética. También es indiferente el que la diferencia sea positiva o negativa.
   Ejemplos:
   a) 32, 52, 72 la diferencia será $d=20=10\cdot2+0$
      23, 25, 27 la diferencia será $d=2=10\cdot0+2$
   b) 91, 61, 31 la diferencia será $d=-30=10\cdot(-3)+0$
      19, 16, 13 la diferencia será $d=-3=10\cdot0+(-3)$

3. Las cifras de unidades y las de las decenas son distintas
   Separamos los cuatro casos posibles según sean positivas o negativas las diferencias de unidades y de decenas:
   3.1. Las dos diferencias son positivas
   Ejemplo: 12, 25, 38 la diferencia será $d=13=10\cdot1+3$
   21, 52, 83 la diferencia será $d=31=10\cdot3+1$
   3.2. Las dos diferencias son negativas
   Ejemplo: 98, 86, 74 la diferencia será $d=-12=10\cdot(-1)+(-2)$
   89, 68, 47 la diferencia será $d=-21=10\cdot(-2)+(-1)$
   3.3. La de las unidades es positiva y la de las decenas negativa
   Ejemplo: 83, 54, 25 la diferencia será $d=-29=10\cdot(-3)+1$

38, 45, 52 la diferencia será d=7=10·1+(−3)

3.4. La de las unidades es negativa y la de las decenas positiva

Ejemplo: 18, 35, 52 la diferencia será d=17=10·20+(−3)

81, 53, 25 la diferencia será d=−28=10·(−3)+2

Generalizamos:

Si las cifras de las decenas forman una progresión aritmética de diferencia *d* y las cifras de las unidades forman una progresión aritmética de diferencia *u*, los números iniciales formarán una progresión aritmética de diferencia *10d+u* y los resultantes de invertir el orden de las cifras, una progresión aritmética de diferencia *10u+d*.

27* **28**

Anna tiene una caja de bombones. Se come uno y después regala a Lluís la mitad de los que quedan. Luego se come otro y da la mitad de los que quedan a Olga. Se come otro y quedan 4. ¿Cuántos tenía?

SOLUCIÓN:

Vamos a deshacer los pasos que ha seguido Anna:

	tenía	quedan
Se come uno	5	4
Da la mitad a Olga	10	5
Se come otro	11	10
Regala la mitad a Lluís	22	11
Se come uno	23	22
Caja completa		23

SOLUCIÓN CON ÁLGEBRA:

Llamamos b al número de bombones que tiene la caja.

Caja completa	b
Se come uno	$b-1$
Regala la mitad a Lluís	$(b-1)/2$
Se come otro	$(b-1)/2 - 1 = (b-3)/2$
Da la mitad a Olga	$(b-3)/4$

Se come uno	$(b-3)/_4 - 1 = (b-7)/_4$
Quedan cuatro	$(b-7)/_4 = 4 \quad \rightarrow \quad b-7=16 \quad \rightarrow \quad b=23$

29** **30**

Sustituye cada asterisco con un signo de suma o resta (según tu criterio) en la expresión 3*4*5*6*12*13*14*15.

a) El resultado del cálculo, ¿podría ser el número 9?

b) ¿Cuál es el menor número natural que podría resultar del cálculo?

c) Si en lugar de cada asterisco, pones un signo de multiplicación o división (según tu criterio) y calculas el resultado, ¿cuál es el número natural más pequeño que puedes obtener?

a)De la propiedad: ***"la paridad de una suma de números enteros coincide con la paridad de la cantidad de números impares"***. Aquí tenemos 4 nombres impares {3, 5, 13, 15}, lo cual implica que el resultado siempre será par i, por tanto, **no puede ser 9.**

b)El par más pequeño es 2. Intentemos construirlo:

$2 = 3 - 4 + 5 - 6 - 12 - 13 + 14 + 15$

Es el 2.

c) Para obtener un número natural, el exponente de los factores primos en el numerador ha de ser mayor o igual que en el denominador. Tenemos los siguientes factores:

$$3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3\ ,13\ ,2 \cdot 7, 3 \cdot 5$$

Tenemos seis factores 2, cuatro factores 3, dos factores 5, un factor 7 i un 13 . Los distribuimos adecuadamente en el numerador i en el denominador para obtener el natural más pequeño:

$\frac{3 \cdot 2^2 \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7)(3 \cdot 5)}{5(2 \cdot 3)(2^2 \cdot 3)} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{5 \cdot 6 \cdot 12} = 13 \cdot 7 = 91$

Por tanto, la expresión quedaría: $3 \cdot 4 \div 5 \div 6 \div 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = 91$

El resultado más pequeño será **91.**