

SOLUCIONS · MARÇ 2025

1*

L'any 2025 comença i acaba en dimecres.
Quants anys fa que això no passava? Quin any va ser?
I quin any tornarà a succeir la propera vegada?



SOLUCIÓ:

Per resoldre el problema cal tenir en compte si l'any és bixest o no. Sempre que no ho siga, comença i s'acaba el mateix dia de la setmana. Si és bixest, acabarà un dia més tard del que va començar.

Comencem amb l'any 2025. Si va començar dimecres, l'anterior va acabar dimarts. Com era bixest, va començar un dia abans, dilluns.

Any	Bixest	Comença	Acaba
2025		Dimecres	Dimecres
2024	X	Dilluns	Dimarts
2023		Diumenge	Diumenge
2022		Dissabte	Dissabte
2021		Divendres	Divendres
2020	X	Dimecres	Dijous
2019		Dimarts	Dimarts
2018		Dilluns	Dilluns
2017		Diumenge	Diumenge
2016	X	Divendres	Dissabte
2015		Dijous	Dijous
2014		Dimecres	Dimecres

La vegada anterior que l'any va començar i va acabar dimecres va ser el 2014, fa 11 anys.

Vegem quan tornarà a passar:

Any	Bixest	Comença	Acaba
2025		Dimecres	Dimecres
2026		Dijous	Dijous
2027		Divendres	Divendres
2028	X	Dissabte	Diumenge
2028		Dilluns	Dilluns
2030		Dimarts	Dimarts
2031		Dimecres	Dimecres

El proper any que començarà i acabarà dimecres serà el 2031.

3 ggb

4

La distància entre València i Sevilla és de 655 km. A les 00:00 h ix un exprés des de València cap a Sevilla a una velocitat de 80 km/h. Dues hores després, ix el Talgo a una velocitat de 120 km/h.

En quin moment arriba a l'exprés?

A quina distància de València?

A quina hora arriba cada tren a Sevilla?

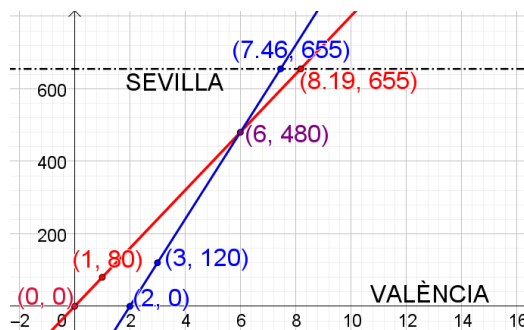


SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Per resoldre'l farem una gràfica relacionant el temps transcorregut amb la distància recorreguda pels dos trens.

Primer de tot, canviarem l'interval per a l'eix d'ordenades en les propietats de la vista gràfica, ja que la distància recorreguda és de 655 Km. La posarem entre -10 i 700.

1. L'exprés (en roig) ix a les 0:00 h i una hora després ha recorregut 80 km. Introduïm els punts (0,0) i (1,80) i tracem la recta que els uneix per saber l'espai recorregut en funció del temps transcorregut.



2. El talgo (en blau) ix a les 2:00 h i una hora després ha recorregut 120 km. Els punts a introduir seran el (2,0) i el (3,120). Igual que abans, tracem la recta que els uneix.
3. Amb la intersecció de les dues rectes obtenim el moment en què el talgo agafa l'exprés (6,480). Açò ens diu que a les 6:00 h l'exprés és agafat pel talgo, a una distància de 480 km de València.
4. Per saber l'hora d'arribada de cada tren a Sevilla, introduïm la recta $y=655$. El talgo la talla (intersecció) al punt (7.458333, 655), on el valor de l'abscissa ens indica l'hora d'arribada: 7.458333 h (o, el que és el mateix, 7:27:30 h).
5. Amb l'exprés, el punt és (8.1875, 655), és a dir, arriba a les 8.1875 h. Passat a minuts i segons, 8:11:15 h.

5****6**

He comprat 6 flors del mateix color i les vull repartir entre quatre gerrons de vidre, tots iguals, sense que cap quede buit. De quantes formes ho puc fer?

