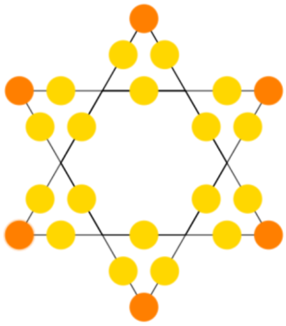
SOLUCIONES · DICIEMBRE 2024

2* **3**

Coloca 24 monedas en seis filas de forma que en cada fila haya 5 monedas.



SOLUCIÓN:

Si pusiéramos las monedas en filas separadas, para seis filas con cinco monedas cada una necesitaríamos 6·5=30 monedas, pero sólo tenemos 24. Eso quiere decir que 6 monedas deben estar en más de una fila.

Una forma de conseguirlo es colocar las monedas formando una estrella de seis puntas. Las monedas colocadas en las puntas estarán a la vez en dos filas. En el dibujo adjunto serían las oscuras. El resto se coloca de tres en tres en cada uno de los lados teniendo cuidado de que no estén en el cruce de dos líneas.

4*** **5**

Halla la solución entera y positiva de la ecuación $4\,x^5 + 3\,x^2 + 9x = 400390$.

SOLUCIÓN:

La descomposición del número $400390 = 4 \cdot 10^5 + 3 \cdot\ 10^2 + 9 \cdot 10$

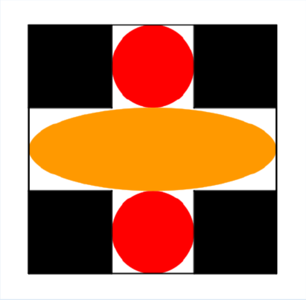
Por tanto, la ecuación podremos escribirla:

$$4\,x^5 + 3\,x^2 + 9x = 400390 \rightarrow 4\,x^5 + 3\,x^2 + 9x = 4 \cdot 10^5 + 3 \cdot\ 10^2 + 9 \cdot 10$$

Por tanto, x=10

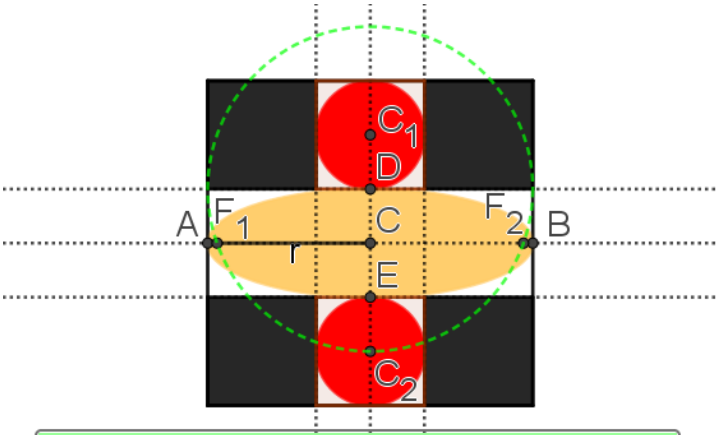
6 ggb 7

Un cuadrado se ha dividido en 9 cuadrados iguales y se han dibujado dos círculos y una elipse tangente a los círculos y al cuadrado, como se ve en la figura.
Calcula la proporción entre el área de un círculo y el área de la elipse.



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

1. Para hacer el dibujo empezamos por todos los cuadrados.
2. Necesitamos los centros de los tres cuadrados de la columna central.
3. Los centros C_1 y C_2, junto con los puntos medios de los lados E y D, nos sirven para trazar los dos círculos. Hallamos su área.
4. Para trazar la elipse necesitamos los dos focos y un punto de esta. Para el punto, sirven tanto el D como el E, ya que son los puntos de tangencia de la elipse con los círculos.
5. Para hallar los focos, basta trazar la circunferencia con centro en D y radio r (distancia entre A y C). Esta circunferencia corta al eje mayor de la elipse en los focos. Una vez trazada, hallamos su área.
6. Dividimos y obtenemos 1/3.

