

SOLUCIONS · FEBRER 2025

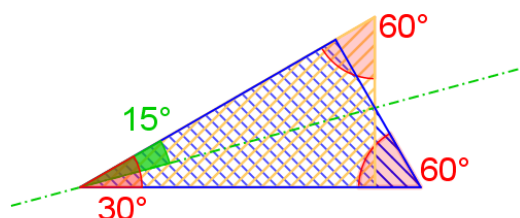
1*

Un cartabó té forma de triangle rectangle amb un angle de 30° i un altre de 60° .

Usant el cartabó i sense ajuda d'altres instruments, construeix un angle de 15° .



Solució:

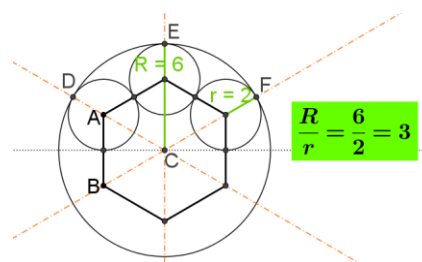
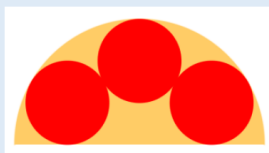


3 ggb

4

En la figura adjunta hi ha una semicircumferència i tres circumferències iguals, tangents entre si com s'indica.

Calcula la proporció entre el radi de la semicircumferència i el radi de les circumferències.



Solució amb geogebra:

Per començar el dibuix, és més fàcil considerar els centres dels cercles rojos com els vèrtexs d'un hexàgon.

Passos a seguir:

1. Tracem el segment AB corresponent al costat de l'hexàgon, i amb polígon regular el tracem.
2. Trobem els punts mitjans dels costats de l'hexàgon, i amb centre en un vèrtex i passant pel punt mitjà del segment corresponent aconseguim els tres cercles. També podríem traçar-ne un i per rotació de 60° els altres.

3. Per traçar la circumferència exterior, trobem el centre de l'hexàgon i tracem les tres rectes que passen per aquest punt i per cadascun dels centres dels cercles. Amb intersecció, els tres punts D, E i F, i amb ells i circumferència per tres punts ja la tenim.
4. Tracem un segment corresponent a cadascun dels radis: R per al major i r per al menor.
5. Sempre obtindrem que R és el triple que r , siga quina siga la grandària del nostre dibuix.

5**

6

Completa la taula amb tres números, de manera que cadascun dels números de les tres caselles centrals siga la mitjana aritmètica del número situat a la seua esquerra i el situat a la dreta.

	48			6
--	----	--	--	---



Solució:

Anomenarem x, y, z als tres números desconeguts:

x	48	y	z	6
-----	----	-----	-----	---

Aleshores es compleix que

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 48 \\ \frac{48+z}{2} = y \\ \frac{y+6}{2} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = 96 \\ 48+z = 2y \\ y+6 = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = 96 \\ 48+z = 2(2z-6) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = 96 \\ 60 = 3z \end{cases} \rightarrow$$

$$z = 20 \rightarrow y = 2 \cdot 20 - 6 = 34 \rightarrow x = 96 - 34 = 62$$

La taula quedarà així:

62	48	34	20	6
----	----	----	----	---

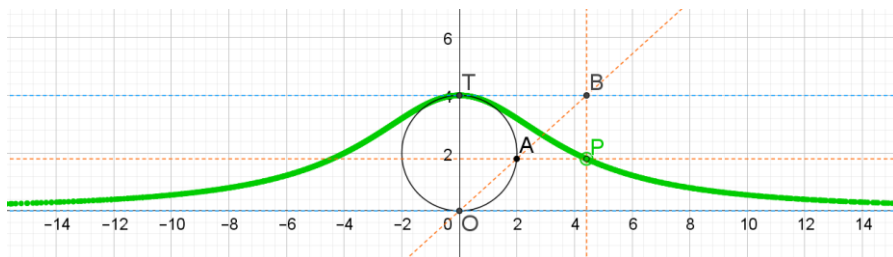
7 ggb

8

Investiga com es genera la corba anomenada "bruixa d'Agnesi" i dibuixa-la amb geogebra. Saps per què es diu així?



