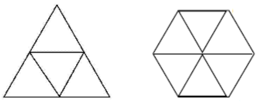
SOLUCIONES – ABRIL 2025

1*

Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Si el área del triángulo es 9 cm², ¿cuál es el área del hexágono?

Solución:

Del hecho de tener el mismo perímetro deducimos que los lados del hexágono miden la mitad que los del triángulo. Por lo tanto, los triángulos equiláteros obtenidos en su interior de la siguiente forma son todos iguales:



Y de aquí se deduce que la razón de sus áreas es 6/4.

Luego el área del hexágono es 9·6/4 = **13,5 cm².**

2***

3

Se dan dos sucesiones numéricas: 3, 6, 12, 6 y 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2. En ambas se sigue la misma ley de formación.

a) Encuentra esta ley.

b) Encuentra todos los números naturales que se transforman en sí mismos según esta ley.

c) Demuestra que el número 21991 se convierte en un número de una cifra después de varias transformaciones.

Solución:

a) La ley se puede adivinar observando, por ejemplo, que mientras el número es de una sola cifra se duplica, y cuando es de dos cifras no. Y el hecho que 10 se convierta en 2 hace pensar que no es el número en sí el que se duplica, sino la suma de sus cifras. Así la ley de formación es: "el doble de la suma de sus cifras"

b) Es fácil ver que no hay números de una cifra con la propiedad requerida.
Entre los números de dos cifras

$$\overline{ab} = 10a + b \Longrightarrow 10a + b = 2(a + b) \Leftrightarrow 8a = b \Leftrightarrow$$

$a = 1, b = 8 \Longrightarrow$ **18**

Se puede demostrar que no hay otras soluciones: el número de tres dígitos más pequeño es el 100 y el más grande 999 $\Longrightarrow 9 + 9 + 9 = 27 \Longrightarrow 54$, de forma que el doble de la suma de los dígitos siempre es menor que el número en sí. Del mismo modo con cuatro dígitos, cinco dígitos, etc.

c) **Método 1**:

$$21991 \longrightarrow 2(2+1+9+9+1)=44 \longrightarrow 2(4+4)=16 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 2(1+6)=14 \longrightarrow 2(1+4)=10 \longrightarrow 2(1+0)=2$$

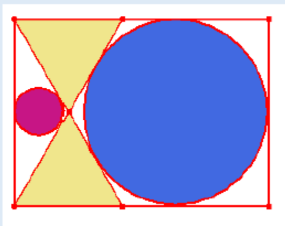
Método 2:

Teniendo en cuenta que, si el número no tiene menos de tres cifras, entonces su suma de cifras es menor que el número en sí. Esto quiere decir que el número disminuirá hasta convertirse en dos cifras o una cifra. El único peligro es que demos con el valor fijo del 18. Pero esto es imposible en nuestro caso, puesto que el número original no es divisible por 9 y, con esta transformación, los números que no sean múltiplos de 9 no pueden pasar a números que son múltiplos de 9.

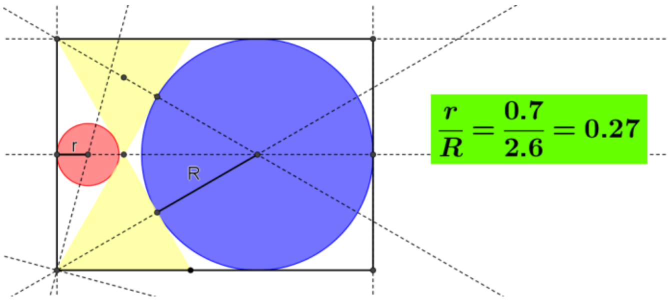
4 ggb

La figura está formada por un rectángulo que contiene dos circunferencias y dos triángulos equiláteros iguales.
Calcula la proporción entre los radios de las dos circunferencias.

5



Solución con geogebra:



Pasos a seguir:

1. Empezamos dibujando el triángulo equilátero inferior, para después, por simetría axial, conseguir el otro.
2. Trazamos la vertical izquierda del rectángulo, y conseguimos un triángulo en el que está inscrito el círculo pequeño.
3. Para trazar el círculo, necesitamos dos bisectrices del triángulo. Una coincide con la recta horizontal usada para la simetría del triángulo. Trazamos una de las otras dos.
4. El centro del círculo se encuentra en el punto de intersección de las dos bisectrices, y el punto donde la horizontal corta al lado vertical del rectángulo pertenece a la circunferencia. Ya podemos dibujarla.
5. Para medir su radio, trazamos el segmento entre el centro y el punto conocido. Lo llamaremos r.
6. La circunferencia grande es tangente a las bases de los dos triángulos, por lo que la recta que pasa por el punto medio de la base y el vértice opuesto pasa por el centro de la circunferencia. Trazamos las dos rectas y en la intersección de ambas

tendremos el centro. Como punto podemos usar el punto medio de la base de cualquiera de los dos triángulos. La trazamos, y para medir el radio, igual que en la otra, trazamos el segmento que une el centro con uno de los puntos. Lo llamamos R.

