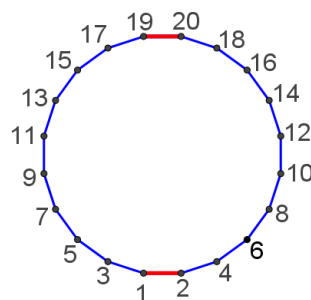


SOLUCIONS · NOVEMBRE 2024

1*

Els vèrtexs d'un polígon regular de 20 costats estan numerats de l'1 al 20 de manera que, si dos números són els extrems d'un costat, la diferència entre els dos números és 1 o 2. Els costats del polígon es pinten de roig si la diferència és 1. Quants costats rojos hi ha?

2



SOLUCIÓ:

Si comencem col·locant l'1 en un dels vèrtexs, els dos vèrtexs contigus, forçosament, estaran numerats amb el 2 i el 3.

Si ara busquem quin número va a la vora del 2, l'única opció que ens queda és el 4, ja que els altres possibles són l'1 i el 3, que ja estan posats.

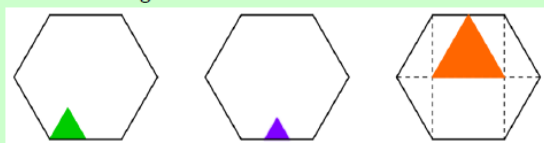
Seguint aquest procediment arribem a la distribució que hi ha a la imatge adjunta.

Només hi haurà 2 costats rojos.

4*

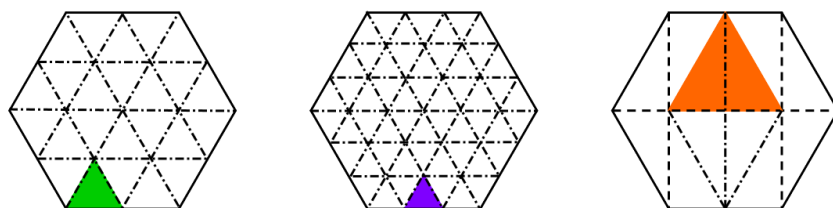
5

Calcula la raó entre la superfície de l'hexàgon i la del triangle acolorit en cada figura.



SOLUCIÓ:

Per poder fer-ho, trossejarem cada hexàgon en triangles iguals a l'acolorit, i obtenim:



En el cas del verd, obtenim 24 triangles, i la raó demanada és: $r_{verd} = \frac{1}{24}$.

Per al blau, obtenim 54 triangles, i la raó serà: $r_{blau} = \frac{1}{54}$.

En el cas del taronja, partint-lo en dos per l'altura obtenim 12 triangles rectangles iguals. La raó serà: $r_{\text{taronja}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

6**

7

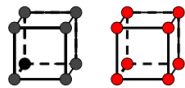
Tenim palets de broquetes i gominols de dos colors, roges i negres, per muntar un cub.

Quants cubs diferents podré muntar? (Atenent el color i la posició de les gominols emprades).

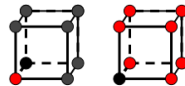


SOLUCIÓN:

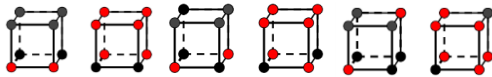
Amb totes les gominols del mateix color tenim dues opcions:



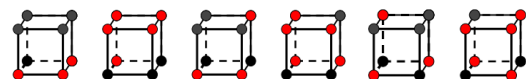
Amb set d'un color i una de l'altre, dues opcions més:



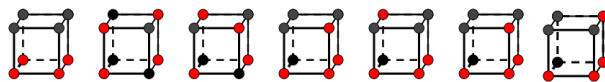
Amb sis d'un color i dos de l'altre, n'hi ha sis en total:



Amb cinc d'un color i tres de l'altre, sis opcions més:



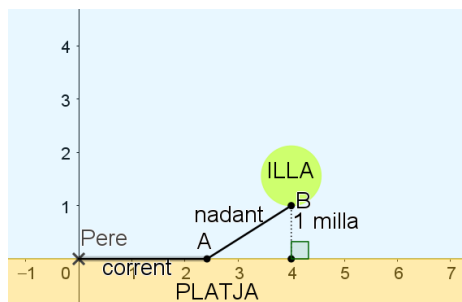
Amb quatre de cada color, un total de set:



La quantitat total de cubs diferents és $2+2+6+6+7=23$ cubs.