Solució:



Aquesta corba va ser estudiada per Pierre de Fermat el 1630, per Luigi Guido Grandi el 1703 i per Maria Gaetana Agnesi el 1748.

Grandi va anomenar a la corba *versoria*, del llatí *vertere*, que significa virar o girar; *versiera* en italià és un terme naval que identifica el cap o corda que fa girar la vela. Maria Gaetana Agnesi es va referir a aquesta corba com *la versiera*, afegint-li l'article femení *la*; d'aquesta manera, *la versiera di Agnesi* significa *la corba d'Agnesi*.

Els estudis d'Agnesi sobre aquesta corba van ser traduïts a l'anglès pel professor de la Universitat de Cambridge John Colson, qui, degut al escàs coneixement que tenia de l'italià, va confondre *versiera* amb *avversiera*, que en italià significa 'diablessa', 'dimoni femení'. Per això va traduir el terme a l'anglès com a *witch* (fetillera, bruixa), i aquesta anècdota ha fet que molt sovint s'haja anomenat "bruixa" a aquesta corba. En altres idiomes es parla de *loci* (en llatí, 'llocs' geomètrics) *d'Agnesi*. En italià es denomina *versiera*, com ha de ser.

Es tracta d'una corba oberta que **es construeix de la forma següent:**

A partir d'una circumferència, i un punt qualsevol **O** de la circumferència, essent **T** el punt diametralment oposat a **O**. Per a qualsevol altre punt **A** de la circumferència, la prolongació de la línia secant **OA** talla la perpendicular a **OT** que passa per **T** en **B**. La línia paral·lela a **OT** que passa per **B**, i la línia perpendicular a **OT** que passa per **A** es tallen en **P**. Prenent com a variable el punt **A**, es defineix el conjunt de punts **P** pertanyents a la corba buscada, la *bruixa d'Agnesi*.

Per obtenir la gràfica de la funció amb geogebra cal activar el rastre del punt P.

10****11**

Direm que un nombre de quatre xifres és afortunat si totes les xifres són diferents i la suma de les dues primeres és igual a la suma de les dues últimes (com, per exemple, el 3140). Troba el nombre primer més petit que no té un múltiple de quatre xifres afortunat.

**Solució:**

Busquem nombres afortunats divisibles pels successius nombres primers:

$$\overline{abcd} : 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

on utilitzem el símbol $\overline{abcd}$ per indicar que el nombre $\overline{abcd}$ és divisible per 2, 3, 5...

I estudiant els diferents nombres primers trobem que:

$$5014 : 2 \quad 1890 : 3 \quad 2680 : 5 \quad 1890 : 7$$

El següent nombre primer és l'11. Demostrarem que no hi ha nombres afortunats de quatre xifres múltiples d'11:

$$\begin{cases} a + c - b - d = 11k & k \in \mathbb{Z} \\ a + b = c + d & a \neq b \neq c \neq d \end{cases}$$

Restant les dues equacions:

$$c - b - b - d = 11k - c - d \Leftrightarrow 2(c - b) = 11k, \text{ donde } b, c \in [0, 9] \text{ y } b \neq c, \text{ la qual cosa no és possible.}$$

Per tant, el nombre primer més petit que no té cap múltiple de quatre dígit que siga afortunat és l'11.

12*

Tenim una balança amb cinc peses de 3, 6, 8, 12 i 16 grams.

Tenim 33 objectes que pesen, respectivament, 1, 2, 3, ..., 33 grams. Només un dels objectes no es pot equilibrar amb les cinc peses. Quin és?

13**Solució:**

Objecte a pesar (gr.)	Braç esquerre balança	Braç dret balança
1	1	1
2	2+6	8
3	3	3
4	4+8	12
5	5+3	8
6	6	6
7	7+12	3+16
8	8	8
9	9	3+6
10	10+6	16
11	11	3+8
12	12	12
13	13+3	16
14	14	6+8
15	15	3+12
16	16	16
17	17+3	8+12
18	18	6+12
19	19	3+16
20	20	8+12
21	21	3+6+12
22	22	6+16
23	23	3+8+12
24	24	8+16
25	25	3+6+16
26	26	6+8+12
27	27	3+8+16
28	28	12+16
29	29	3+6+8+12
30	30	6+8+16
31	31	3+12+16
32		
33	33	3+6+8+16

L'únic objecte que no es pot equilibrar és el de 32 grams.

