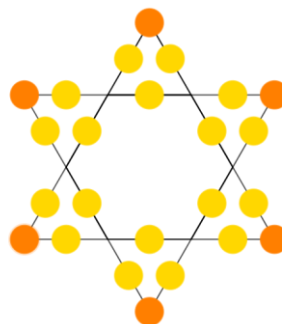


SOLUCIONS · DESEMBRE 2024

2*

3

Col·loca 24 monedes en sis files de manera que en cada fila hi haja 5 monedes.



SOLUCIÓ:

Si posàrem les monedes en files separades, per a sis files amb cinc monedes cadascuna necessitaríem $6 \cdot 5 = 30$ monedes, però només en tenim 24. Això vol dir que 6 monedes han d'estar en més d'una fila.

Una manera d'aconseguir-ho és col·locar les monedes formant una estrella de sis puntes. Les monedes col·locades a les puntes estaran alhora en dues files. En el dibuix adjunt serien les fosques. La resta es col·loca de tres en tres a cadascun dels costats, tenint cura que no estiguen en la intersecció de dues línies.

4***

5

Troba la solució entera i positiva de l'equació
 $4x^5 + 3x^2 + 9x = 400390$.



SOLUCIÓ:

La descomposició del número $400390 = 4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10$

Per tant, l'equació podem escriure-la:

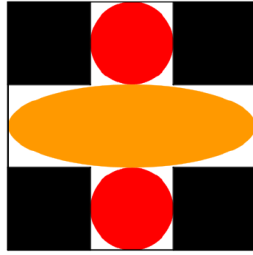
$$4x^5 + 3x^2 + 9x = 400390 \rightarrow 4x^5 + 3x^2 + 9x = 4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10$$

Aleshores, $x=10$.

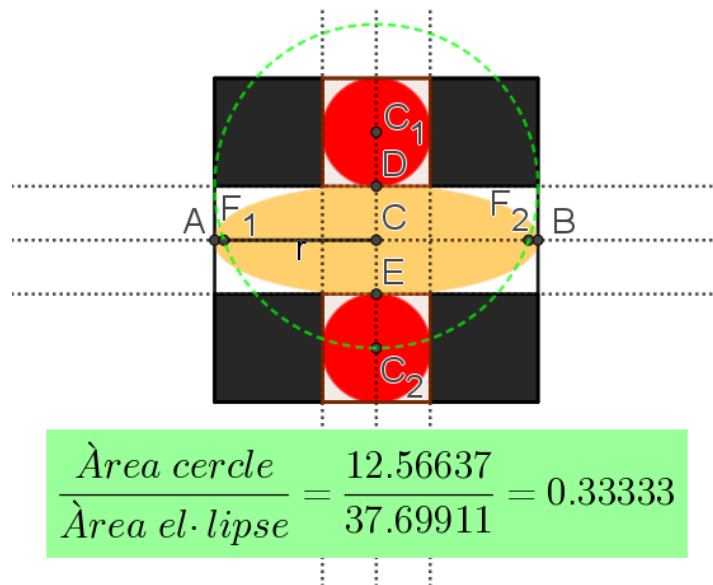
6 ggb**7**

Un quadrat s'ha dividit en 9 quadrats iguals i s'han dibuixat dos cercles i una el·lipse tangent als cercles i al quadrat, com es veu a la figura.

Calculeu la proporció entre l'àrea d'un cercle i l'àrea de l'el·lipse.

**SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:**

1. Per fer el dibuix comencem per tots els quadrats.
2. Necessitem els centres dels tres quadrats de la columna central.
3. Els centres C_1 i C_2 , juntament amb els punts mitjans dels costats E i D, ens serveixen per traçar els dos cercles. Calculem la seua àrea.
4. Per traçar l'el·lipse necessitem els dos focus i un punt. Per al punt, serveixen tant el D com l'E, ja que són els punts de tangència de l'el·lipse amb els cercles.
5. Per trobar els focus, només cal traçar la circumferència amb centre en D i radi r (distància entre A i C). Aquesta circumferència talla l'eix major de l'el·lipse en els focus. Una vegada traçada, calculem la seua àrea.
6. Dividim i obtenim $1/3$.