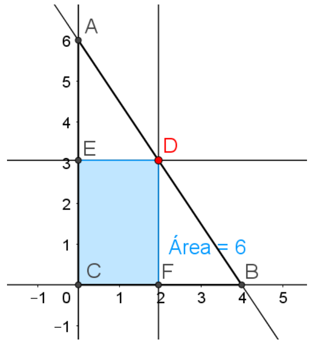


$$\frac{\text{Área círculo}}{\text{Área elipse}} = \frac{12.56637}{37.69911} = 0.33333$$

9 ggb 10

Halla el área del rectángulo más grande que quepa en un triángulo de lados $x = 0$, $y = 0$ y $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.

SOLUCIÓN CON GEOGEBRA 1:



1. Introducimos en la barra de entrada las tres rectas que determinan el triángulo.
2. Con punto en objeto marcamos el punto D sobre la hipotenusa del triángulo.
3. Trazamos las perpendiculares a los ejes por D, y con ellas hallamos los vértices del rectángulo
4. Al mover el punto D, se observa que el mayor valor del área obtenido es 6 u^2.

SOLUCIÓN CON GEOGEBRA 2:

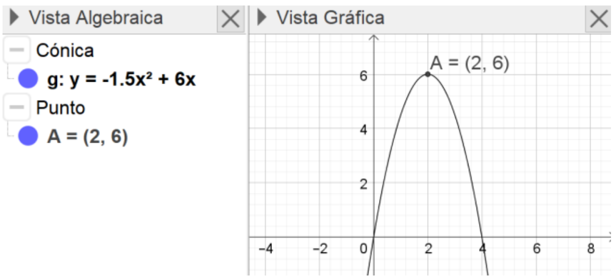
El vértice D del rectángulo tiene coordenadas (x,y), pero como sabemos que está sobre la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, podemos poner y en función de x despejando:

$$\frac{y}{6} = 1 - \frac{x}{4} = \frac{4-x}{4} \quad \rightarrow \quad y = \frac{12-3x}{2}$$

El área del rectángulo viene dada por la función $f(x, y) = x \cdot y$ donde (x,y) son las coordenadas de D, o si pasamos a una variable:

$$f(x) = x \cdot \frac{12-3x}{2} = \frac{12x - 3x^2}{2}$$

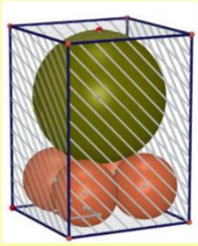
Buscamos el máximo de esta función. Para hallarlo, introducimos la función en la barra de entrada de geogebra y con extremos relativos hallamos el máximo.

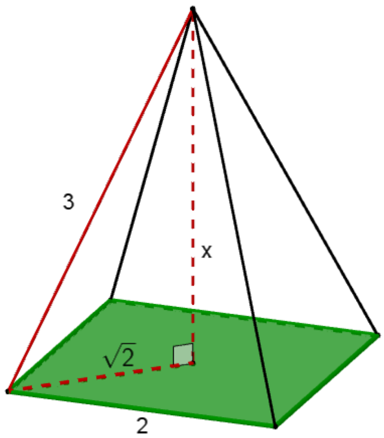


Obtenemos que el máximo de la función área se alcanza para x=2 y que el valor del área es 6 u^2 .

11** 12

La figura está formada por un prisma regular cuadrangular que contiene cinco esferas. Todas las esferas son tangentes entre sí y tangentes a las caras del prisma.
Sabiendo que la arista de la base mide 4 cm, calcula la altura del prisma.





SOLUCIÓN:

El radio de las esferas inferiores es 1 cm.

El radio de la esfera superior es 2 cm.

Los centros de las cinco esferas forman una pirámide regular cuadrangular de arista de la base 2 cm y aristas laterales 3 cm.

Sea x la altura de esta pirámide.

La distancia del centro de la base que forman los centros de las cuatro esferas inferiores y uno de los centros es $\sqrt{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$3^2 = x^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 9 = x^2 + 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{7}$$

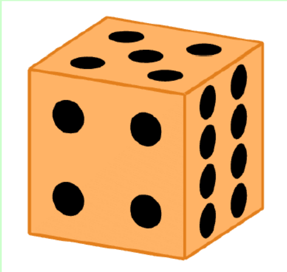
La altura de la pirámide es $\sqrt{7}$ cm.