**SOLUCIÓ:****Mètode 1:**

De 10 formes diferents. Equival a repartir les 6 flors en 4 grups, posant les 3 línies que els separen als buits que hi ha entre les flors. Per exemple, una solució és:

$$\text{🌸} | \text{🌸🌸} | \text{🌸🌸} | \text{🌸} \Rightarrow 1 - 2 - 2 - 1.$$

Equival, per tant, a calcular el número combinatori 5 sobre 3.

Mètode 2:

Es pot resoldre trobant exhaustivament totes les formes. Atès que en tots ha d'haver-hi almenys una flor, queden dues flors per col·locar, que poden anar les dues juntes en un dels gerros o separades en dues diferents:

1	🌸🌸🌸	🌸	🌸	🌸
2	🌸	🌸🌸🌸	🌸	🌸
3	🌸	🌸	🌸🌸🌸	🌸
4	🌸	🌸	🌸	🌸🌸🌸
5	🌸🌸	🌸🌸	🌸	🌸
6	🌸🌸	🌸	🌸🌸	🌸
7	🌸🌸	🌸	🌸	🌸🌸
8	🌸	🌸🌸	🌸🌸	🌸
9	🌸	🌸🌸	🌸	🌸🌸
10	🌸	🌸	🌸🌸	🌸🌸

Mètode 3:

Tenint en compte que en tots els gerros ha d'haver almenys una flor, la nostra feina seria comptar totes les maneres de distribuir les dues flors restants i els tres buits que separarien els gerros.

És a dir, tenim cinc elements (flors i buits) dels quals hi ha repetits (2 i 3, respectivament) i volem saber les diferents maneres d'ordenar-los. És a dir, cal calcular les permutacions amb repetició de 5 elements agafant 2 d'un tipus i 3 de l'altre:

$$PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ formes}$$

7 ggb**8**

Al meu jardí tinc 18 meloneres d'alger que produeixen una mitjana de 20 síndries cadascuna. Per cada melonera més que plante, la producció mitjana de cadascuna disminueix en una síndria. Quantes meloneres m'interessa tindre per a una producció màxima?

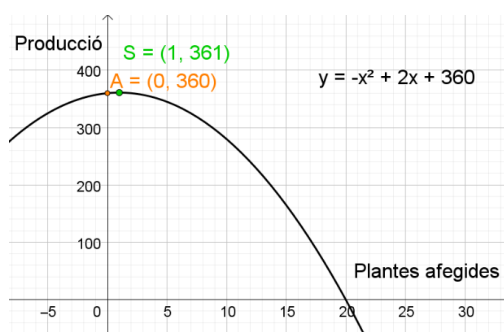
**SOLUCIÓ:**

Anomenarem x a la quantitat de plantes de síndria que afegirem a les 40 per obtenir una producció màxima.

La funció que ens donarà la producció de síndries és el resultat de multiplicar el nombre de plantes $(40 + x)$ per la producció mitjana de cada planta $(20 - x)$:

$$f(x) = (18 + x) \cdot (20 - x) = 360 + 2x - x^2$$

Introduïrem la funció en la barra d'entrada de geogebra per saber el valor de x que ens donarà la producció màxima.



Obtenim que, en les condicions inicials, amb 18 plantes la producció seria de 360 síndries, mentre que, si hi afegim una planta més, la producció serà la màxima amb 361 síndries.

Ens interessa tindre 19 plantes.

10****11**

Anomenem bo un conjunt de números si el podem dividir en dos subconjunts les sumes dels quals coincideixen.

a) És bo $\{200, 201, \dots, 299\}$?

b) Quants subconjunts bons de quatre elements podem obtindre de $\{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$?

**SOLUCIÓ:**

a) Els números del conjunt determinen una progressió aritmètica. Sabem que els termes equidistants d'una progressió aritmètica sumen el mateix. Així, les parelles $(200, 299)$, $(201, 298)$, $(202, 297)$, ..., $(249, 250)$, són 50 parelles que sumen 499. Siga A1 el subconjunt

format pels números de les 25 primeres parelles, i A_2 el subconjunt format per la resta de números:

$$A_1 = \{200, 299, 201, 298, \dots, 224, 275\}$$

$$A_2 = \{225, 274, 226, 273, \dots, 249, 250\}$$

$$A = A_1 \cup A_2$$

Per tant, el conjunt A és *bo*.

b) Un subconjunt de quatre elements és *bo* en dos casos: o un nombre és igual a la suma dels altres tres, o bé el conjunt conté dues parelles de nombres amb la mateixa suma.

