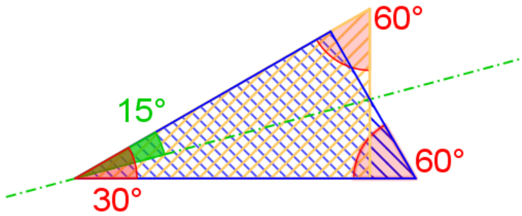
SOLUCIONES · FEBRERO 2025

1*

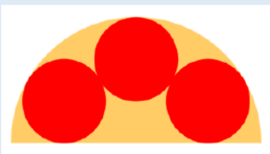
Un cartabón tiene forma de triángulo rectángulo con un ángulo de 30° y otro de 60°. Usando el cartabón y sin ayuda de otros instrumentos, construye un ángulo de 15°.

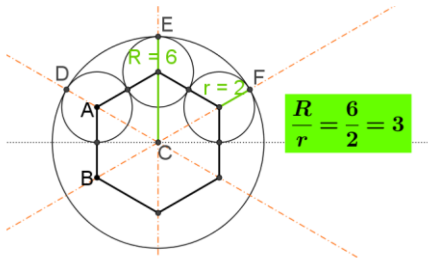
Solución:



3 ggb **4**

En la figura adjunta hay una semicircunferencia y tres circunferencias iguales, tangentes entre sí como se indica.
Calcula la proporción entre el radio de la semicircunferencia y el radio de las circunferencias.





Solución con geogebra:

Para empezar el dibujo lo más fácil es considerar los centros de los círculos rojos como los vértices de un hexágono.

Pasos a seguir:

1. Trazamos el segmento AB correspondiente al lado del hexágono, y con polígono regular lo trazamos.
2. Hallamos los puntos medios de los lados del hexágono, y con centro en un vértice y pasando por el punto medio del segmento correspondiente conseguimos los tres círculos. (También podríamos trazar uno y por rotación de 60° los demás).

3. Para trazar la circunferencia exterior, hallamos el centro del hexágono y trazamos las tres rectas que pasan por este punto y por cada uno de los centros de los círculos. Con intersección, los tres puntos D, E y F, y con ellos y circunferencia por tres puntos ya la tenemos.
4. Trazamos un segmento correspondiente a cada uno de los radios: R para el mayor y r para el menor.
5. Siempre obtendremos que R es el triple que r, tenga el tamaño que tenga nuestro dibujo.

5** **6**

Completa la tabla con tres números, de forma que cada uno de los números de las tres casillas centrales sea la media aritmética del número situado a su izquierda y el situado a su derecha.

	48			6

Solución:

Llamaremos x, y, z a los tres números desconocidos:

x	48	y	z	6

Se cumple entonces que

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 48 \\ \frac{48+z}{2} = y \\ \frac{y+6}{2} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 96 \\ 48 + z = 2y \\ y + 6 = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 96 \\ 48 + z = 2(2z - 6) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 96 \\ 60 = 3z \end{cases} \rightarrow$$

$$z = 20 \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot 20 - 6 = 34 \quad \rightarrow \quad x = 96 - 34 = 62$$

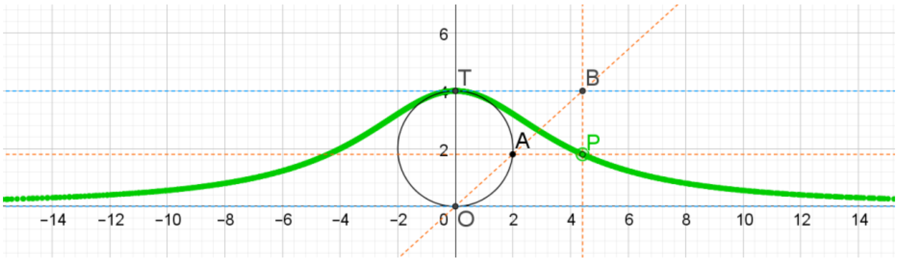
La tabla quedará:

62	48	34	20	6

7 ggb 8

Investiga cómo se genera la curva llamada “bruja de Agnesi” y dibújala con geogebra.
¿Sabes por qué se llama así?

