SOLUCIONES · MARZO 2025

1*

El año 2025 comienza y termina en miércoles.
¿Cuántos años hace que esto no ocurría? ¿Qué año fue?
¿Y en qué año volverá a suceder la próxima vez?

SOLUCIÓN:

Para resolver el problema debemos tener en cuenta si el año es o no bisiesto. Siempre que no lo sea, empieza y termina el mismo día de la semana. Si es bisiesto, acabará un día más tarde de lo que empezó.

Empezamos con el año 2025. Si empezó miércoles, el anterior terminó en martes. Al ser bisiesto, empezó un día antes, lunes.

Año	Bisiesto	Empieza	Termina
2025		Miércoles	Miércoles
2024	X	Lunes	Martes
2023		Domingo	Domingo
2022		Sábado	Sábado
2021		Viernes	Viernes
2020	X	Miércoles	Jueves
2019		Martes	Martes
2018		Lunes	Lunes
2017		Domingo	Domingo
2016	X	Viernes	Sábado
2015		Jueves	Jueves
2014		Miércoles	Miércoles

La vez anterior en que el año empezó y terminó en miércoles fue en el 2014, hace 11 años.

Veamos cuándo volverá a pasar:

Año	Bisiesto	Empieza	Termina
2025		Miércoles	Miércoles
2026		Jueves	Jueves
2027		Viernes	Viernes
2028	X	Sábado	Domingo
2028		Lunes	Lunes
2030		Martes	Martes
2031		Miércoles	Miércoles

El próximo año que empiece y acabe en miércoles será el 2031.

3 ggb 4

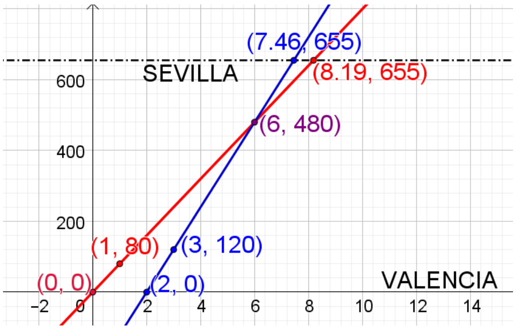
La distancia entre Valencia y Sevilla es de 655 km. A las 00:00 h sale un expreso desde Valencia hacia Sevilla a una velocidad de 80 km/h. Dos horas después, sale el Talgo a una velocidad de 120 km/h.
¿En qué momento alcanza al expreso?
¿A qué distancia de Valencia?
¿A qué hora llega cada tren a Sevilla?

SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Para resolverlo haremos una gráfica relacionando el tiempo transcurrido con la distancia recorrida para ambos trenes.

Antes que nada, cambiaremos en las propiedades de la vista gráfica el intervalo para el eje de ordenadas, ya que la distancia recorrida es de 655 Km. La pondremos entre -10 y 700.

1. El expreso (en rojo) sale a las 0 horas y una hora después ha recorrido 80 km. Introducimos los puntos (0,0) y (1,80) y trazamos la recta que los une para saber el espacio recorrido en función del tiempo transcurrido.



2. El talgo (en azul) sale a las 2:00 y una hora después ha recorrido 120 km. Los puntos a introducir serán el (2,0) y el (3,120). Igual que antes, trazamos la recta que los une.
3. Con la intersección de ambas rectas obtenemos el momento en que el talgo alcanza al expreso (6,480). Lo que nos dice que a las 6:00 h el expreso es alcanzado por el talgo, a una distancia de 480 km de Valencia.
4. Para saber la hora de llegada de cada tren a Sevilla, introducimos la recta y=655. El talgo la corta (intersección) en el punto (7.458333, 655), donde el valor de la abscisa nos indica la hora de llegada: 7.458333 h. O lo que es lo mismo, 7:27:30 h.
5. Con el expreso, el punto es (8.1875, 655), es decir, llega a las 8.1875 h. Pasado a minutos y segundos, 8:11:15 h.

5** **6**

He comprado 6 flores del mismo color y quiero repartirlas entre cuatro jarrones de cristal, todos iguales, sin que ninguno quede vacío. ¿De cuántas formas puedo hacerlo?