8 ggb

Pere corre a 6 milles per hora i nada a 3 milles per hora. Es troba a la riba (recta) de la platja, 4 milles a l'oest d'una illa que és a 1 milla al nord de la costa. On ha de començar a nadar per minimitzar el temps per arribar a l'illa?

9

SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

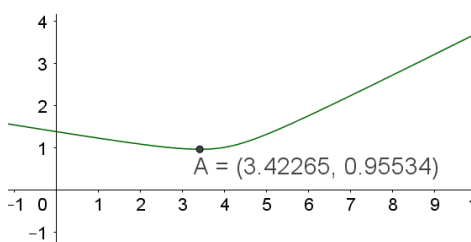
Anomenarem x a la longitud que recorre corrent. Nadant recorrerà la distància corresponent a la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets $4 - x$ i 1 .

Com sabem les velocitats a què corre i nada, per calcular el temps emprat farem servir la fórmula $t = \frac{e}{v}$.

El temps total en funció d'on estiga el punt en què comença a nadar (x) ve donat per

$$\text{la funció } f(x) = \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{(4-x)^2 + 1^2}}{3} = \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{17-8x+x^2}}{3}$$

Per saber on es troba el mínim, introduïm la funció en la barra d'entrada de geogebra:



Per introduir-la, cal tenir en compte que les arrels quadrades s'introdueixen amb sqrt: $\sqrt{a} = \text{sqrt}(a)$.

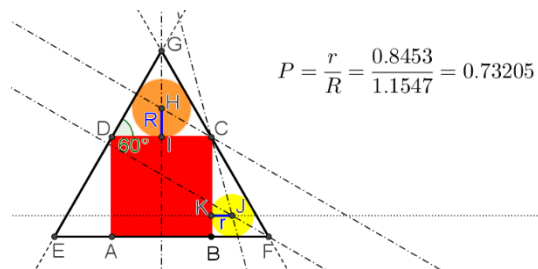
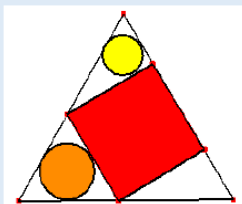
Per a la multiplicació fem servir l'asterisc.

Amb extrems relatius obtenim el mínim en el punt A. L'abscissa d'aquest ens dona la distància x que buscàvem: $x=3.42265$ milles.

11 ggb**12**

En un triangle equilàter s'ha inscrit un quadrat.

Calcula la proporció entre els radis de les dues circumferències inscrites als dos triangles exteriors al quadrat.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Passos a seguir:

1. Amb polígon regular dibuixem un quadrat.
2. Sobre un dels vèrtexs superiors amb angle d'amplitud donada, marquem un angle de 60° i tracem la recta que passa pel vèrtex formant un angle de 60° .
3. Tracem la mediatriu de la base del quadrat.
4. En la intersecció de la recta situada en la base del quadrat i la traçada en el punt 2 tenim un dels vèrtexs del triangle. Un altre serà el resultat d'intersecar la recta del punt 2 amb la mediatriu de la base. Amb aquests dos punts i seleccionant polígon regular, tracem el triangle.
5. Per dibuixar els dos cercles, necessitem dues bisectrius a cadascun dels triangles. El punt de tall d'aquestes (H i J) serà el centre de cadascun dels cercles.
6. El punt I, intersecció de la mediatriu de la base del quadrat amb la base superior, pertany a la circumferència taronja. Ja podem traçar-la per tenir el centre i un punt d'aquesta.
7. Per a la groga, tenim el centre, però ens falta un punt. Per obtenir-lo, tracem la paral·lela a la base del triangle que passa pel centre (J). El punt K obtingut de la intersecció d'aquesta recta amb el quadrat és el que necessitem per poder dibuixar-la.
8. Tracem els segments corresponents a cadascun dels radis per obtenir la longitud.
9. En dividir $\frac{r}{R}$ obtenim que la proporció demanada és:

$$P = \frac{r}{R} = \frac{0.8453}{1.1547} = 0.73205$$

13*****14**

Hi ha 15 xics i n xiques a la classe. El nombre total de notes posades durant 6 mesos és $n^2 + 13n - 2$, i tot l'alumnat té la mateixa quantitat de notes.