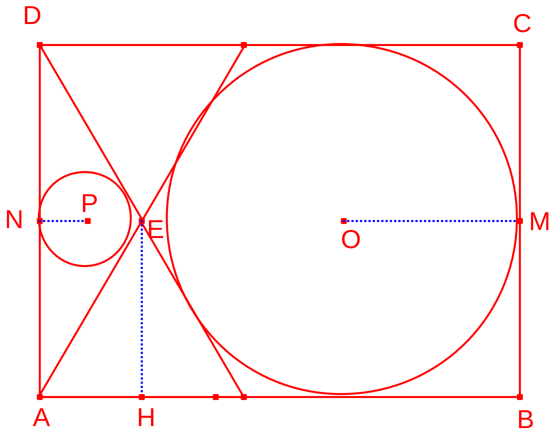
7. Introducimos en la barra de entrada el cociente r/R y obtenemos 0.27.

Solución analítica:

Sea $\overline{OM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{HE} = R$

$\overline{PN} = r$

Sea $\overline{AH} = x$



$$\frac{x}{R} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}R$$

$$\overline{AE} = \overline{DE} = 2 \cdot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ADE}$ es:

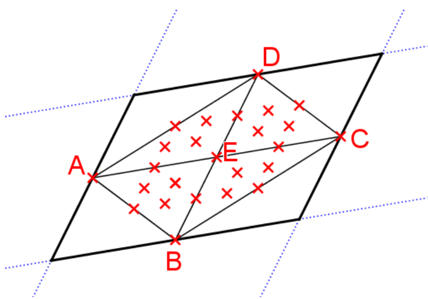
$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{2R + \frac{2\sqrt{3}}{3}R + \frac{2\sqrt{3}}{3}R}{2} r$$

Simplificando:

$$\frac{r}{R} = 2 - \sqrt{3} \cong 0.27$$

7 ggb 8

En un paralelogramo marcamos el centro y los puntos medios de los lados. Consideramos todos los triángulos con vértices en estos cinco puntos. Ahora, en cada triángulo marcamos los puntos medios de los lados y de las medianas. ¿Cuántos puntos hay marcados en total?



Solución:

En total tendríamos 25 puntos marcados (algunos más de una vez).

Pasos:

1. Para dibujar el paralelogramo, introducimos tres puntos no alineados que serán tres de los vértices. Con rectas paralelas determinamos el vértice que nos falta para dibujar el paralelogramo.
2. Con punto medio o centro marcamos los cinco primeros puntos: A, B, C y D puntos medios de los lados y E centro del paralelogramo.
3. Sobre estos cinco puntos podemos trazar ocho triángulos: cuatro más pequeños con un vértice en E y los otros dos en puntos medios de los lados que sean consecutivos, por ejemplo, el ABE, y otros cuatro mayores con los tres vértices en puntos medios de los lados, por ejemplo, el ABC.
4. Marcamos los puntos medios de todos los lados.
5. Las medianas van desde el punto medio de un lado (que ya hemos marcado) hasta el vértice opuesto (que también tenemos marcado). En cada triángulo tenemos tres, marcamos su punto medio.

9**

10

En una fiesta cada uno de los asistentes saludó a todos los demás con un apretón de manos. Si en total hubo 120 apretones, ¿cuántas personas asistieron a la fiesta?

Solución:

Llamaremos n al número de personas que había en la fiesta. Si cada una saludó a todas las demás, lo haría $n-1$ veces en total.

El total de saludos fue de $n(n-1)$, pero en cada saludo intervienen dos personas aunque hay un único apretón de manos, por lo que el total de apretones fue de $\frac{n(n-1)}{2}$ o como dice el enunciado de 120.

Resolvemos la ecuación $\frac{n(n-1)}{2} = 120 \quad \rightarrow \quad n(n-1) = 240 = 16 \cdot 15$

De donde podemos deducir que asistieron 16 personas.