Subconjunts del conjunt $\{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ que complixen el primer cas són:

$\{1, 2, 4, 7\}$ i $\{2, 4, 5, 11\}$.

En el segon cas observem que, si el conjunt conté dues parelles de números amb sumes iguals, aleshores la suma dels quatre és parell. Això vol dir que els números 2 i 4 es troben tots dos en el subconjunt de quatre elements *bo* o no estan alhora perquè la suma de tres senars i un parell sempre serà senar.

Si el 2 i el 4 són al subconjunt, aleshores la suma dels altres dos números és 6, $\{1, 2, 4, 5\}$, o també la diferència dels altres dos és 2: $\{2, 4, 5, 7\}$; $\{2, 4, 7, 9\}$; $\{2, 4, 9, 11\}$.

Si el 2 i el 4 no són al subconjunt, aleshores un subconjunt *bo* es troba en el conjunt $\{1, 5, 7, 9, 11\}$. Obtenim dos *bons* més: $\{1, 5, 7, 11\}$ y $\{5, 7, 9, 11\}$.

En total són 8.

12*

13

Tenim tres cartes de baralla francesa en filera. A la dreta d'un rei hi ha una o dues dames. A l'esquerra d'una dama hi ha una o dues dames. A la dreta d'una pica hi ha una o dues piques. A l'esquerra d'un cor hi ha una o dues piques. Quines són les tres cartes?



SOLUCIÓ:

La manera d'aconseguir la disposició de rei i dames que posa l'enunciat serà que estiguen així:

Rei	Dama	Dama
-----	------	------

Per a les piques i els cors:

Pica	Pica	Cor
------	------	-----

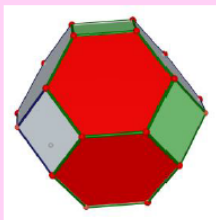
Per tant, les cartes són:



14*****15**

La figura és un octaedre truncat.

- a) Calculeu l'angle que formen dues cares hexagonals amb aresta comuna.
 b) Si l'aresta és 1, calculeu el volum de l'octaedre truncat.

**SOLUCIÓ:**

Considerem l'octaedre circumscrit a l'octaedre truncat.

Siga 1 l'aresta de l'octaedre truncat.

a)

Siga O el centre de l'octaedre regular.

Siga M el punt mitjà de l'aresta $\overline{CE}$

Siga N el punt mitjà de l'aresta $\overline{DE}$

$$\overline{AM} = \overline{AN} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \overline{ON} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{OA} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Siga $\alpha = \angle ONA$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{ON}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}$$

L'angle que formen les dues cares hexagonals és 2α

$$\tan 2\alpha = -2\sqrt{2}$$

$$2\alpha = \arctan(-2\sqrt{2}) \approx 109^\circ 28' 16''$$

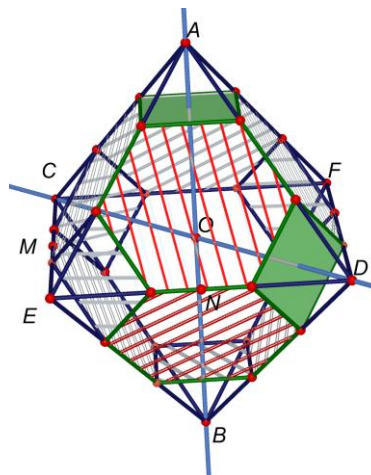
b)

El volum de l'octaedre truncat és igual al volum de dues piràmides CEDFA menys el volum de sis piràmides semblants a l'anterior de raó 3:1.