- a) Hi pot haver 16 xiques a classe?
- b) Quantes xiques hi ha a la classe?
- c) Quantes notes ha rebut cada alumne durant el semestre?

**SOLUCIÓ:**

a) Si $n = 16$, la quantitat total de notes és $16^2 + 13 \cdot 16 - 2 = 462$, que no és divisible per $15 + 16 = 31$ alumnes i, per tant, no tots tindrien la mateixa quantitat de notes.

No pot haver-hi 16 xiques.

b) La quantitat total de notes $n^2 + 13n - 2$ ha de ser divisible pel total de l'alumnat $n + 15$.

Manipulant l'expressió:

$$\begin{aligned} n^2 + 13n - 2 &= n^2 + 15n - 2n - 2 = n(n + 15) - 2n - 2 = \\ &= n(n + 15) - 2n - 30 + 28 = n(n + 15) - 2(n + 15) + 28 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Com 28 ha de ser divisible per $n + 15$, i $n > 0 \Rightarrow n + 15 \geq 15$, l'únic divisor de 28 que no és inferior a 15 és el mateix 28.

$$n + 15 = 28 \Rightarrow n = \mathbf{13 \text{ xiques}}$$

c) Com $n=13$, la quantitat total de notes és

$$n^2 + 13n - 2 = 13^2 + 13 \cdot 13 - 2 = 336$$

El número total d'alumnes és $15 + 13 = 28$

El número de notes de cada alumne és $\frac{336}{28} = \mathbf{12 \text{ notes}}$

15**

A la família Martínez el 30% dels homes adults és igual al 60% de les dones adultes, i el 15% d'elles és igual al 20% dels xiquets. Quin percentatge del total representen els xiquets?

16**SOLUCIÓ:**

Anomenarem M al nombre total de dones, H el d'homes i N el de xiquets. Amb les dades del problema tenim:

$$30\%H = 60\%M \rightarrow H = 2M$$

$$15\%M = 20\%N \rightarrow 3M = 4N \rightarrow M = \frac{4}{3}N \rightarrow H = 2M = \frac{8}{3}N$$

$$N + M + H = N + \frac{4}{3}N + \frac{8}{3}N = \frac{15}{3}N = 5N$$

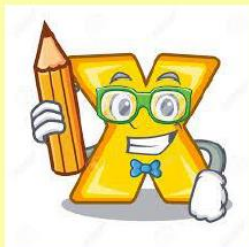
La fracció del total que representen els xiquets serà:

$$\frac{N}{N+M+H} = \frac{N}{5N} = \frac{1}{5} = 0.20,$$

la qual cosa correspon a un 20%.

18 **

Es trien a l'atzar tres nombres enters (no necessàriament diferents) del conjunt $\{1, 2, \dots, 10\}$. Quina és la probabilitat que el producte dels tres enters siga parell?

19**SOLUCIÓ:**

En total podem triar $10^3 = 1000$ ternes de nombres enters.

El producte serà parell sempre que hi haja almenys un dels tres números que siga parell, i imparell quan els tres números siguin imparells. Per tant:

El producte serà imparell en 5^3 dels casos (només podem triar les xifres senars 1, 3, 5, 7 i 9).

En la resta dels casos ($10^3 - 5^3 = 1000 - 125 = 875$) el producte serà parell.

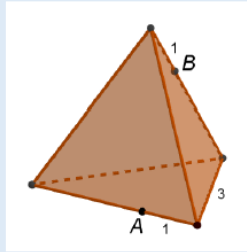
La probabilitat demanada resulta ser:

$$P(\text{producte siga parell}) = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}.$$

20 ggb**21**

En un tetraedre regular d'aresta 3 cm, col·loquem dos punts A i B en dues arestes oposades, a 1 cm de distància del vèrtex més proper.

