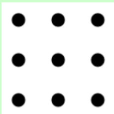
# SOLUCIONES · ENERO 2025

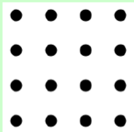
## 1*

Sin levantar el lápiz del papel, traza cuatro líneas rectas que unan los 9 puntos:

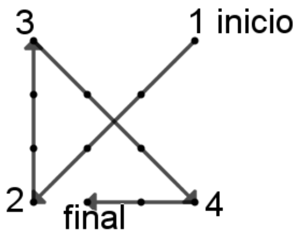


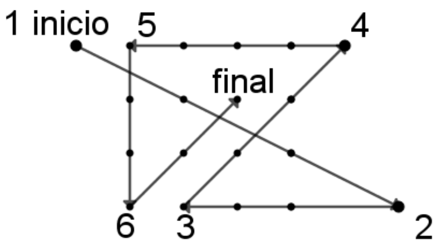
## 2

Sin levantar el lápiz del papel, traza seis líneas rectas que unan los 16 puntos:



**SOLUCIÓN:**




## 3**

Un abuelo, en una reunión familiar, reparte tres euros a cada nieto y le sobran 11 euros. En la siguiente celebración familiar lleva 20 euros más, reparte 5 a cada nieto y le sobra un euro. ¿Cuántos nietos tiene?

## 4

**SOLUCIÓN:**

Llamamos: $x$ al número de nietos

$y$ al número de euros que lleva el primer día.

Tendremos las ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 3x + 11 \\ y + 20 = 5x + 1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por sustitución:

$$3x + 11 + 20 = 5x + 1$$

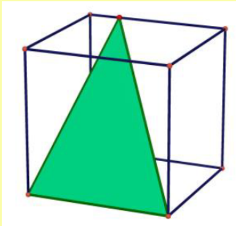
$$31 - 1 = 5x - 3x$$

$$30 = 2x \rightarrow x = 15$$

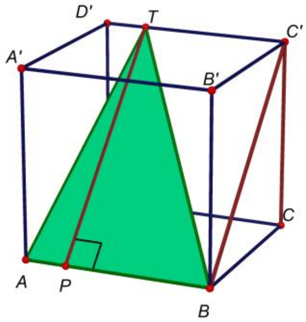
Por tanto, tiene 15 nietos.

## 6** 7

La figura está formada por un cubo y un triángulo con una arista del cubo por lado y el tercer vértice sobre la arista del cubo opuesta. Calcula la proporción entre la superficie del cubo y el área del triángulo.



**SOLUCIÓN:**




Sea el cubo ABCDA'B'C'D' de arista $\overline{AB} = 1$

Sea $\overline{TP}$ la altura del triángulo $\overset{\Delta}{ABT}$

$\overline{TP} = \overline{BC'} = \sqrt{2}$

El área del triángulo sombreado es:

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El área del cubo es:

$$S_{ABCDA'B'C'D'} = 6 \cdot S_{ABCD} = 6$$

La proporción de áreas es:

$$\frac{S_{ABCDA'B'C'D'}}{S_{ABT}} = 6\sqrt{2}$$

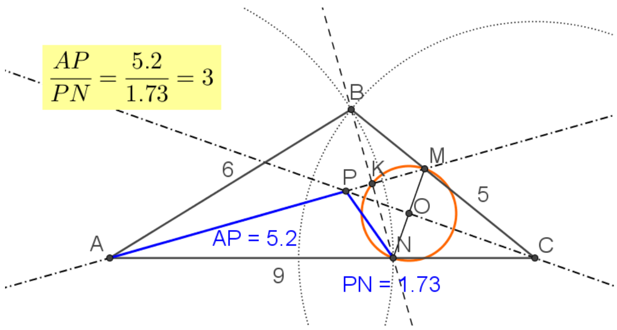
## 8 ggb 9

En el triángulo ABC (AB = 6, BC = 5, AC = 9) se dibuja la bisectriz del ángulo A. Esta recta corta el lado BC en el punto M. La recta perpendicular a AM que pasa por el vértice B corta el lado AC en el punto N.

*a)* Prueba que la bisectriz del ángulo C divide el segmento MN por la mitad.

*b)* Sea P el punto de intersección de las bisectrices del triángulo ABC. Encuentra la relación entre AP y PN.

**SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:**




1. Empezamos por colocar los puntos A(0,0) y C(9,0) sobre el eje de abscisas.
2. Con centro en A y radio 6 trazamos una circunferencia, y con centro en C y radio 5 otra. El punto de corte de ambas determina el punto B.
3. Dibujamos la bisectriz del vértice en A, y la intersección de esta con el lado BC del triángulo (la llamamos M).

4. Trazamos la recta perpendicular a esta bisectriz que pase por el punto B. Hallamos el punto N como intersección de esta recta con el lado AC.
5. Trazamos el segmento que une M con N y la bisectriz en el vértice C. Hallamos el punto de corte de ambos O .
6. Si este punto divide el segmento en dos partes iguales, al trazar la circunferencia centrada en O que pase por M o N, también pasará por el otro (N o M). Como se puede comprobar, sí ocurre.

Para hallar la relación entre AP y PN, empezamos por hallar P como intersección de las dos bisectrices.

Trazamos los segmentos y dividimos sus longitudes. El resultado es 3.

## 10*** 11

Siendo $a > 1$, estudia si la suma siguiente da un resultado positivo o negativo:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+$$
$$+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}+\frac{32}{1+a^{32}}$$


**SOLUCIÓN:**

Vamos a ir sumando poco a poco las fracciones:

$$F_1+F_2=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}=\frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)}=\frac{2}{1-a^2}$$

$$F_1+F_2+F_3=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}=\frac{4}{1-a^4}$$

$$F_1+F_2+F_3+F_4=\sum_{i=1}^{4}F_i=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}=\frac{8}{1-a^8}$$

$$\sum_{i=1}^{5}F_i=\frac{8}{1-a^8}+\frac{8}{1+a^8}=\frac{16}{1-a^{16}}$$

$$\sum_{i=1}^{6}F_i=\frac{16}{1-a^{16}}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}$$

$$\sum_{i=1}^{7}F_i=\frac{32}{1-a^{32}}+\frac{32}{1+a^{32}}=\frac{64}{1-a^{64}}$$

Como sabemos que $a > 1$ podemos asegurar que $a^{64} > 1$, por lo tanto, el resultado final será negativo, al tener la fracción $\frac{64}{1-a^{64}}$ el numerador positivo y el denominador negativo.

## 13* 14

Tres amigos tienen 21 botes de refresco, 7 de ellos llenos, 7 vacíos y 7 llenos hasta la mitad exactamente. ¿Cómo deben repartirse los botes para que los tres se lleven el mismo número de botes y la misma cantidad de refresco? (No se puede trasvasar refresco de un bote a otro).

**SOLUCIÓN:**

En total tienen una cantidad de refresco de 10 botes y medio, luego cada uno debe llevarse 7 botes con un contenido de 3 botes y medio. Hay varias soluciones:

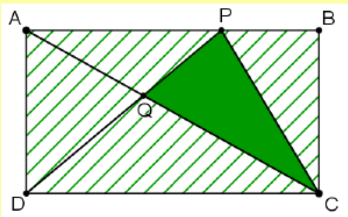
1º) 3 llenos, 3 vacíos, 1 hasta la mitad
2º) 2 llenos, 2 vacíos, 3 hasta la mitad
3º) 2 llenos, 2 vacíos, 3 hasta la mitad

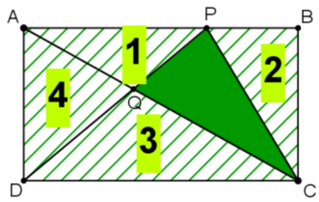
1º) 3 llenos, 3 vacíos, 1 hasta la mitad
2º) 3 llenos, 3 vacíos, 1 hasta la mitad
3º) 1 lleno, 1 vacío, 5 hasta la mitad

## 15** 16

En el rectángulo adjunto, conocemos que $\overline{AP} = 2\overline{PB}$ y que la superficie del triángulo verde CPQ es de 1 dm$^2$.

Calcula la superficie que ocupa el rectángulo ABCD.




**SOLUCIÓN:**

Para calcular la superficie del rectángulo, vamos a calcular la superficie de cada uno de los triángulos que lo componen.