La altura del prisma será la suma del radio de una esfera pequeña, la altura de la pirámide y el radio de la esfera grande, es decir:

$$Altura\ del\ prisma = 1 + \sqrt{7} + 2 = 3 + \sqrt{7}\ \text{ cm}$$

13* 14

En cada cara del dado hay un número natural menor que 10. Todos los números son diferentes, y siempre que sumamos los números de dos caras opuestas obtenemos el mismo resultado.
¿Cuál es el número opuesto al 5?



SOLUCIÓN:

Haremos una tabla con los resultados posibles obtenidos al sumar las cifras de las dos caras (la que ya tenemos y la que pondríamos en la cara opuesta):

	1	2	3	6	7	9
4	5	6	7	10	11	13
5	6	7	8	11	12	14
8	9	10	11	14	15	17

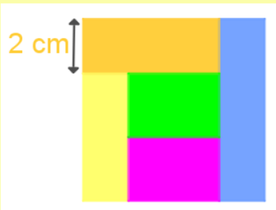
Las cifras que faltan en las tres caras ocultas no pueden ser las que ya vemos (4, 5 y 8), porque dice que las seis cifras son distintas.

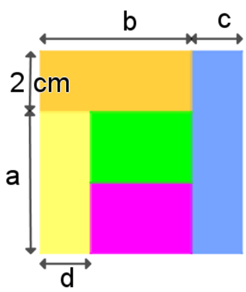
Como sabemos que la suma del número de una cara y el de su opuesta siempre da el mismo resultado, la única opción posible sería que la suma fuera 11. Los demás resultados no se pueden obtener en alguno de los tres casos.

La cifra opuesta al 5 será el 6.

16** 17

El cuadrado de la imagen está dividido en cinco rectángulos, todos ellos de la misma superficie. La altura del naranja es de 2 cm.
Calcula el área del cuadrado.
Nota: el dibujo no está a escala.





SOLUCIÓN:

$$S_{naranja} = 2b = S_{amarilla} = ad = S_{azul} = c(a+2) = S_{verde} = S_{rosa} = \frac{a}{2}(b-d)$$

De $ad = \frac{a}{2}(b-d) \;\rightarrow\; 2ad = ab - ad \;\rightarrow\; 3ad = ab \;\rightarrow\; 3d = b$

De $2b = ad \;\rightarrow\; 2 \cdot 3d = ad \;\rightarrow\; 6 = a$

El lado del cuadrado mide $2 + a = 8\ cm \;\rightarrow\; A = 64\ cm^2$

18* **19**

Con 600 kg de carne tenemos suficiente para alimentar a 150 hombres durante 15 días. ¿Cuánta carne necesitaremos para alimentar 180 hombres durante 18 días?

SOLUCIÓN:

Si tenemos carne para 150 hombres durante 15 días, quiere decir que tenemos 150·15=2250 raciones (Una ración sería lo que come un hombre en un día).

Para saber cuánto pesa una ración dividimos los 600 kg entre el número de raciones (2250) y obtenemos que una ración pesa $\frac{600}{2250} = \frac{4}{15}\ \ kg$

Para alimentar a 180 hombres durante 18 días, necesitaremos 180·18=3240 raciones.

Multiplicamos para calcular el peso:

Peso necesario de carne= peso de una ración · números de raciones=

$= \frac{4}{15} \cdot 3240 = 864\ kg$

20** **21**

Encuentra una fracción irreducible en la que se cumple que si sumamos su denominador al numerador y al propio denominador, la fracción que se obtiene es el triple de la inicial.

SOLUCIÓN:

Sea x/y la fracción irreducible con y≠ 0. Debe cumplirse:

$$\frac{x}{y} \cdot 3 = \frac{x+y}{y+y} = \frac{x+y}{2y}$$

Es decir: $3x \cdot 2y = y(x+y) \rightarrow 6xy = xy + y^2 \rightarrow 5xy = y^2 \rightarrow 5x = y$

Con lo que la fracción será:

$$\frac{x}{5x}$$

Como la fracción debe ser irreducible, la única opción es que x valga 1 , con lo que la fracción es 1/5.