SOLUCIÓN:

Método 1:

De 10 formas distintas. Equivale a repartir las 6 flores en 4 grupos, poniendo las 3 líneas que los separan en los huecos entre las flores. Por ejemplo, una solución es:

❁| ❁❁| ❁❁| ❁ => 1 – 2 – 2 – 1.

Equivale, por tanto, a calcular el número combinatorio 5 sobre 3.

Método 2:

Se puede resolver encontrando exhaustivamente todas las formas. Dado que en todos debe haber al menos una flor, quedan dos flores por colocar, que pueden ir las dos juntas en uno de los jarrones o separadas en dos distintos:

1	❁❁❁	❁	❁	❁
2	❁	❁❁❁	❁	❁
3	❁	❁	❁❁❁	❁
4	❁	❁	❁	❁❁❁
5	❁❁	❁❁	❁	❁
6	❁❁	❁	❁❁	❁
7	❁❁	❁	❁	❁❁
8	❁	❁❁	❁❁	❁
9	❁	❁❁	❁	❁❁
10	❁	❁	❁❁	❁❁

Método 3:

Teniendo en cuenta que en todos los jarrones debe haber al menos una flor, nuestro trabajo sería contar todas las formas de distribuir las dos flores restantes y los tres huecos que separarían los jarrones.

Es decir, tenemos cinco elementos (flores y huecos) de los que hay repetidos (2 y 3 respectivamente) y queremos saber las distintas formas de ordenarlos. Es decir, debemos calcular las permutaciones con repetición de 5 elementos tomados 2 de un tipo y 3 del otro:

$PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ formas

7 ggb 8

En mi jardín tengo 18 plantas de sandía que producen una media de 20 sandías cada una. Por cada planta más que plante, la producción media de cada una disminuye en una sandía. ¿Cuántas plantas de sandía me interesa tener para una producción máxima?

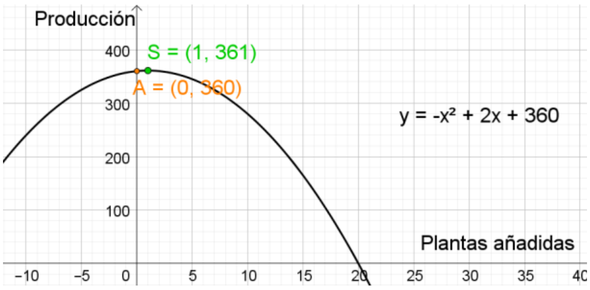
SOLUCIÓN:

Llamaremos x a la cantidad de plantas de sandía que añadiremos a las 40 para obtener una producción máxima.

La función que nos dará la producción de sandías es el resultado de multiplicar el número de plantas $(40 + x)$ por la producción media de cada planta $(20 - x)$:

$$f(x) = (18 + x) \cdot (20 - x) = 360 + 2x - x^2$$

Introduciremos la función en la barra de entrada de geogebra para saber el valor de x que nos dará la producción máxima.



Obtenemos que, en las condiciones iniciales, con 18 plantas la producción sería de 360 sandías, mientras que, si añadimos una planta más, la producción será la máxima con 361 sandías.

Nos interesa tener 19 plantas.

10** 11

Llamamos *bueno* a un conjunto de números si lo podemos dividir en dos subconjuntos cuyas sumas coincidan.

a) ¿Es bueno $\{200, 201, \ldots, 299\}$?

b) ¿Cuántos subconjuntos buenos de cuatro elementos podemos obtener de $\{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$?

SOLUCIÓN:

a) Los números del conjunto determinan una progresión aritmética. Sabemos que los términos equidistantes de una progresión aritmética suman lo mismo. Así las parejas (200, 299), (201, 298), (202, 297), ..., (249, 250), son 50 parejas que todas suman 499. Sea A1 el

subconjunto formado por los números de las 25 primeras parejas, y A2 el subconjunto formado por el resto de números:
$A_1 = \{200, 299, 201, 298, \ldots\ldots, 224, 275\}$
$A_2 = \{225, 274, 226, 273, \ldots\ldots, 249, 250\}$
$A = A_1 \cup A_2$

Por lo tanto, el conjunto A es *bueno*.

b) Un subconjunto de cuatro elementos es *bueno* en dos casos: o un número es igual a la suma de los otros tres, o bien el conjunto contiene dos parejas de números con la misma suma.