Los nombraremos con números como se indica en el dibujo adjunto.

Al ser AC una diagonal del rectángulo sabemos que $S_1 + S_2 + 1 = S_3 + S_4 \quad (1)$

Al ser AP el doble de PB y tener la misma altura BC los triángulos APC y PBC se cumple que la superficie del primero es el doble de la del segundo:

$$S_1 + S_4 = 2S_2 \quad (2)$$

También se cumple que los triángulos APD y APC ocupan la misma superficie al tener la misma base y altura:

$$S_1 + S_4 = S_1 + 1 \quad \rightarrow \quad S_4 = 1 \quad (3)$$

Los triángulos APQ y CDQ son semejantes (tienen ángulos iguales), y dado que una base es 2/3 de la otra, la relación entre las áreas será:

$$S_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_3 = \frac{4}{9} \cdot S_3 \ (4)$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 + 1 = S_3 + S_4 \\ S_1 + S_4 = 2S_2 \\ S_4 = 1 \\ S_1 = \dfrac{4}{9} \cdot S_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_1 + S_2 = S_3 \\ S_1 + 1 = 2S_2 \\ S_1 = \dfrac{4}{9} \cdot S_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_1 + 1 = 2S_2 \\ S_1 = \dfrac{4}{9} \cdot (S_1 + S_2) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2S_2 - 1 = \frac{4}{9} \cdot (2S_2 - 1 + S_2) \quad \rightarrow \quad 18S_2 - 9 = 12S_2 - 4 \quad \rightarrow \quad 6S_2 = 5 \quad \rightarrow \quad S_2 = \frac{5}{6}$$

$$S_1 + 1 = 2S_2 \quad \rightarrow \quad S_1 = 2S_2 - 1 = \frac{10}{6} - 1 = \frac{2}{3}$$

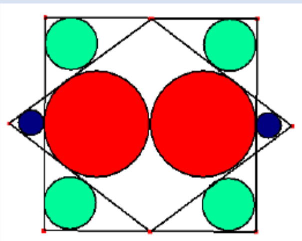
$$S_1 + S_2 = S_3 \quad \rightarrow \quad S_3 = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

El área total del rectángulo será

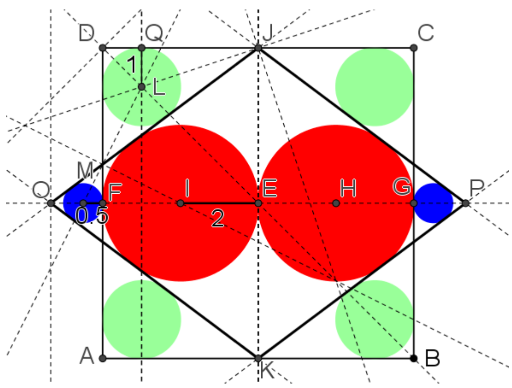
$$S_R = S_1 + S_2 + 1 + S_3 + S_4 = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + 1 + \frac{3}{2} + 1 = 5\ dm^2$$

**17 ggb 18**

En la imagen adjunta vemos un cuadrado, un rombo con dos vértices en el cuadrado y varios círculos inscritos en los triángulos formados.
Calcula la proporción entre los radios de los tres tipos de círculos.



**SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:**




1. Empezamos por dibujar el cuadrado de lado 8 unidades y vértices ABCD con polígono regular.
2. A continuación, con punto medio o centro, el centro del cuadrado E y los puntos medios de los lados del cuadrado F, G, J y K. También los puntos medios de los segmentos FE y EG, que serán los centros de las circunferencias grandes I y H.
3. Trazamos las circunferencias grandes, de las que tenemos centro y un punto.
4. Los lados del rombo son tangentes a estas dos circunferencias desde los puntos medios de los lados horizontales del cuadrado (J y K). Trazamos las tangentes, y con intersección, los vértices del rombo. Podemos ya trazar el polígono JPKO.
5. Para las circunferencias que faltan, al estar inscritas en triángulos, necesitamos los incentros, que hallaremos como intersección de dos de las bisectrices del triángulo.

El otro punto que necesitamos, lo hallaremos como intersección de la recta perpendicular al lado del cuadrado correspondiente que pase por el incentro.