23*** 24

La media de cuatro números enteros positivos es 5.
La mediana de los cuatro números enteros es 6.
¿Cuál es la media de los números enteros mayor y menor?

SOLUCIÓN:

Es 4, vamos a razonarlo:

- La media de cuatro enteros positivos es 5. Por lo tanto, la suma de los cuatro enteros es $4 \cdot 5 = 20$.

- La mediana de los enteros es la media de los dos enteros centrales. Como esta mediana es 6, la suma de los dos enteros del medio es $2 \cdot 6 = 12$.

Por lo tanto, la suma del menor y el mayor de los cuatro enteros es $20 - 12 = 8$.

Por tanto, la media del mayor y el menor de los enteros es $8 \div 2 = 4$.

25** 26

a) ¿Hay un número natural n que sea divisible por 12 y tenga exactamente 12 divisores diferentes, incluyendo el 1 y el mismo n?
b) Encuentra todos los números naturales divisibles por 14 y que tengan exactamente 14 divisores naturales diferentes.
c) ¿Hay un número natural divisible por 2024 y que tenga exactamente 2024 divisores diferentes?

SOLUCIÓN:

a) Sí. El 72, por ejemplo. $72 = 2^3 \cdot 3^2 \Longrightarrow$ El número de divisores es $(3+1)(2+1) = 12$, que son $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 26, 72\}$.

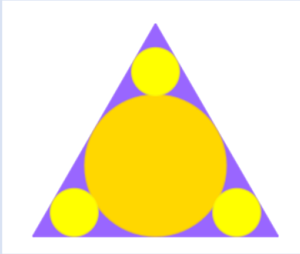
b) Si el número se descompone como $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, el número de divisores es: $(k_1+1)(k_2+1) \cdot \ldots \cdot (k_n+1)$.

Si ha de tener 14 divisores, solo son posibles las descomposiciones p^{13} o pq^6. Como $14 = 2 \cdot 7$ y no es primo, las únicas posibilidades son $2 \cdot 7^6$ y $2^6 \cdot 7$. Serían los números 235 298 y 448.

c) De la factorización de $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \Longrightarrow 2^7 \cdot 11^{10} \cdot 23^{22}$ cumpliría las condiciones.

27 ggb 28

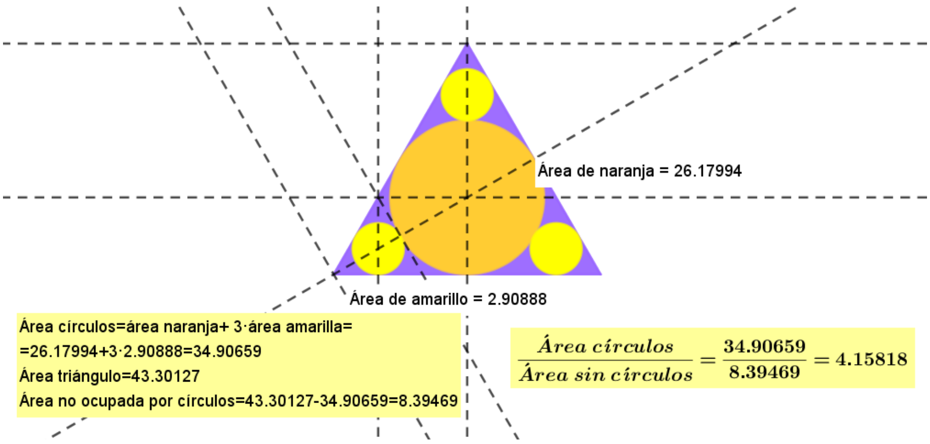
En un triángulo equilátero de lado 10 cm se inscriben cuatro círculos tal y como se ve en el dibujo.
Halla la relación entre la suma de las áreas de los círculos y la región del triángulo no ocupada por ellos.