El volum de l'octaedre regular d'aresta 3 és:

$$V_{\text{octaedre regular}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$$

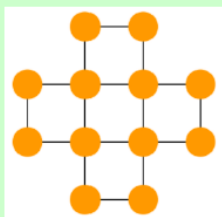
$$V_{\text{octaedre truncat}} = 9\sqrt{2} - 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot 9\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$



17*

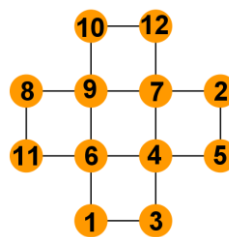
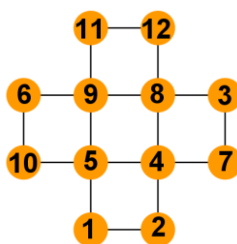
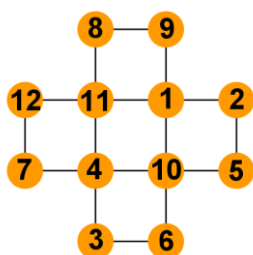
Col·loqueu els números de l'1 al 12 en els cercles de la figura, de manera que els quatre vèrtexs dels rectangles llargs, els quatre vèrtexs del quadrat central i les quatre línies de quatre cercles sumen el mateix.

18



SOLUCIÓ:

La solució no és única. Algunes de les possibles són:

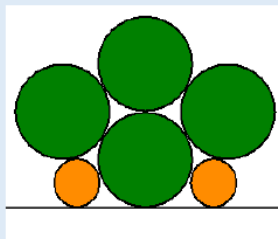


19 ggb

20

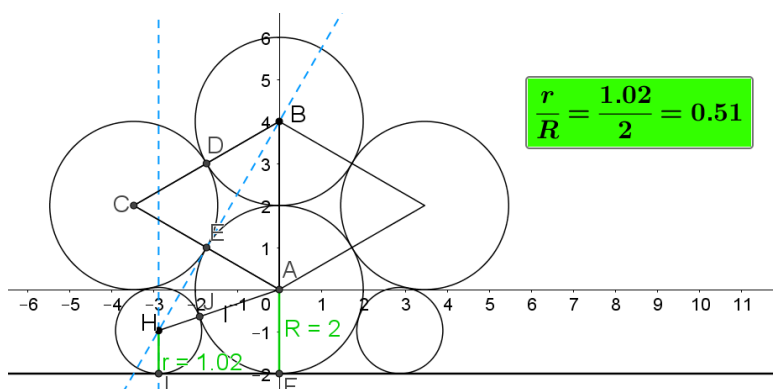
A la figura adjunta veiem sis circumferències de dues mides diferents, tangents entre si tres a tres. Les tres inferiors també són tangents a una recta.

Calculeu la proporció entre el radi de les circumferències menudes i el de les grans.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

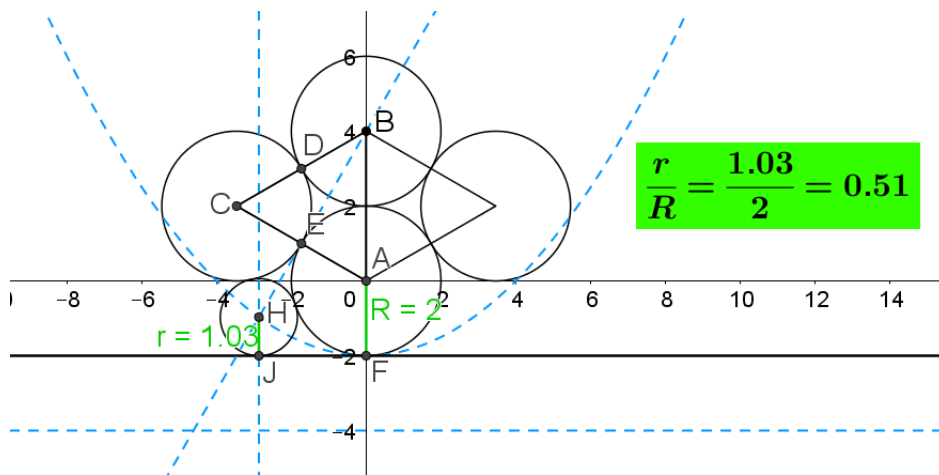
Mètode 1 (aproximat)



1. El primer per dibuixar les circumferències grans és adonar-nos que els centres de les quatre són als vèrtexs d'un rombe format per la unió de dos triangles equilàters.