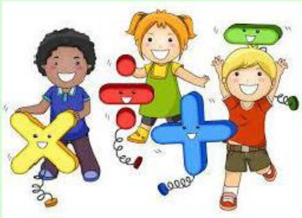
También podíamos obtener el resultado resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$n^2 - n - 240 = 0 \quad \rightarrow \quad n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-240)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 31}{2} = \begin{cases} 16 \\ -15 \end{cases}$$

La única solución con sentido es 16, ya que el número de asistentes a la fiesta no puede ser negativo.

11* 12

Usando cuatro veces el número 7, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, los paréntesis necesarios y algo de ingenio, obtén los números naturales del 1 al 10.

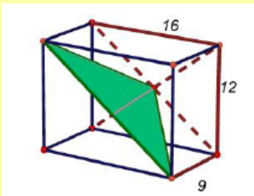


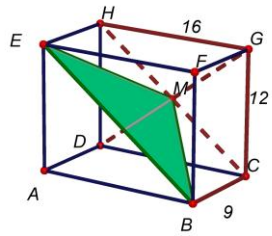
Solución:

1 $77:77 = 7:7 + 7 - 7 = 1$
2 $7:7 + 7:7 = 2$
3 $(7 + 7 + 7):7 = 3$
4 $77:7 - 7 = 4$
5 $7 - (7 + 7):7 = 5$
6 $(7 \cdot 7 - 7):7 = 6$
7 $7 + (7 - 7) \cdot 7 = 7$
8 $(7 \cdot 7 + 7):7 = 8$
9 $7 + (7 + 7):7 = 9$
10 $(77 - 7):7 = 10$

14** 15

La figura está formada por un ortoedro de aristas 16, 9, 12. Calcula el área del triángulo sombreado.





Solución:

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{EAB}$:

$\overline{BE} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$

El cuadrilátero BCHE es un rectángulo.

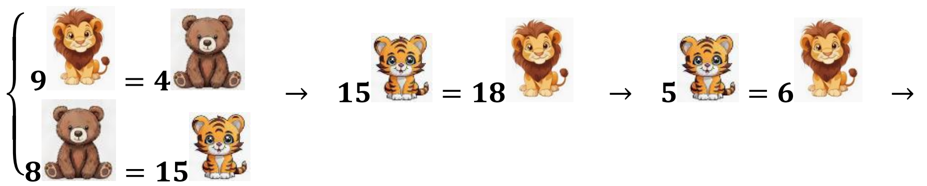
$S_{BME} = \frac{1}{2} S_{BCHE} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9 = 90$

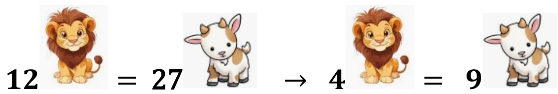
16*

Nueve leones pesan lo mismo que cuatro osos. Ocho osos pesan lo mismo que quince tigres y diez tigres pesan lo mismo que veintisiete cabras. ¿Cuántas cabras pesan lo mismo que cuatro leones?

17

Solución:

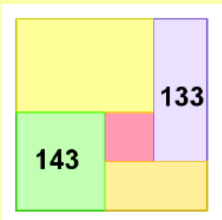


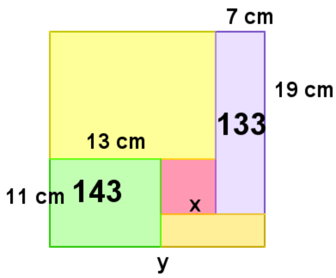
De donde 

18**

Un cuadrado se descompone en un cuadradito y cuatro rectángulos. Conocemos el área de dos de los rectángulos en cm^2, tal y como se ve en la figura. Calcula el área del cuadrado pequeño. (Sabemos que todos los lados son números naturales mayores que 1).

19





Solución:

En el enunciado del problema nos dicen que los lados de los polígonos son números naturales, por lo que si descomponemos en factores primos las dos superficies que conocemos:

$$143 = 11 \cdot 13$$

$$133 = 7 \cdot 19$$

podemos deducir que los lados de esos rectángulos son 11 y 13 cm en uno y 7 y 19 cm en el otro.

Llamaremos x al lado del cuadrado pequeño e y al del grande.