6. Dibujamos una de las circunferencias medianas y con una rotación de 90° vamos obteniendo las otras tres.
7. Para las pequeñas, lo mismo pero el ángulo de rotación de 180°.
8. Para los radios de las circunferencias, trazamos los segmentos y en propiedades seleccionamos que sea visible el valor. Los radios son 2, 1 y 0.5, es decir están en una proporción 4:2:1.

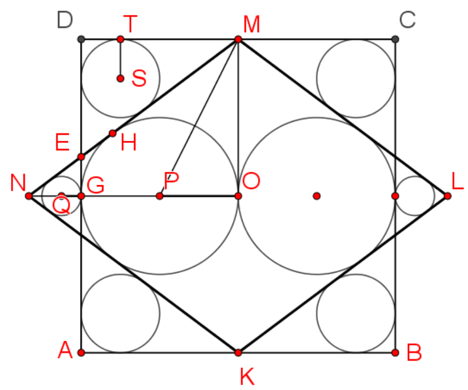
## SOLUCIÓN ANALÍTICA:

Sea el cuadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB} = 4r$ y de centro $O$.

Sea el rombo $KLMN$ tangente a las circunferencias de radio $r$.

Sea la circunferencia de centro $P$ y radio $\overline{PO} = r$

Sea $\alpha = \angle PMO. \angle NMO = \angle DEM = 2\alpha$




$$\tan\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{DE} = \frac{3}{2}r, \overline{EM} = \frac{5}{2}r$$

Sea la circunferencia de centro $S$ y radio $\overline{ST} = s$ inscrita en el triángulo $\overset{\Delta}{DEM}$.

$$s = \frac{2r+\frac{3}{2}r-\frac{5}{2}r}{2} = \frac{1}{2}r$$

$$\overline{ON} = \frac{8}{3}r$$

$$\overline{NG} = \frac{2}{3}r, \overline{EF} = r, \overline{NE} = \frac{5}{6}r$$

Sea la circunferencia de centro $Q$ y radio $\overline{QG} = t$ inscrita en el triángulo $\overset{\Delta}{NEF}$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{NEF}$ es:

$$\frac{1}{2}r\cdot\frac{2}{3}r = \frac{2\cdot\frac{5}{6}r+r}{2}t$$

$$t = \frac{1}{4}r$$

Entonces, la proporción de los radios es:

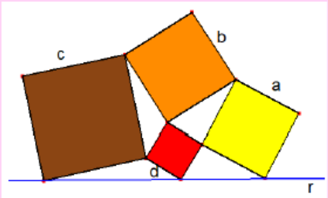
$r{:}\,s{:}\,t = 4{:}\,2{:}\,1$

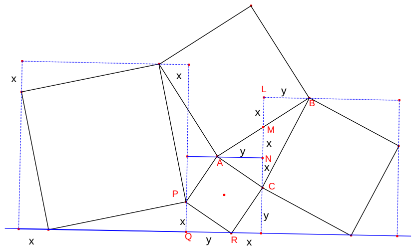
## 20***

## 21

Sean cuatro cuadrados de lados a, b, c, d, tales que tres vértices de los cuadrados de lados a, c, d están alineados.

Prueba que b=2d.




**SOLUCIÓN:**

Sea el cuadrado de lado $\overline{AB} = b$

Sea el cuadrado de lado $\overline{AC} = d$

Sea $\overline{PQ} = x, \overline{QR} = y$

$\overline{BL} = \overline{AN} = y$

Entonces, M es el punto medio del lado $\overline{AB}$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ANC}, \overset{\Delta}{ANM}$ son iguales.

Entonces, $d = \overline{AC} = \overline{AM} = \frac{1}{2}b$

## 22*

## 23

Para una actividad de 2º de ESO hay que organizar a los alumnos en pequeños equipos. El número de alumnos de este nivel está comprendido entre 100 y 120. Si se les agrupa de 5 en 5, sobran 2; si se les agrupa de 2 en 2, sobra 1; pero si se les agrupa de 3 en 3, no sobra ninguno. ¿Cuántos alumnos hay?

**SOLUCIÓN:**

Si al agrupar de 5 en 5 sobran 2, el número de alumnos debe terminar en 2 o en 7, ya que si quitamos los dos que sobran, el número acabaría en 0 o 5 por ser múltiplo de 5.