Subconjuntos del conjunto {1, 2, 4, 5, 7, 9, 11} que cumplen el primer caso son:
{1, 2, 4, 7} y {2 ,4 ,5 ,11}.

En el segundo caso observamos que, si el conjunto contiene dos parejas de números con sumas iguales, entonces la suma de los cuatro es par. Esto quiere decir que los números 2 y 4 se encuentran ambos en el subconjunto de cuatro elementos *bueno* o no están a la vez porque la suma de tres impares y un par siempre será impar.
Si el 2 y el 4 están en el subconjunto, entonces la suma de los otros dos números es 6, {1, 2, 4, 5}, o también la diferencia de los otros dos es 2: {2, 4, 5, 7}; {2, 4, 7, 9}; {2, 4, 9, 11}.
Si el 2 y el 4 no están en el subconjunto, entonces un subconjunto *bueno* se encuentra en el conjunto {1,5,7,9,11}. Obtenemos dos *buenos* más: {1, 5 ,7, 11} y {5, 7, 9, 11}.

En total son 8.

12* 13

Tenemos tres cartas de una baraja francesa en fila. A la derecha de un rey hay una o dos damas. A la izquierda de una dama hay una o dos damas. A la derecha de una pica hay una o dos picas. A la izquierda de un corazón hay una o dos picas. ¿Cuáles son las tres cartas?

SOLUCIÓN:

La forma de conseguir la disposición de rey y damas que pone el enunciado, será que aparezcan:

Rey	Dama	Dama

Para las picas y los corazones

Pica	Pica	Corazón

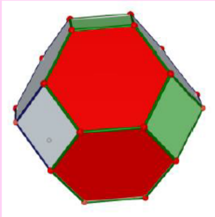
Por lo tanto, las cartas son:

14*** **15**

La figura es un octaedro truncado.

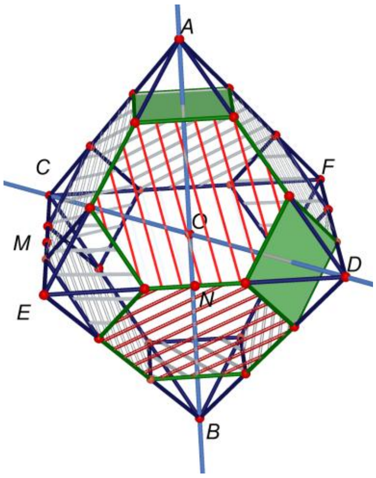
a) Calcula el ángulo que forman dos caras hexagonales con arista común.

b) Si la arista es 1, calcula el volumen del octaedro truncado.



SOLUCIÓN:

Consideramos el octaedro circunscrito al octaedro truncado.



Sea 1 la arista del octaedro truncado.

a)

Sea O el centro del octaedro regular.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{CE}$

Sea N el punto medio de la arista $\overline{DE}$

$$\overline{AM} = \overline{AN} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \overline{ON} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{OA} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Sea $\alpha = \angle ONA$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{ON}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}$$

El ángulo que forman las dos caras hexagonales es 2α

$$\tan 2\alpha = -2\sqrt{2}$$

$$2\alpha = \text{arc}\tan\left(-2\sqrt{2}\right) \approx 109°28'16"$$

b)

El volumen del octaedro truncado es igual al volumen de dos pirámides CEDFA menos el volumen de seis pirámides parecidas al anterior de razón 3:1.

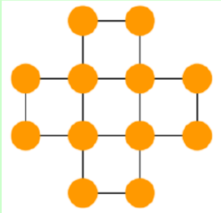
El volumen del octaedro regular de arista 3 es:

$$V_{\text{octaedro regular}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$$

$$V_{\text{octaedro truncado}} = 9\sqrt{2} - 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot 9\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

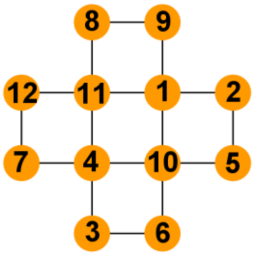
17* 18

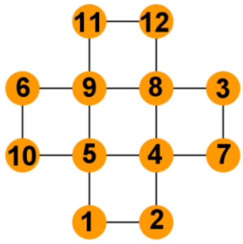
Coloca los números del 1 al 12 en los círculos de la figura, de modo que los cuatro vértices de los rectángulos largos, los cuatro vértices del cuadrado central y las cuatro líneas de cuatro círculos sumen lo mismo.