Solución:



Esta curva fue estudiada por Pierre de Fermat en 1630, por Luigi Guido Grandi en 1703 y por Maria Gaetana Agnesi en 1748.

Grandi llamó a la curva *versoria*, del latín *vertere*, que significa virar o girar; *versiera* en italiano es un término naval que identifica el cabo o cuerda que hace girar la vela. María Gaetana Agnesi se refirió a esta curva como *la versiera*, añadiéndole el artículo femenino *la*; de esta manera, *la versiera di Agnesi* significa *la curva de Agnesi*.

Los estudios de Agnesi sobre esta curva fueron traducidos al inglés por el profesor de la Universidad de Cambridge John Colson, quien al tener escaso conocimiento del italiano confundió *versiera* con *avversiera*, que en italiano significa 'diablesa', 'demonia'. Por eso tradujo el término al inglés como *witch* (hechicera, bruja), y esta anécdota ha hecho que haya quien guste de llamar "bruja" a esta curva. En otros idiomas se habla de *loci* (en latín, 'lugares' geométricos) *de Agnesi*. En italiano se denomina *versiera*, como debe ser.

Se trata de una curva abierta que se construye de la forma siguiente:

A partir de una circunferencia, y un punto cualquiera **O** de la circunferencia, siendo **T** el punto diametralmente opuesto a **O**. Para cualquier otro punto **A** de la circunferencia, la prolongación de la línea secante **OA** corta a la perpendicular a **OT** que pasa por **T** en **B**. La línea paralela a **OT** que pasa por **B**, y la línea perpendicular a **OT** que pasa por **A** se cortan en **P**. Tomando como variable el punto **A**, se define el conjunto de puntos **P** pertenecientes a la curva buscada, la *bruja de Agnesi*.

Para obtener la gráfica de la función con geogebra es necesario activar el rastro del punto P.

10** **11**

Diremos que un número de cuatro cifras es afortunado si todas sus cifras son diferentes y la suma de las dos primeras es igual a la suma de las dos últimas (como, por ejemplo, el 3140). Encuentra el número primo más pequeño que no tiene un múltiplo de cuatro cifras afortunado.

Solución:

Buscamos números afortunados divisibles por los sucesivos primeros números primos:

$$\overline{abcd} \vdots 2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots\ldots$$

donde utilizamos el símbolo $\vdots$ para indicar que el número $\overline{abcd}$ es divisible por 2, 3, 5…

Y estudiando los distintos números primos encontramos que:

$$5014 \vdots 2 \qquad 1890 \vdots 3 \qquad 2680 \vdots 5 \qquad 1890 \vdots 7$$

El siguiente número primo es el 11. Demostraremos que no hay números afortunados de cuatro cifras múltiplos de 11:

$$\begin{cases} a + c - b - d = 11k & k \in Z \\ a + b = c + d & a \neq b \neq c \neq d \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones:

$c - b - b - d = 11k - c - d \Leftrightarrow 2(c - b) = 11k$, donde $b, c \in [0,9]$ y $b \neq c$, con lo cual esto no es posible.

Por lo tanto, el número primo más pequeño que no tiene múltiplo de cuatro dígitos que sea afortunado es el 11.

12*

Tenemos una balanza con cinco pesas de 3, 6, 8, 12 y 16 gramos. Tenemos 33 objetos que pesan, respectivamente, 1, 2, 3, ..., 33 gramos. Solo uno de los objetos no puede ser equilibrado con las cinco pesas. ¿Cuál es?

13

Solución:

Objeto a pesar (gr.)	Brazo izquierdo balanza	Brazo derecho balanza
1	1	1
2	2+6	8
3	3	3
4	4+8	12
5	5+3	8
6	6	6
7	7+12	3+16
8	8	8
9	9	3+6
10	10+6	16
11	11	3+8
12	12	12
13	13+3	16
14	14	6+8
15	15	3+12
16	16	16
17	17+3	8+12
18	18	6+12
19	19	3+16
20	20	8+12
21	21	3+6+12
22	22	6+16
23	23	3+8+12
24	24	8+16
25	25	3+6+16
26	26	6+8+12
27	27	3+8+16
28	28	12+16
29	29	3+6+8+12
30	30	6+8+16
31	31	3+12+16
32		
33	33	3+6+8+16

El único objeto que no se puede equilibrar es el de 32 gramos.