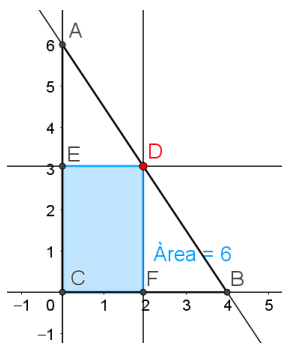


9 ggb 10

Calcula l'àrea del rectangle més gran que càpiga en un triangle de costats $x = 0$, $y = 0$ i $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA 1:



1. Introduïm en la barra d'entrada les tres rectes que determinen el triangle.
2. Amb punt en objecte marquem el punt D sobre la hipotenusa del triangle.
3. Tracem les perpendiculars als eixos per D, i hi trobem els vèrtexs del rectangle.
4. En moure el punt D, s'observa que el valor més gran de l'àrea obtingut és 6 u^2 .

SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA 2:

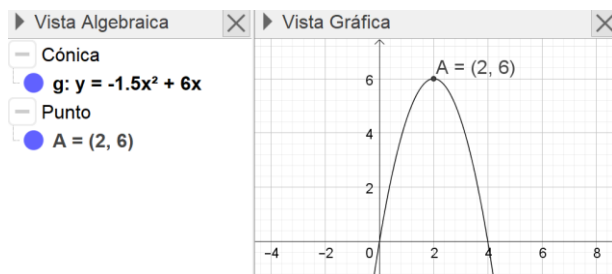
El vèrtex D del rectangle té coordenades (x, y) , però com sabem que està sobre la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, podem posar y en funció de x aïllant:

$$\frac{y}{6} = 1 - \frac{x}{4} = \frac{4-x}{4} \rightarrow y = \frac{12-3x}{2}$$

L'àrea del rectangle ve donada per la funció $f(x, y) = x \cdot y$, on (x, y) són les coordenades de D, o si passem a una variable:

$$f(x) = x \cdot \frac{12-3x}{2} = \frac{12x-3x^2}{2}$$

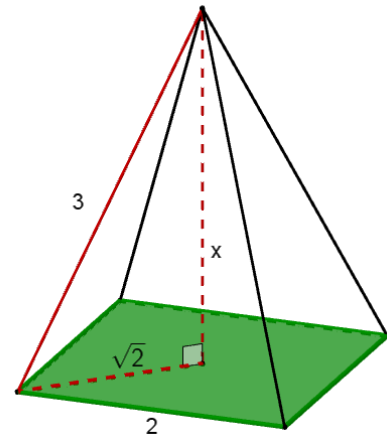
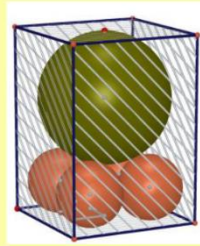
Busquem el màxim d'aquesta funció. Per trobar-ho, introduïm la funció en la barra d'entrada de geogebra i amb extrems relatius trobem el màxim.



Obtenim que el màxim de la funció àrea s'aconsegueix per a $x=2$ i que el valor de l'àrea és 6 u^2 .

11****12**

La figura està formada per un prisma regular quadrangular que conté cinc esferes. Totes les esferes són tangents entre si i tangents a les cares del prisma. Sabent que l'aresta de la base mesura 4 cm, calcula l'altura del prisma.

**SOLUCIÓ:**

El radi de les esferes inferiors és 1 cm.

El radi de l'esfera superior és 2 cm.

Els centres de les cinc esferes formen una piràmide regular quadrangular d'aresta de la base 2 cm i arestes laterals 3 cm.

Siga x l'altura d'aquesta piràmide.

La distància del centre de la base que formen els centres de les quatre esferes inferiors i un dels centres és $\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$3^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 \rightarrow 9 = x^2 + 2 \rightarrow x = \sqrt{7}$$

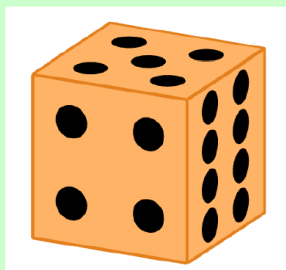
L'altura de la piràmide és $\sqrt{7}$ cm.