Si agrupando de 2 en 2 sobra uno, el número debe ser impar, así que acaba en 7.

El que al agrupar de 3 en 3 no sobre ninguno, nos dice que buscamos un múltiplo de 3 que acabe en 7 y esté entre 100 y 120. Los múltiplos de 3 en este intervalo son:

102, 105, 108, 111, 114, 117 y 120.

En total hay 117 alumnos.

## 24** 25

Un número de 2025 cifras está escrito en la pizarra. Cada número de dos cifras formado por cifras adyacentes de este número, en el mismo orden, es divisible por 17 o 28.

*a)* ¿La última cifra del número de 2025 cifras puede ser 3?
*b)* ¿El número puede estar formado solo por cifras impares?
*c)* ¿Qué valores puede tomar la primera cifra si la última es un 7? Indica todas las soluciones posibles.


**SOLUCIÓN:**

Escribimos todos los números de dos cifras que son múltiplos de 17 y 28 :

17, 34, 51, 68, 85, 28, 56, 84

a) Como podéis ver, ningún múltiplo de 17 ni ningún múltiplo de 28 acaba en 3, de forma el número largo no podrá tener un 3 al final.

Respuesta: No puede ser.

b) En el número largo forzosamente los únicos pares de cifras adyacentes podrían ser el 17 y el 51 porque son los únicos números formados solo por cifras impares.

Si el número empieza por 17, no tenemos ninguna opción para la tercera cifra (no hay ningún múltiplo de 17 o 28 que empiece por 7).

Si el número largo empieza por 51, entonces la tercera cifra será el 7, pero no podremos encontrar ninguna opción para la cuarta (por la misma razón que antes).

Respuesta: No puede ser.

c) Si la última cifra es 7, entonces la penúltima es el 1, y la antepenúltima (en el lugar 2023) es un 5. Así el número 8 se escribirá en el lugar 2022. Ahora, para el lugar 2021, podemos elegir un 2 o un 6 (puesto que el 28 y el 68 son seleccionables). Si escribimos un 2 no hay ninguna opción para el lugar 2020 (no hay múltiplos seleccionables acabados en 2). Si escribimos un 6, en el lugar 2020 tenemos que escribir un 5, y en el lugar 2019 un 8:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 56856 \quad \underbrace{8}_{cifra\ 2022} \quad 517$$

Ahora estos bloques 568 se van repitiendo periódicamente, y el 8 se escribe en los lugares 2022,2019,2016,…………..

Para encontrar el lugar donde aparece el 8 por primera vez, por la izquierda:

2022,2019,2016,……….. es una progresión aritmética que nos indica la posición que ocupa el 8 de derecha a izquierda y de la que sabemos que $a_1 = 2022$ y $d = -3$.

$a_n = a_1 + (n-1)d = 2021 + (n-1)(-3) = 2024 - 3n$

Al ser bloques de tres cifras, el 8 estará en la posición 1, 2 o 3:

Si $a_n = 1 \Rightarrow 1 = 2025 - 3n \Rightarrow n = \frac{2024}{3} \notin \mathbb{N}$

Si $a_n = 2 \Rightarrow 2 = 2025 - 3n \Rightarrow n = \frac{2023}{3} \notin \mathbb{N}$

Si $a_n = 3 \Rightarrow 3 = 2025 - 3n \Rightarrow n = \frac{2022}{3} = 674$

Por lo tanto el 8 está en los lugares 2022,2019,2016,………,6,3

El número en cuestión es:

$$56856856\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{2021 cifras}856\quad \underbrace{8}_{cifra\ 2022}\quad 517$$

El número, por tanto, sólo puede empezar por 5.

**27 ggb**

El coste de producir $x$ unidades de un producto viene dado por $C(x) = 1000 + 300x + \frac{x^2}{20}$.

Si cada unidad se vende por $p(x) = 400 - 0.1x$, calcula el número de unidades a producir para maximizar el beneficio.