- Per fer-los, dibuixem el segment AB amb extrems a A(0,0) i B(0,4). Amb polígon regular tracem els equilàters.
- Per traçar les circumferències necessitem un punt a més del centre. Són els punts mitjans dels costats del rombe. Podem dibuixar les quatre circumferències d'una en una o, a partir de la primera, dibuixar les altres usant translacions i/o simetries.
 - La recta tangent de la base la dibuixem amb recta tangent pel punt d'intersecció de l'eix d'ordenades amb la circumferència inferior de les quatre.
 - El centre de la circumferència menuda de l'esquerra es troba sobre la recta tangent a les dues circumferències que la toquen.
 - Marquem un punt sobre aquesta recta (H) i la recta perpendicular a l'eix d'abscisses que hi passa. La intersecció d'aquesta recta amb l'horitzontal (punt I) també pertany a la circumferència.
 - Tracem la circumferència amb centre a H que passa per I.
 - Movem el punt H fins que la circumferència siga tangent a les dues grans.
 - Marquem els dos segments corresponents als radis dels dos tipus de circumferència, r i R .
 - El quocient és $\frac{r}{R} = 0.51$

Mètode 2 (exacte)



Els quatre primers passos iguals que en el mètode 1.

- El centre de la circumferència menuda també és sobre la paràbola amb focus al punt A i vèrtex al F. Per traçar la paràbola necessitem la directriu, que podem obtenir amb una simetria de l'eix d'abscisses respecte a la recta base del dibuix.
- El punt d'intersecció de la recta tangent del punt 4 i la paràbola del 5 serà el centre de la circumferència.
- Per trobar un punt de la circumferència, tenim en compte que la circumferència és tangent a la recta base del dibuix i, per tant, la perpendicular a la base pel centre de la circumferència talla la recta de la base en un punt de la circumferència. Tracem la circumferència amb centre a H que passa per J.
- Marquem els dos segments corresponents als radis dels dos tipus de circumferència r i R .

9. El quocient és $\frac{r}{R} = 0.51$

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Siguen K, L, M els centres de les tres circumferències iguals de radi

$$\overline{KT} = \overline{KB} = R$$

Siga P el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{PA} = r$

El triangle $\triangle KLM$ és equilàter.

$$\overline{MT} = R\sqrt{3}$$

Siga C la projecció de M sobre la recta inferior.

Siga D la projecció de P sobre la recta KL .

Siga E la projecció de P sobre la recta MC .

$$\overline{PK} = R + r, \overline{DK} = R - r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PDK$:

$$\overline{PD} = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

$$\overline{PE} = \overline{MT} - \overline{PD} = R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr}$$

$$\overline{MP} = R + r, \overline{ME} = \overline{TB} - \overline{PA} = 2R - r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MPE$:

$$(R + r)^2 = (2R - r)^2 + (R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr})^2$$

Simplificant:

$$4\sqrt{3}\sqrt{Rr} = 6R - 2r$$

Elevant al quadrat:

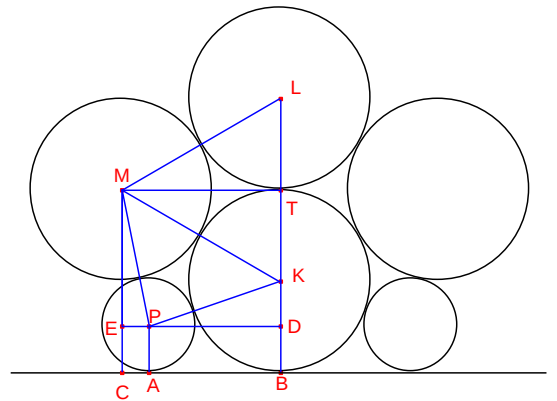
$$r^2 - 18Rr + 9R^2 = 0$$

Dividint per R^2 :

$$\frac{r^2 - 18Rr + 9R^2}{R^2} = 0 \rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 18\frac{r}{R} + 9 = 0$$

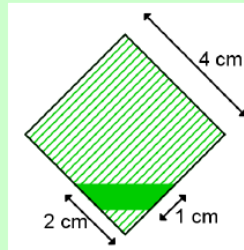
Resolent l'equació:

$$\frac{r}{R} = 9 - 6\sqrt{2} \cong 0.51$$



21*

Calcula l'àrea de la superfície ratllada en el quadrat de la figura adjunta.