L'altura del prisma serà la suma del radi d'una esfera menuda, l'altura de la piràmide i el radi de l'esfera gran, és a dir:

$$\text{Altura del prisma} = 1 + \sqrt{7} + 2 = 3 + \sqrt{7} \text{ cm}$$

13***14**

A cada cara del dau hi ha un número natural menor que 10. Tots els números són diferents, i sempre que sumem els números de dues cares oposades obtenim el mateix resultat. Quin és el número oposat al 5?

**SOLUCIÓ:**

Farem una taula amb els resultats possibles obtinguts quan sumem les xifres de les dues cares (la que ja tenim i la que posaríem a la cara oposada):

	1	2	3	6	7	9
4	5	6	7	10	11	13
5	6	7	8	11	12	14
8	9	10	11	14	15	17

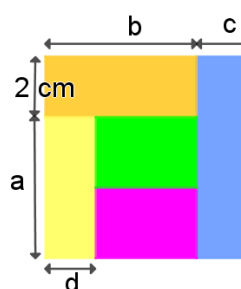
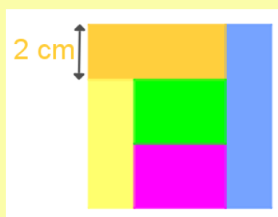
Les xifres que falten a les tres cares ocultes no poden ser les que ja veiem (4, 5 i 8), perquè diu que les sis xifres són diferents.

Com que sabem que la suma del número d'una cara i el de la cara oposada sempre dona el mateix resultat, l'única opció possible seria que la suma fora 11. Els altres resultats no es poden obtenir en algun dels tres casos.

La xifra oposada al 5 és el 6.

16****17**

El quadrat de la imatge està dividit en cinc rectangles, tots de la mateixa superfície. L'altura del taronja és de 2 cm. Calculeu l'àrea del quadrat.
Nota: el dibuix no està a escala.

**SOLUCIÓ:**

$$S_{\text{taronja}} = 2b = S_{\text{groc}} = ad = S_{\text{blau}} = c(a + 2) = S_{\text{verd}} = S_{\text{rosa}} = \frac{a}{2}(b - d)$$

$$\text{De } ad = \frac{a}{2}(b - d) \rightarrow 2ad = ab - ad \rightarrow 3ad = ab \rightarrow 3d = b$$

$$\text{De } 2b = ad \rightarrow 2 \cdot 3d = ad \rightarrow 6 = a$$

$$\text{El costat del quadrat mesura } 2 + a = 8 \text{ cm} \rightarrow A = 64 \text{ cm}^2$$

18***19**

Amb 600 kg de carn tenim prou per alimentar 150 homes durant 15 dies. Quanta carn necessitem per alimentar 180 homes durant 18 dies?

**SOLUCIÓ:**

Si tenim carn per a 150 homes durant 15 dies, vol dir que tenim $150 \cdot 15 = 2250$ racions (una ració seria el que menja un home en un dia).

Per saber quant pesa una ració dividim els 600 kg entre el nombre de racions (2250) i obtenim que una ració pesa $\frac{600}{2250} = \frac{4}{15}$ kg

Per alimentar 180 homes durant 18 dies, necessitem $180 \cdot 18 = 3240$ racions.

Multipliquem per calcular el pes:

Pes necessari de carn = pes d'una ració · número de racions = $\frac{4}{15} \cdot 3240 = 864$ kg

20****21**

Troba una fracció irreductible en la qual es compleix que si sumem el seu denominador al numerador i al mateix denominador, la fracció que s'obté és el triple de la inicial.

**SOLUCIÓ:**

Siga x/y la fracció irreductible amb $y \neq 0$. Ha de complir-se:

$$\frac{x}{y} \cdot 3 = \frac{x+y}{y+y} = \frac{x+y}{2y}$$

És a dir: $3x \cdot 2y = y(x+y) \rightarrow 6xy = xy + y^2 \rightarrow 5xy = y^2 \rightarrow 5x = y$

Per tant, la fracció serà:

$$\frac{x}{5x}$$

Com la fracció ha de ser irreductible, l'única opció és que x valga 1, amb la qual cosa la fracció és $1/5$.