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Para hacer el dibujo seguiremos los pasos siguientes:

1. Dibujamos con polígono regular el triángulo.
2. Para el círculo mayor, el centro lo obtenemos como intersección de las bisectrices de dos de los ángulos. Al ser equilátero, la intersección de una de las bisectrices con el lado opuesto del triángulo será un punto de la circunferencia inscrita. Con estos dos puntos podemos dibujarla.
3. Para dibujar uno de los círculos pequeños, seguimos el mismo método, ya que es el inscrito en el triángulo equilátero formado por dos lados del triángulo inicial y la recta tangente a la circunferencia grande en el punto de corte con la bisectriz, tal y como se ve en el dibujo.
4. Rotando 120° alrededor del centro del triángulo dos veces, conseguimos los dos círculos que faltan.
5. Las áreas de los círculos las obtenemos con la herramienta área.
6. El área del triángulo ya la tenemos en la vista algebraica: polígono 1=valor de la superficie.



SOLUCIÓN ANALÍTICA:

Calculamos el área del triángulo y los dos tipos de círculos por separado:

1. Área del triángulo.

Tenemos 10 cm de base. Con Pitágoras calculamos la altura, que será el cateto que falta del triángulo rectángulo de 5 cm de base (uno de los catetos) y 10 cm de hipotenusa:

$$a_{TG} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\ cm$$

El área será:

$$A_{TG} = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \cong 43.301270\ cm^2$$

2. Área del círculo grande.
Necesitamos el radio. Al ser el triángulo en el que está inscrito equilátero, el centro del círculo está a una distancia de la base equivalente a 1/3 de la longitud de la altura del triángulo, es decir, el radio del círculo grande mide:

$$R = \frac{1}{3} \cdot a_{TG} = \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ cm$$

El área será:

$$A_{CG} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \pi \frac{25}{3}\ cm^2$$

3. Área del círculo pequeño.
Igual que en el anterior, necesitamos el radio. El hecho de que los círculos grande y pequeños sean tangentes, nos dice que el círculo pequeño está inscrito en el triángulo equilátero de lados dos de los del triángulo inicial y el tercero coincide con la recta tangente a ambos círculos en el punto de tangencia.
La altura de este triángulo más pequeño será la resultante de restar a la altura del triángulo inicial el diámetro del círculo grande:

$$a_{TP} = a_{TG} - 2 \cdot R = 5\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ cm$$

El radio del círculo, igual que antes, será 1/3 de la altura:

$$r = \frac{1}{3} \cdot a_{TP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9}\ cm$$

El área será:

$$A_{CP} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)^2 = \pi \frac{25}{27}\ cm^2$$

4. Área ocupada por los círculos.

$$A_{4C} = A_{CG} + 3 \cdot A_{CP} = \pi \frac{25}{3} + 3 \cdot \pi \frac{25}{27} = \frac{100}{9} \pi\ cm^2$$

5. Área del triángulo no cubierta por los círculos.

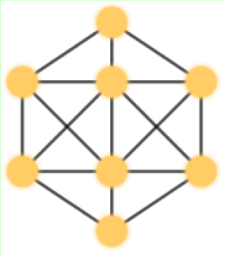
$$A_{SC} = A_{TG} - A_{4C} = 25\sqrt{3} - \frac{100}{9}\pi \ \cong 8.394685\ cm^2$$

6. La relación pedida

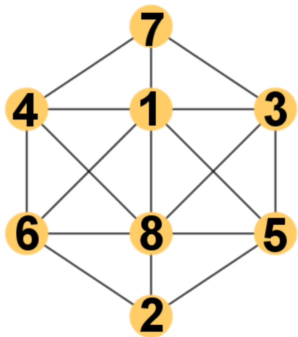
$$\frac{A_{4C}}{A_{SC}} = \frac{\frac{100}{9}\pi}{25\sqrt{3} - \frac{100}{9}\pi} \cong 4.15818$$

30*   31

Coloca los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en los círculos, de forma que en cualquier pareja de círculos que estén conectados por una línea los números no sean consecutivos.



SOLUCIÓN:



Para resolverlo, empezamos por los dos círculos interiores. Están conectados con todos menos uno, por eso ponemos el 1 y el 8 en ellos.

La posición del 2 y el 7 es obligada para que no estén conectados con el 1 y el 8 respectivamente.

En los huecos que quedan pondremos a un lado el 4 y el 6 y en el otro lado el 3 y el 5.

Una de las soluciones posibles es la adjunta.