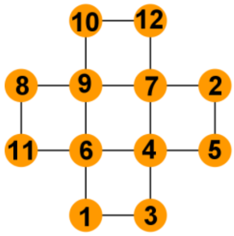


SOLUCIÓN:

La solución no es única. Algunas de las posibles son:

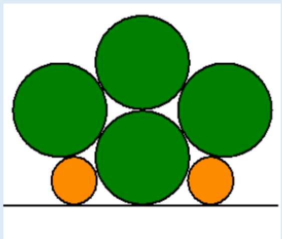






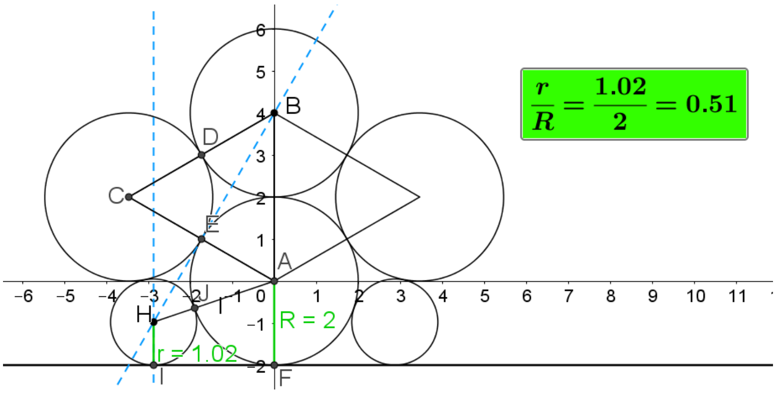
19 ggb 20

En la figura adjunta vemos seis circunferencias de dos tamaños distintos, tangentes entre sí tres a tres. Las tres inferiores también son tangentes a una recta.
Calcula la proporción entre el radio de las circunferencias pequeñas y el de las grandes.



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Método 1 (Aproximado)



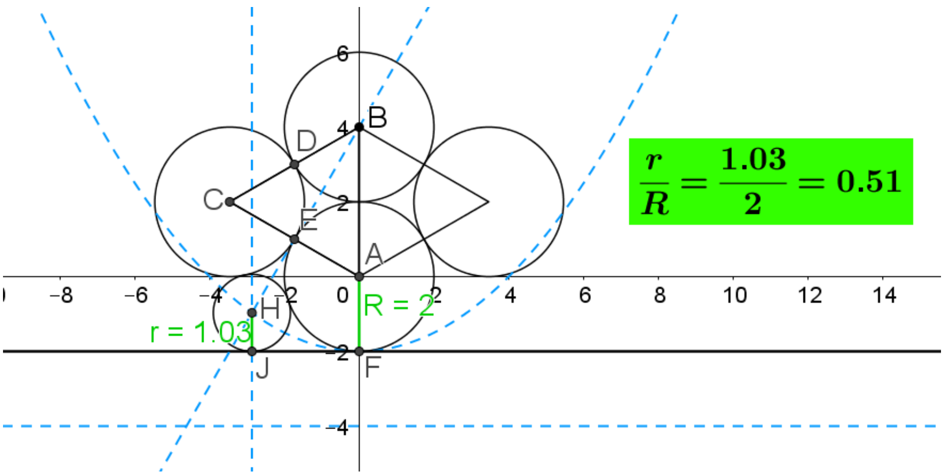
$$\frac{r}{R} = \frac{1.02}{2} = 0.51$$

1. Lo primero para dibujar las circunferencias grandes es darnos cuenta de que los centros de las cuatro están en los vértices de un rombo formado por la unión de dos

triángulos equiláteros. Para hacerlos, dibujamos el segmento AB con extremos en A(0,0) y B(0,4). Con polígono regular trazamos los equiláteros.