14***

Un quadrat perfecte té quatre xifres. Les dues primeres són iguals entre si. Les dues últimes són iguals entre si. De quin número es tracta?

15**Solució:**

El quadrat perfecte serà de la forma:

$$aabb = a \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + b = a \cdot 1100 + b \cdot 11 = 11(100a + b)$$

Com $aabb$ ha de ser un quadrat perfecte, ha de passar que $100a + b$ ha de ser el producte d'11 per un quadrat perfecte.

Però $100a + b = a0b$, per la qual cosa $a0b$ serà el producte d'11 per un quadrat perfecte, i s'ha de tenir en compte que ha de ser de tres xifres i la segona és 0.

Les opcions que tenim són:

$4^2 \cdot 11 = 16 \cdot 11 = 176$	$5^2 \cdot 11 = 25 \cdot 11 = 275$
$6^2 \cdot 11 = 36 \cdot 11 = 396$	$7^2 \cdot 11 = 49 \cdot 11 = 539$
$8^2 \cdot 11 = 64 \cdot 11 = 704$	$9^2 \cdot 11 = 81 \cdot 11 = 891$

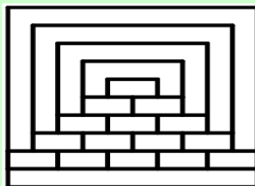
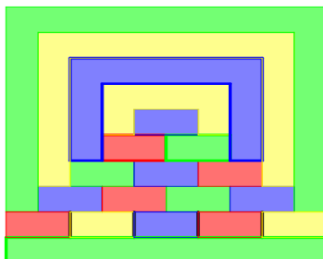
L'únic cas que compleix els requisits és

$$8^2 \cdot 11 = 64 \cdot 11 = 704$$

Per tant, $a0b=704$, i concloem que $a=7$ i $b=4$. A més, $7744=88^2$

17*

Pinta la figura amb el menor nombre de colors possible, de manera que dos sectors entre els quals hi ha contacte han de ser de diferents colors.

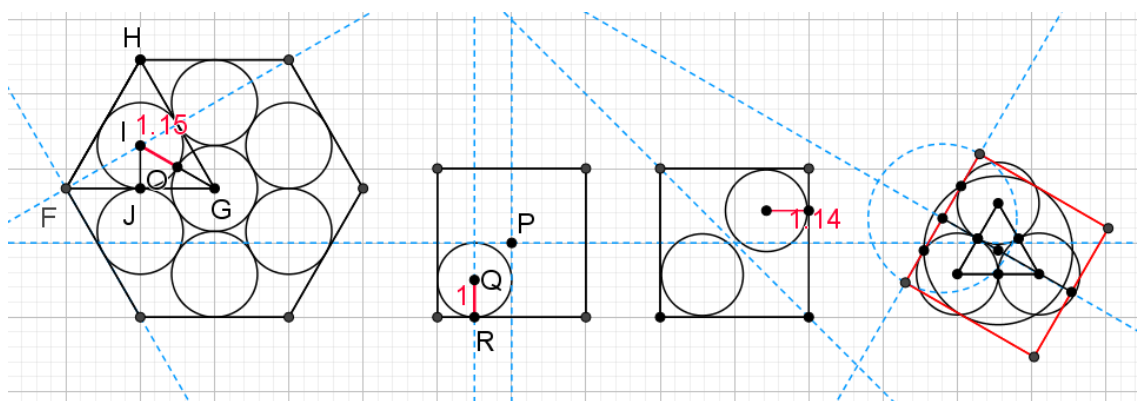
18**Solució:**

19 ggb**20**

Vull comprar un cobreplats com el de la imatge. A la botiga m'han ensenyat, a més del de base quadrada, un de base hexagonal, tots dos amb 40 cm de costat de la base. Els meus plats mesuren 22 cm de diàmetre. Quants plats pot cobrir cadascun dels models de cobreplats?