22**SOLUCIÓ:****Mètode 1:**

Si a l'àrea del triangle rectangle de catets 2 cm li restem la del triangle rectangle de catets 1 cm, obtenim l'àrea de la superfície acolorida $A_{acolorida} = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ cm}^2$

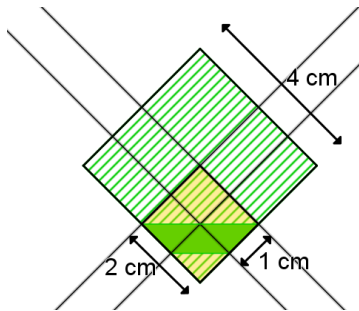
L'àrea que busquem s'obté restant a l'àrea del quadrat l'àrea de la zona acolorida:

$$A_{ratllada} = 4^2 - \frac{3}{2} = 16 - \frac{3}{2} = \frac{29}{2} \text{ cm}^2 = 14,5 \text{ cm}^2$$

Mètode 2:

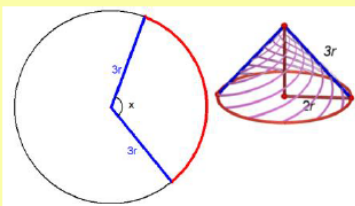
Traçant paral·leles als costats del quadrat podem veure que la franja verda ocupa en el quadrat groc, format per quatre quadrats més menuts, un i mig d'aquests quadrats menuts. És a dir, si el quadrat groc ocupa 4 cm^2 , la zona verda ocupa 1.5 cm^2 .

Per tant, la zona ratllada ocupa $16 - 1.5 = 14.5 \text{ cm}^2$



24/31****25**

Retallant d'un cercle de radi $3r$ un sector circular d'angle x i enrotllant es construeix un con de radi $2r$ i generatriu $3r$.
Calculeu la mesura de l'angle x .

**SOLUCIÓ:**

L'arc de circumferència resultant de tallar el sector d'angle x (és a dir, el sector d'angle $2\pi - x \text{ rad}$) és igual a la longitud de la circumferència de la base del con.

L'arc d'una circumferència es pot mesurar multiplicant el radi per l'angle mesurat en radians (Arc = radi · radians).

Igualant l'arc a la longitud de la circumferència de la base del con obtenim:

$$3r \cdot (2\pi - x) = 2\pi \cdot 2r \rightarrow 2\pi - x = \frac{4\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \equiv 120^\circ$$

26*****27**

L'altre dia, en una botiga del meu barri, vaig comprar dos articles. Abans de pagar vaig calcular mentalment que em costaven en total 4 € i 5 cèntims. El botiguer, quan feia el compte amb la seva calculadora, va prémer, per error, la tecla $\frac{1}{x}$ en lloc de la tecla $\frac{1}{y}$. Anava a protestar, però vaig veure que a la pantalla hi posava 4.05. Quina coincidència!

Quant valia cada article?

SOLUCIÓ:

Un val 2,25 € i l'altre 1,80 €.

Podeu obtenir el resultat algebraicament a partir del sistema d'equacions
$$\left. \begin{array}{l} a + b = 4.05 \\ a \cdot b = 4.05 \end{array} \right\}$$

Usant substitució s'obté: $a \cdot (4.05 - a) = 4.05$ i ens queda l'equació de segon grau

$a^2 - 4.05a + 4.05 = 0$ la resolució de la qual ens dona els valors buscats.

També es pot resoldre més senzillament per prova i error, tenint en compte que el preu d'un dels dos articles ha d'acabar en 5 i que la seua suma és 4,05. Per exemple, podem començar calculant el producte de 2,05 per 2, després de 2,15·1,90 i ràpidament arribem a la solució correcta.

28**

En un moment del dia, l'hora coincideix amb la quarta part del temps que ha passat més la meitat del temps que falta per acabar el dia. Quina hora és en aqueix moment?

29**SOLUCIÓ:**

Anomenem x al temps en hores passat des de l'inici del dia.

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{2}(24 - x) = x \rightarrow x + 2(24 - x) = 4x \rightarrow 48 = 5x \rightarrow$$

$$x = \frac{48}{5} = 9.6 \text{ hores} = 9 \text{ hores } 36 \text{ minuts}$$