23***

La mitjana de quatre nombres enters positius és 5. La mediana dels quatre nombres enters és 6. Quina és la mitjana dels nombres enters major i menor?

24**SOLUCIÓ:**

És 4. Ho raonarem a continuació:

- La mitjana dels quatre enters positius és 5. Per tant, la suma dels quatre enters és $4 \cdot 5 = 20$.

- La mediana dels quatre enters és la mitjana dels dos enters centrals. Com que aquesta mitjana és 6, la suma dels dos enters centrals és $2 \cdot 6 = 12$.

Per tant, la suma del major i el menor dels quatre enters és $20 - 12 = 8$.

Aleshores, la mitjana del major i el menor dels enters és $8 \div 2 = 4$.

25****26**

- a) Hi ha un nombre natural n que siga divisible per 12 i tinga exactament 12 divisors diferents, incloent-hi l'1 i el mateix n ?
 b) Troba tots els nombres naturals divisibles per 14 i que tinguin exactament 14 divisors naturals diferents.
 c) Hi ha un nombre natural divisible per 2024 i que tinga exactament 2024 divisors diferents?

**SOLUCIÓ:**

a) Sí. El 72, per exemple. $72 = 2^3 \cdot 3^2 \Rightarrow$ El número de divisors és $(3 + 1)(2 + 1) = 12$, que són $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.

b) Si el nombre es descompon com $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$, el número de divisors és $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_n + 1)$.

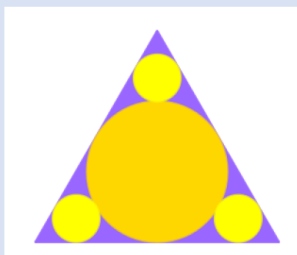
Si ha de tindre 14 divisors, només són possibles les descomposicions p^{13} o pq^6 .
 Como $14 = 2 \cdot 7$ i no és primer, les úniques possibilitats són $2 \cdot 7^6$ i $2^6 \cdot 7$. Serien els nombres 235 298 i 448.

c) De la factorització de $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \Rightarrow 2^7 \cdot 11^{10} \cdot 23^{22}$ compliria les condicions.

27 ggb**28**

En un triangle equilàter de costat 10 cm s'inscriuen quatre cercles tal com es veu al dibuix.

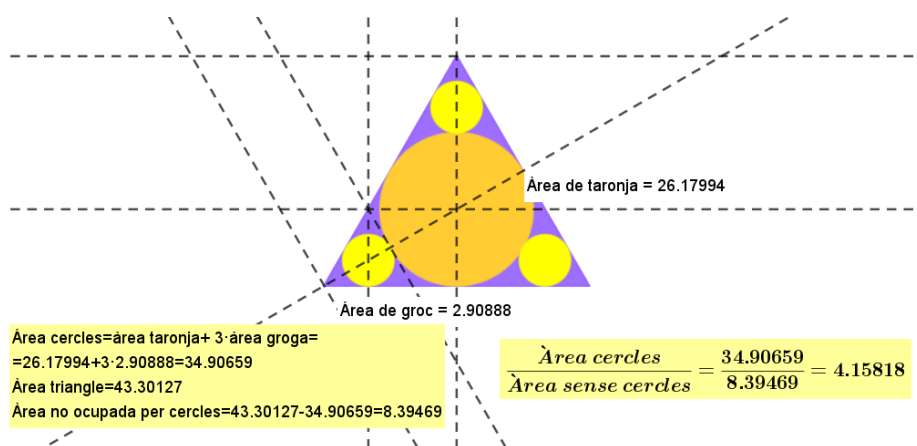
Troba la relació entre la suma de les àrees dels cercles i la regió del triangle no ocupada per ells.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Per fer el dibuix seguirem els passos següents:

1. Dibuixem amb polígon regular el triangle.
2. Per al cercle major, obtenim el centre com a intersecció de les bisectrius de dos dels angles. Com que és equilàter, la intersecció d'una de les bisectrius amb el costat oposat del triangle serà un punt de la circumferència inscrita. Amb aquests dos punts podem dibuixar-la.
3. Per dibuixar un dels cercles menuts seguim el mateix mètode, ja que és l'inscrit al triangle equilàter format per dos costats del triangle inicial i la recta tangent a la circumferència gran en el punt de tall amb la bisectriu, tal i com es veu en el dibuix.
4. Rotant 120° al voltant del centre del triangle dues vegades, aconseguim els dos cercles que falten.
5. Les àrees dels cercles les obtenim amb l'eina àrea.
6. L'àrea del triangle ja la tenim en la vista algebraica: polígon 1=valor de la superfície.



SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Calculem l'àrea del triangle i els dos tipus de cercles per separat:

1. Àrea del triangle:
Tenim 10 cm de base. Amb el teorema de Pitàgores calculem l'altura, que serà el catet que falta del triangle rectangle de 5 cm de base (un dels catets) i 10 cm d'hipotenusa:

$$a_{TG} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

L'àrea serà:

$$A_{TG} = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \cong 43.301270 \text{ cm}^2$$

2. Àrea del cercle gran:

Necessitem el radi. Com que el triangle en què està inscrit és equilàter, el centre del cercle està a una distància de la base equivalent a 1/3 de la longitud de l'altura del triangle. És a dir, el radi del cercle gran mesura:

$$R = \frac{1}{3} \cdot a_{TG} = \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

L'àrea serà:

$$A_{CG} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \pi \frac{25}{3} \text{ cm}^2$$

3. Àrea del cercle petit:

Igual que en l'anterior, necessitem el radi. El fet que els cercles gran i petit siguin tangents ens diu que el cercle petit està inscrit en el triangle equilàter de costats dos dels del triangle inicial i el tercer coincideix amb la recta tangent a ambdós cercles en el punt de tangència.

L'altura d'aquest triangle petit serà la resultant de restar a l'altura del triangle inicial el diàmetre del cercle gran:

$$a_{TP} = a_{TG} - 2 \cdot R = 5\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

El radi del cercle, igual que abans, serà 1/3 de l'altura:

$$r = \frac{1}{3} \cdot a_{TP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \text{ cm}$$

L'àrea serà:

$$A_{CP} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} \right)^2 = \pi \frac{25}{27} \text{ cm}^2$$

4. Àrea ocupada pels cercles:

$$A_{4C} = A_{CG} + 3 \cdot A_{CP} = \pi \frac{25}{3} + 3 \cdot \pi \frac{25}{27} = \frac{100}{9} \pi \text{ cm}^2$$

5. Àrea del triangle no coberta pels cercles:

$$A_{SC} = A_{TG} - A_{4C} = 25\sqrt{3} - \frac{100}{9} \pi \cong 8.394685 \text{ cm}^2$$

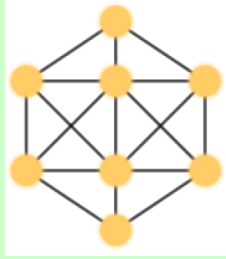
6. La relació demanada:

$$\frac{A_{4C}}{A_{SC}} = \frac{\frac{100}{9} \pi}{25\sqrt{3} - \frac{100}{9} \pi} \cong 4.15818$$

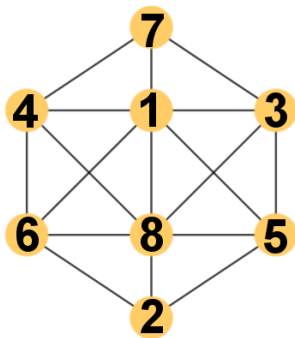
30* **31**

31

Col·loca els números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 als cercles, de manera que en qualsevol parella de cercles que estiguen connectats per una línia els números no siguin consecutius.



SOLUCIÓ:



Per resoldre'l, comencem pels dos cercles interiors. Com estan connectats amb tots menys un, només hi podem posar l'1 i el 8.

La posició del 2 i el 7 és obligada perquè no estiguen connectats amb l'1 i el 8, respectivament.

Als buits que queden posarem a un costat el 4 i el 6 i a l'altre costat el 3 i el 5.

Una de les solucions possibles és l'adjunta.