**28**

**SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:**

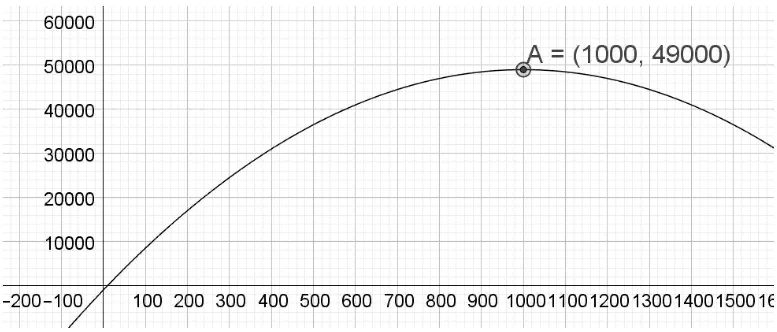
La función que nos dará el beneficio obtenido será la resultante de restar al dinero obtenido por la venta de las x unidades, es decir, los ingresos por la venta ($I(x) = x \cdot p(x)$) el coste de producirlas:

$$B(x) = I(x) - C(x) =$$

$$= x(400 - 0.1x) - \left(1000 + 300x - \frac{x^2}{20}\right) = -\frac{x^2}{20} + 100x - 1000$$

Si la introducimos en la barra de entrada de geogebra, apenas veremos la función debido a que los ejes que aparecen por defecto tienen unos límites demasiado pequeños.

Antes que nada, hay que modificar en las características de la vista gráfica el intervalo admitido tanto para x como para y. Una vez hecho, vemos el máximo de la parábola con extremos relativos de la función :




De donde deducimos que los beneficios se maximizan fabricando 1000 unidades. Los beneficios serán de 49 000 €.

**SOLUCIÓN ANALÍTICA:**

La función que nos dará el beneficio obtenido será la resultante de restar al dinero obtenido por la venta de las x unidades, es decir, los ingresos por la venta $(I(x) = x \cdot p(x))$ el coste de producirlas:

$$B(x) = I(x) - C(x) =$$

$$= x(400 - 0.1x) - \left(1000 + 300x - \frac{x^2}{20}\right) = -\frac{x^2}{20} + 100x - 1000$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$B'(x) = -\frac{x}{10} + 100 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1000$$

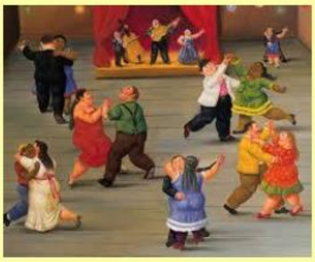
Comprobamos que es máximo con la segunda derivada:

$$B'(x) = -\frac{1}{10} < 0 \quad \rightarrow \quad es\ máximo.$$

Habrá que fabricar 1 000 unidades del producto.

**29**** **30**

En un concurso de parejas de baile mixtas, el 80% de los hombres está bailando, y el 10% de las mujeres no está bailando. Si han asistido al concurso 340 personas, ¿cuántas están bailando en este momento?



**SOLUCIÓN:**

Llamaremos H al número total de hombres que asisten al concurso, y M al de mujeres.

Si no están bailando el 10% de las mujeres, quiere decir que el 90% si lo hacen.

Las parejas que bailan en este momento están formadas por el 80% de los hombres y el 90% de las mujeres, por lo que ambas cantidades deben coincidir (todas las parejas de baile están formadas por un hombre y una mujer):

$$90\% \text{ de M} = 80\% \text{ de H} \quad \rightarrow \quad 9M = 8H$$

Además sabemos que en total son 340 personas, por lo que $M + H = 340$.

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 9M = 8H \\ M + H = 340 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9M - 8H = 0 \\ 8M + 8H = 2720 \end{cases} \rightarrow \quad 17M = 2720 \quad \rightarrow \quad M = 160$$

$$M + H = 340 \quad \rightarrow \quad H = 180$$

En este momento las mujeres que bailan son el 90% de 160 y los hombres que bailan el 80% de 180, es decir 144 mujeres y 144 hombres, por tanto, están bailando 288 personas.

# 31*

Un cazador sale de su cabaña y camina 3 km hacia el sur. Después, 2 km hacia el este, y se encuentra con un oso. Asustado, corre 3 km hacia el norte y llega a la cabaña de la que había partido.
¿De qué color es el oso?

SOLUCIÓN:

El oso es blanco. El cazador está en el Polo Norte o muy cerca de él. Es la única forma de poder volver al punto de partida.