2. Para trazar las circunferencias necesitamos un punto además del centro. Son los puntos medios de los lados del rombo. (Podemos dibujar las cuatro circunferencias de una en una o usando traslaciones y/o simetrías a partir de la primera, las demás).
3. La recta tangente de la base la dibujamos con recta tangente por el punto de intersección del eje de ordenadas con la circunferencia inferior de las cuatro.
4. El centro de la circunferencia pequeña de la izquierda se encuentra sobre la recta tangente a las dos circunferencias que la tocan.
5. Marcamos un punto sobre esta recta (el H) y la recta perpendicular al eje de abscisas que pase por él. La intersección de esta recta con la horizontal (punto I) también pertenece a la circunferencia.
6. Trazamos la circunferencia con centro en H que pase por I.
7. Movemos el punto H hasta que la circunferencia sea tangente a las dos grandes.
8. Marcamos los dos segmentos correspondientes a los radios de los dos tipos de circunferencia r y R.
9. El cociente es $\frac{r}{R} = 0.51$

Método 2 (Exacto)



Los cuatro primeros pasos iguales que en el método 1.

5. El centro de la circunferencia pequeña también está sobre la parábola con foco en el punto A y vértice en el F. Para trazar la parábola necesitamos la directriz, que podemos obtener con una simetría del eje de abscisas respecto a la recta base del dibujo.
6. El punto de intersección de la recta tangente del punto 4 y la parábola del 5 será el centro de la circunferencia.
7. Para hallar un punto de la circunferencia, tenemos en cuenta que la circunferencia es tangente a la recta base del dibujo, y por tanto la perpendicular a la base por el centro de la circunferencia corta a la recta de la base en un punto de la circunferencia. Trazamos la circunferencia con centro en H que pase por J.

8. Marcamos los dos segmentos correspondientes a los radios de los dos tipos de circunferencia r y R.
9. El cociente es $\frac{r}{R} = 0.51$

SOLUCIÓN ANALÍTICA:

Sean K, L, M los centros de las tres circunferencias iguales de radio

$\overline{KT} = \overline{KB} = R$

Sea P el centro de la circunferencia pequeña de radio $\overline{PA} = r$

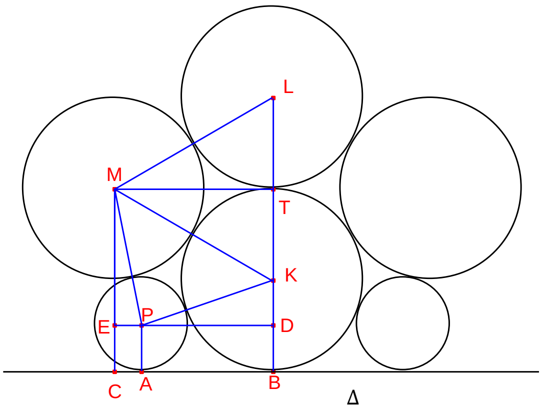
El triángulo $\overset{\Delta}{KLM}$ es equilátero.

$\overline{MT} = R\sqrt{3}$

Sea C la proyección de M sobre la recta inferior.

Sea D la proyección de P sobre la recta KL.

Sea E la proyección de P sobre la recta MC.



$\overline{PK} = R + r, \overline{DK} = R - r$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PDK}$:

$\overline{PD} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$

$\overline{PE} = \overline{MT} - \overline{PD} = R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr}$

$\overline{MP} = R + r, \overline{ME} = \overline{TB} - \overline{PA} = 2R - r$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MPE}$:

$(R+r)^2 = (2R-r)^2 + \left(R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr}\right)^2$

Simplificando:

$4\sqrt{3}\sqrt{Rr} = 6R - 2r$

Elevando al cuadrado:

$r^2 - 18Rr + 9R^2 = 0$

Dividiendo por R^2:

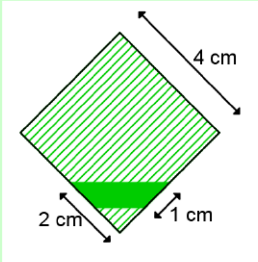
$\frac{r^2 - 18Rr + 9R^2}{R^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 18\frac{r}{R} + 9 = 0$

Resolviendo la ecuación:

$\frac{r}{R} = 9 - 6\sqrt{2} \cong 0.51$

21* **22**

Calcula el área de la superficie rayada en el cuadrado de la figura adjunta.