Solució amb geogebra:



Per resoldre el problema, dibuixarem l'hexàgon i el quadrat, tots dos regulars amb costat 40 cm o, el que és el mateix, 4 dm.

Crida l'atenció la diferència de mida entre les superfícies que cobreixen tots dos.

Comencem per l'hexàgon:

En un hexàgon regular és possible inscriure set circumferències tangents. Si ho fem en un amb costat 4 dm i mesurem el radi de les circumferències, vorem que mesura 1.14 dm, més gran que el d'un plat (1.1 dm), de manera que podem assegurar que cobriria set plats.

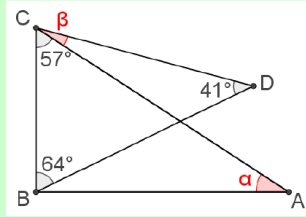
Passem al quadrat:

És impossible que arribi a cobrir quatre plats perquè haurien de tenir com a màxim un radi d'1 dm, menor que el dels plats.

És possible cobrir-ne dos, però no tres.

21*

En la figura adjunta, sabem que el segment AB és perpendicular al BC. També coneixem les mesures dels angles $\angle ACB = 57^\circ$, $\angle CBD = 64^\circ$ i $\angle BDC = 41^\circ$. Què mesuren els angles α i β ?

22**Solució:**

Per calcular l'amplitud d' α tindrem en compte les dades del triangle ABC, del qual sabem que l'angle a C és de 57° i que és recte a B:

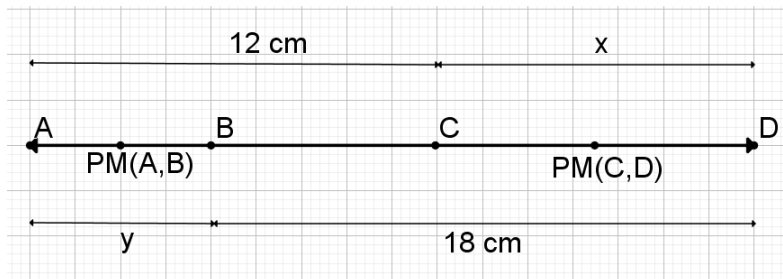
$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$$

Per a β usem el triangle BCD:

$$180^\circ = 64^\circ + 41^\circ + 57^\circ + \beta \rightarrow \beta = 18^\circ$$

24**

Els punts A, B, C i D estan col·locats en aquest ordre sobre una recta. La distància d'A a C és de 12 cm i la distància de B a D és de 18 cm. Quina és la distància entre el punt mitjà d'AB i el punt mitjà de CD?

25**Solució:**

Anomenarem x a la distància entre C i D, i y a la distància entre A i B. Es compleix:

$$12 + x = y + 18 \rightarrow x = y + 6$$

La distància demanada:

$$\begin{aligned} d(PM(A,B), PM(C,D)) &= d(A,D) - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = y + 18 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \\ &= y + 18 - \frac{y+6}{2} - \frac{y}{2} = 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

26***

En un grup d'homes i dones l'edat mitjana és 31 anys. Si la mitjana de l'edat dels homes és 35 anys i la de les dones és 25, calcula el quocient entre la quantitat d'homes i el de dones.

27**Solució:**

Anomenant m a la quantitat de dones i h a la quantitat d'homes, la mitjana serà:

$$31 = \frac{35h + 25m}{h+m}. \text{ Aleshores: } 35h + 25m = 31(h + m).$$

Així, doncs, $4h = 6m$, amb la qual cosa el quocient que es demana és $\frac{h}{m} = \frac{3}{2}$

28**

Quantes xifres té el número $32^{33} \cdot 125^{55}$?

**Solució:**

$$32^{33} \cdot 125^{55} = (2^5)^{33} \cdot (5^3)^{55} = 2^{165} \cdot 5^{165} = 10^{165}$$

Per la qual cosa el número està format per un u i 165 zeros, és a dir, té 166 xifres.