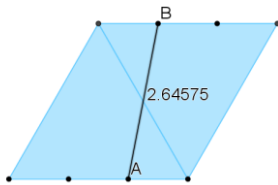
Calculeu la distància mínima que ha de recórrer una formiga per anar d'A a B caminant sobre la superfície del tetraedre.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Si retallem les dues cares del tetraedre que ha de recórrer la formiga i les estenem sobre un pla, és fàcil veure que el recorregut de la formiga segueix el segment que uneix els punts A i B.

Dibuixem els dos triangles equilàters de costat 3, marquem els punts A i B a distància 1 cm dels vèrtexs corresponents i tracem el segment que els uneix. Obtenim que té una longitud de 2.64575 cm.



SOLUCIÓ ANALÍTICA:

En traçar una perpendicular a la base de la figura pel punt B obtenim un triangle rectangle de vèrtexs A, B i F (punt d'intersecció de la perpendicular amb la base).

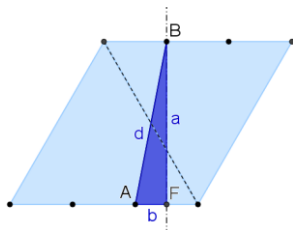
La distància que busquem és la hipotenusa d'aquest triangle.

Coneixem la longitud de la base $b=0.5$ cm.

L'altura és la d'un triangle equilàter de costat 3 cm, és a dir:

$$a = \sqrt{3^2 - 1.5^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Calculem la distància que buscàvem: $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{7} \cong 2.64575$ cm



22*

César no viu a la vora de Joan, Adrián no viu a la vora de Víctor i Víctor no viu a la vora de César. Si tots quatre viuen al mateix carrer en cases diferents, ubicades una al costat de l'altra, qui viu a les cases centrals?

23**SOLUCIÓ:**

La informació que ens dona el problema és la següent:

César/ Joan	¿?	Joan/César
-------------	----	------------

Adrián/Víctor	¿?	Víctor/Adrián
---------------	----	---------------

César/ Víctor	¿?	Víctor/César
---------------	----	--------------

Ara hem d'encaixar els quatre amics en quatre cases contigües complint aquestes condicions.

Víctor no viu a la vora de César ni d'Adrián, de manera que ha de viure en un extrem, a la vora de Joan.

Com Joan no viu a la vora de Cèsar, i sí a la vora de Víctor, a l'altra banda hi estarà Adrià.

Cèsar viurà a l'altre extrem.

La disposició és una d'aquestes dues:

César	Adrián	Joan	Víctor
-------	--------	------	--------

Víctor	Joan	Adrián	César
--------	------	--------	-------

Amb la qual cosa Adrián i Joan són els noms que busquem.

25*****26**

Tenim tres números de dues xifres: ab , cd , ef , que formen una progressió aritmètica. Estudia en quins casos els números resultants d'invertir les xifres (ba , dc , fe) també formen una progressió aritmètica. Quina relació hi ha entre les diferències de les dues progressions?

**SOLUCIÓ:**

Analitzarem els casos possibles dividint-los en tres grups: la xifra de les desenes coincideix, la xifra de les unitats coincideix i la resta de casos.

1. Coincideixen les desenes

Perquè els tres números formen una progressió aritmètica, cal que les tres xifres de les unitats també estiguen en progressió aritmètica (és igual que la diferència siga positiva que negativa).

Per exemple:

a) 31, 35, 39 la diferència serà $d=4=10 \cdot 0+4$

13, 53, 93 la diferència serà $d=40=10 \cdot 4+0$

b) 27, 26, 25 la diferència serà $d=-1=10 \cdot 0+(-1)$

72, 62, 52 la diferència serà $d=-10=10 \cdot (-1)+0$

2. Coincideixen les unitats

Com en el cas anterior, les xifres que no coincideixen (en aquest cas les de les desenes) han d'estar en progressió aritmètica. També és indiferent que la diferència siga positiva o negativa.