SOLUCIÓN:

Método 1:

Si al área del triángulo rectángulo cuyos catetos 2 cm le restamos la del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 cm, obtenemos el área de la superficie coloreada

$A_{coloreada} = \frac{2\cdot2}{2} - \frac{1\cdot1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} cm^2$

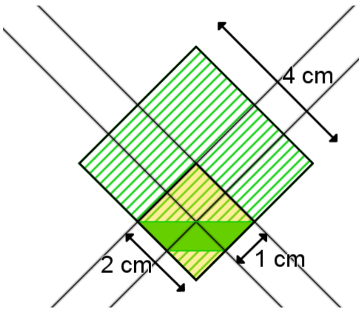
El área que buscamos se obtiene restando al área del cuadrado el área de la zona coloreada:

$$A_{rayada} = 4^2 - \frac{3}{2} = 16 - \frac{3}{2} = \frac{29}{2}\ cm^2 = 14{,}5\ cm^2$$

Método 2:

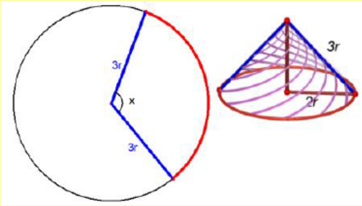
Trazando paralelas a los lados del cuadrado podemos ver que la franja verde ocupa en el cuadrado amarillo, formado a su vez por cuatro cuadrados más pequeños, uno y medio de esos cuadraditos. Es decir, si el cuadrado amarillo ocupa 4 cm^2, la zona verde ocupa 1.5 cm^2.

Por lo tanto, la zona rayada ocupa $16 - 1.5 = 14.5$ cm^2



24**/31 25

Recortando de un círculo de radio $3r$ un sector circular de ángulo x y enrollando se construye un cono de radio $2r$ y generatriz $3r$.
Calcula la medida del ángulo x.



SOLUCIÓN:

El arco de circunferencia resultante de cortar el sector de ángulo x (es decir, el sector de ángulo $2\pi - x\ rad$) es igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono:

El arco de una circunferencia se puede medir multiplicando el radio por el ángulo abarcado en radianes (Arco = radio · radianes).

Igualando el arco a la longitud de la circunferencia de la base del cono obtenemos:

$$3r \cdot (2\pi - x) = 2\pi \cdot 2r \quad \rightarrow \quad 2\pi - x = \frac{4\pi}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}\, rad \equiv 120°$$

26*** 27

El otro día, en una tienda de mi barrio, compré dos artículos. Antes de pagar calculé mentalmente que me costaban en total 4 € y 5 céntimos. El tendero, al hacer la cuenta con su calculadora, apretó, por descuido, la tecla $\boxed{x}$ en lugar de la tecla $\boxed{+}$. Iba a protestar cuando vi que en la pantalla ponía 4.05. ¡Qué coincidencia!

¿Cuánto valía cada artículo?

SOLUCIÓN:

Uno vale 2,25 € y el otro 1,80 €.

Se puede obtener el resultado algebraicamente a partir del sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} a+b=4.05 \\ a\cdot b=4.05 \end{array}\right\}$

Usando sustitución se obtiene: $a \cdot (4.05 - a) = 4.05$ y nos queda la ecuación de segundo grado

$a^2 - 4.05a + 4.05 = 0$ cuya resolución nos da los valores buscados.

También se puede resolver más sencillamente por prueba y error, teniendo en cuenta que el precio de uno de los dos artículos debe terminar en 5 y que su suma es 4,05. Por ejemplo, podemos comenzar calculando el producto de 2,05 por 2, luego de 2,15·1,90 y rápidamente llegamos a la solución correcta.

28**

En un momento del día, la hora coincide con la cuarta parte del tiempo que ha pasado más la mitad del tiempo que falta para acabar el día. ¿Qué hora es en ese momento?

29

SOLUCIÓN:

Llamamos x al tiempo en horas pasado desde el inicio del día.

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{2}(24-x)=x \quad \rightarrow \quad x+2(24-x)=4x \quad \rightarrow \quad 48=5x \quad \rightarrow$$

$$x=\frac{48}{5}=9.6\, horas=9\, horas\ 36\, minutos$$