14* 15**

Un cuadrado perfecto tiene cuatro cifras. Las dos primeras son iguales entre sí. Las dos últimas son iguales entre sí. ¿De qué número se trata?

Solución:

El cuadrado perfecto será de la forma:

$$aabb = a \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + b = a \cdot 1100 + b \cdot 11 = 11(100a + b)$$

Como $aabb$ ha de ser un cuadrado perfecto, debe ocurrir que $100a + b$ debe ser el producto de 11 por un cuadrado perfecto.

Pero $100a + b = a0b$, por lo que a0b será el producto de 11 por un cuadrado perfecto y hay que tener en cuenta que debe ser de tres cifras y la segunda es 0

Las opciones que tenemos son:

$4^2 \cdot 11 = 16 \cdot 11 = 176$	$5^2 \cdot 11 = 25 \cdot 11 = 275$
$6^2 \cdot 11 = 36 \cdot 11 = 396$	$7^2 \cdot 11 = 49 \cdot 11 = 539$
$8^2 \cdot 11 = 64 \cdot 11 = 704$	$9^2 \cdot 11 = 81 \cdot 11 = 891$

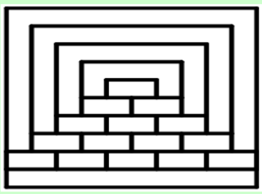
El único caso que cumple los requisitos es

$$\mathbf{8^2 \cdot 11 = 64 \cdot 11 = 704}$$

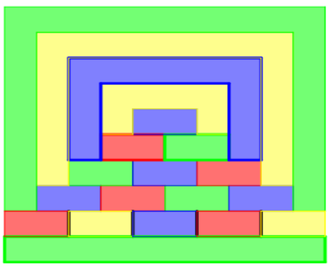
Por lo tanto, a0b=704, y concluimos que a=7 y b=4. Además, 7744=$\mathbf{88^2}$

17* 18

Pinta la figura con el menor número de colores posible, de forma que dos sectores entre los que existe contacto deben ser de distintos colores.



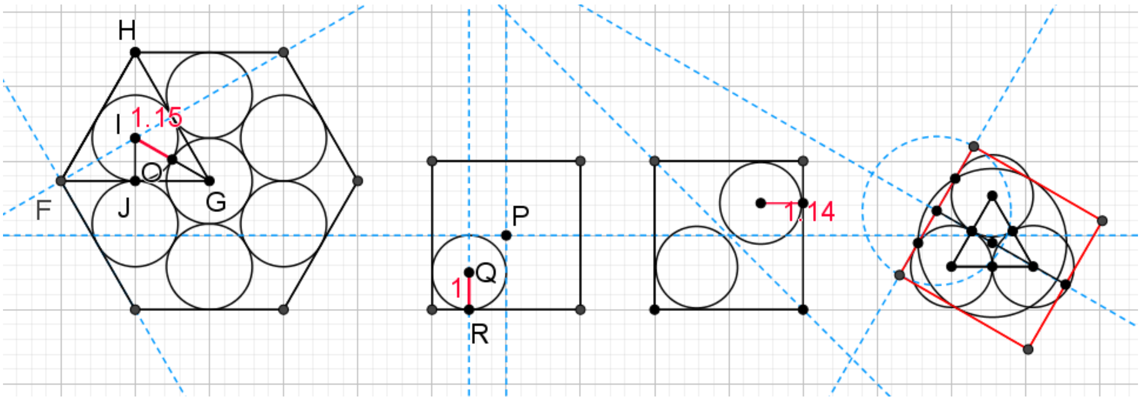
Solución:



19 ggb 20

Quiero comprar un cubreplatos como el de la imagen. En la tienda me han enseñado, además del de base cuadrada, uno de base hexagonal, ambos con 40 cm de lado de la base. Mis platos miden 22 cm de diámetro. ¿Cuántos platos puede cubrir cada uno de los modelos de cubreplatos?