Exemples:

a) 32, 52, 72 la diferència serà $d=20=10 \cdot 2+0$

23, 25, 27 la diferència serà $d=2=10 \cdot 0+2$

b) 91, 61, 31 la diferència serà $d=-30=10 \cdot (-3)+0$

19, 16, 13 la diferència serà $d=-3=10 \cdot 0+(-3)$

3. Les xifres de les unitats i les de les desenes són diferents

Separem els quatre casos possibles segons que sigue positives o negatives les diferències d'unitats i de desenes:

3.1. Les dues diferències són positives

Exemple: 12, 25, 38 la diferència serà $d=13=10 \cdot 1+3$

21, 52, 83 la diferència serà $d=31=10 \cdot 3+1$

3.2. Les dues diferències són negatives

Exemple: 98, 86, 74 la diferència serà $d=-12=10 \cdot (-1) + (-2)$

89, 68, 47 la diferència serà $d=-21=10 \cdot (-2) + (-1)$

- 3.3. La de les unitats és positiva i la de les desenes negativa
 Exemple: 83, 54, 25 la diferència serà $d = -29 = 10 \cdot (-3) + 1$
 38, 45, 52 la diferència serà $d = 7 = 10 \cdot 1 + (-3)$
- 3.4. La de les unitats és negativa i la de les desenes positiva
 Exemple: 18, 35, 52 la diferència serà $d = 17 = 10 \cdot 20 + (-3)$
 81, 53, 25 la diferència serà $d = -28 = 10 \cdot (-3) + 2$

Generalitzem:

Si les xifres de les desenes formen una progressió aritmètica de diferència d i les xifres de les unitats formen una progressió aritmètica de diferència u , els números inicials formaran una progressió aritmètica de diferència $10d+u$ i els resultants d'invertir l'ordre de les xifres, una progressió aritmètica de diferència $10u+d$.

27*

28

Anna té una caixa de bombons. Se'n menja un i després regala a Lluís la meitat dels que queden. Després se'n menja un altre i en dona la meitat dels que queden a Olga. Se'n menja un altre i en queden 4. Quants en tenia?



SOLUCIÓ:

Desfarem els passos que ha seguit Anna:

	tenia	queden
Se'n menja un	5	4
Dona la meitat a Olga	10	5
Se'n menja un altre	11	10
Regala la meitat a Lluís	22	11
Se'n menja un	23	22
Caixa completa		23

SOLUCIÓ AMB ÀLGEBRA:

Anomenarem b a la quantitat de bombons que té la caixa.

Caixa completa	b
Se'n menja un	$b - 1$
Regala la meitat a Lluís	$(b - 1)/2$
Se'n menja un altre	$(b - 1)/2 - 1 = (b - 3)/2$
Dona la meitat a Olga	$(b - 3)/4$

Se'n menja un	$(b-3)/4 - 1 = (b-7)/4$
Queden quatre	$(b-7)/4 = 4 \rightarrow b-7 = 16 \rightarrow b = 23$

29**

30

Substitueix cada asterisc amb un signe de suma o resta (segons el teu criteri) en l'expressió $3*4*5*6*12*13*14*15$.

- a) El resultat del càlcul, podria ser el número 9?
b) Quin és el menor nombre natural que podria resultar del càlcul?
c) Si en lloc de cada asterisc poses un signe de multiplicació o de divisió (segons el teu criteri) i calcules el resultat, quin és el nombre natural més menut que pots obtenir?

a) De la propietat: *"la paritat d'una suma de nombres enters coincideix amb la paritat de la quantitat de nombres imparells"*. Ací tenim 4 noms imparells {3, 5, 13, 15}, la qual cosa implica que el resultat sempre serà parell i, per tant, **no pot ser 9**.

b) El parell més menut és 2. Intentem construir-lo:

$$2 = 3 - 4 + 5 - 6 - 12 - 13 + 14 + 15$$

És el 2.

c) Per obtenir un nombre natural, l'exponent dels factors primers en el numerador ha de ser més gran o igual que en el denominador. Tenim els factors següents:

$$3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 13, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5$$

Tenim sis factors 2, quatre factors 3, dos factors 5, un factor 7 i un 13. Els distribuïm adequadament en el numerador i en el denominador per obtenir el natural més menut possible:

$$\frac{3 \cdot 2^2 \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) (3 \cdot 5)}{5(2 \cdot 3)(2^2 \cdot 3)} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{5 \cdot 6 \cdot 12} = 13 \cdot 7 = 91$$

Por tant, l'expressió quedaria: $3 \cdot 4 \div 5 \div 6 \div 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = 91$

El resultat més menut serà **91**.