Solución con geogebra:



Para resolver el problema, dibujaremos el hexágono y el cuadrado, ambos regulares con lado 40 cm, o lo que es lo mismo, 4 dm.

Llama la atención la diferencia de tamaño entre las superficies que cubren ambos.

Empecemos por el hexágono:

En un hexágono regular es posible inscribir siete circunferencias tangentes. Si lo hacemos en uno con lado 4 dm y medimos el radio de las circunferencias, veremos que mide 1.14 dm, mayor que el de un plato (1.1 dm), con lo que podemos asegurar que cubriría siete platos.

Pasamos al cuadrado:

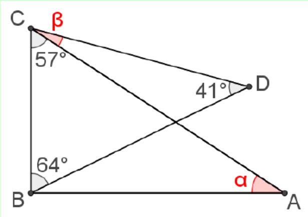
Es imposible que llegue a cubrir cuatro platos, porque deberían tener como máximo un radio de 1 dm, menor que el de los platos.

Es posible cubrir dos, pero no tres.

21*

En la figura adjunta, sabemos que el segmento AB es perpendicular al BC. También conocemos las medidas de los ángulos ACB = 57°, CBD = 64° y BDC = 41°. ¿Cuánto miden los ángulos α y β?

22



Solución:

Para calcular la amplitud de α tendremos en cuenta los datos del triángulo ABC, del que sabemos que el ángulo en C es de 57° y es recto en B:

α=$180° - 90° - 57° = 33°$

Para β usamos el triángulo BCD:

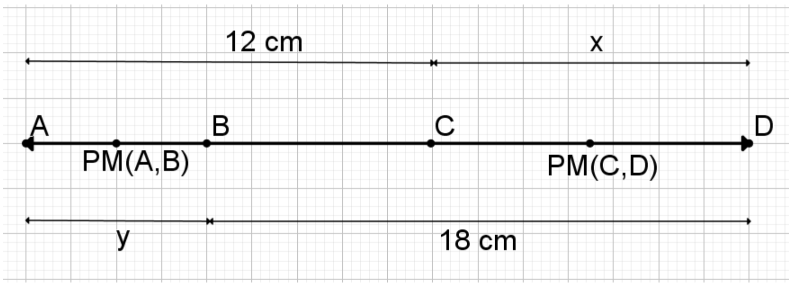
$$180° = 64° + 41° + 57° + \beta \quad \rightarrow \quad \beta = 18°$$

24**

Los puntos A, B, C y D están colocados en ese orden sobre una recta. La distancia de A a C es de 12 cm y la distancia de B a D es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia entre el punto medio de AB y el punto medio de CD?

25

Solución:



Llamaremos x a la distancia entre C y D, e y a la distancia entre A y B. Se cumple:

$$12 + x = y + 18 \quad \rightarrow \quad x = y + 6$$

La distancia pedida:

$$d\big(PM(A,B), PM(C,D)\big) = d(A,D) - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = y + 18 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} =$$

$$= y + 18 - \frac{y+6}{2} - \frac{y}{2} = 15\ cm$$

26***

En un grupo de hombres y mujeres la edad media es 31 años. Si la media de la edad de los hombres es 35 años y la de las mujeres es 25, calcula el cociente entre el número de hombres y el de mujeres.

27

Solución:

Llamando m al número de mujeres y h al número de hombres, la media será:

$31 = \frac{35h + 25m}{h+m}$ luego resulta que $35h + 25m = 31\ (h + m)$.

Así pues, $4h = 6m$, con lo que el cociente pedido es $\frac{h}{m} = \frac{3}{2}$

28**

¿Cuántas cifras tiene el número $32^{33} \cdot 125^{55}$?

Solución:

$$32^{33} \cdot 125^{55} = (2^5)^{33} \cdot (5^3)^{55} = 2^{165} \cdot 5^{165} = 10^{165}$$

Por lo que el número está formado por un uno y 165 ceros, es decir, tiene 166 cifras.