Si relacionamos ambos y las cuatro medidas conocidas, tendremos:

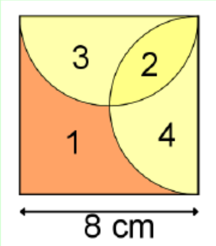
$$\begin{cases} y = 13 + x + 7 \quad (en\ horizontal) \\ y = 19 - x + 11 \quad (en\ vertical) \end{cases} \rightarrow \quad 13 + x + 7 = 19 - x + 11 \quad \rightarrow$$

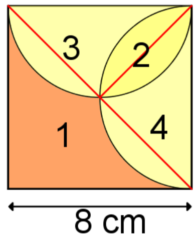
$$\rightarrow \quad 2x = 19 + 11 - 20 \quad \rightarrow \quad x = 5\ cm$$

Por lo tanto, el área del cuadrado pequeño es de 25 cm^2.

21* **22**

En un cuadrado de lado 8 cm trazamos sobre dos lados consecutivos dos semi-circunferencias que dividen el cuadrado en cuatro regiones tal y como se ve en la imagen.
Calcula la porción del cuadrado cubierta por las regiones 1 y 2.





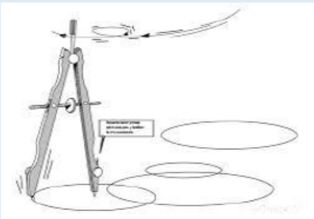
Solución:

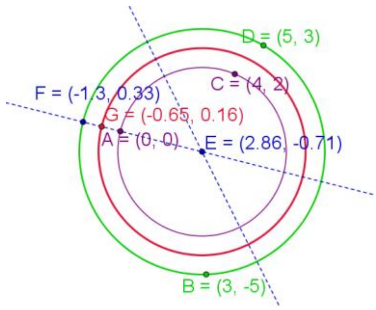
Cubren medio cuadrado.

Basta hacer los cortes marcados en rojo para ver que la región 2 puede descomponerse en dos trozos que cubren lo que le falta a la región 1 para ocupar exactamente medio cuadrado.

23 ggb **24**

Construye una circunferencia que se encuentre a la misma distancia de los puntos A(0,0), B(3,-5), C(4,2) y D(5,3).





Solución con geogebra:

Para resolverlo, buscaremos dos circunferencias concéntricas que pasen una por A y C y la otra por B y D. La que buscamos estará en medio de ambas, con el mismo centro, de forma que A y C quedarán a un lado y B y D al otro, pero ambos a la misma distancia.

Pasos a seguir:

1. Introducimos los cuatro puntos.
2. Hallamos la mediatriz del segmento que une A y C, y después la del segmento entre B y D. El punto E de intersección de ambas será el centro de las circunferencias.
3. Trazamos una circunferencia centrada en E que pase por A y otra centrada en E que pase por B.
4. Trazamos una recta que pase por E y un punto de una de las circunferencias, por ejemplo A.
5. Hallamos los puntos de intersección de esta recta con las dos circunferencias (A y F en el dibujo).
6. Hallamos el punto G medio entre A y F.
7. La circunferencia que buscamos está centrada en E y pasa por G.

25*** **26**

¿Cuántos números de siete cifras son múltiplos de 388 y terminan en 388?

Solución:

Buscamos cuántos números de la forma abcd388 son múltiplos de 388. Equivale a buscar los números de la forma abcd000 + 388 que son múltiplos de 388. Es decir, a encontrar cuántos números de la forma $abcd \cdot 10^3$ son múltiplos de 388

Para que $abcd \cdot 10^3$ sea múltiplo de 388, como $388 = 4 \cdot 97$ y 10^3 es múltiplo de 4, el problema se reduce a encontrar los números de cuatro cifras múltiplos de 97.

El menor es $97 \cdot 11$ y el mayor $97 \cdot 103$. Con lo que habrá 93 números que cumplen esta condición.

28** **29**

Las matrículas de los coches españoles están formadas por cuatro cifras (desde 0000 hasta 9999) y tres letras (elegidas entre todas las consonantes menos la Ñ y la Q). ¿Cuántos coches se pueden matricular con este sistema?

Solución:

Para la parte numérica está claro que hay 10 000 opciones.

Las letras que se pueden usar son:

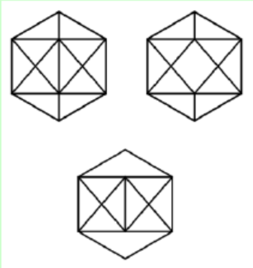
B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z

Es decir, un total de 20. Como pueden repetirse, las posibles opciones serán en total 20·20·20=800

Si para cada grupo de letras tenemos 10 000 opciones con los números, el total de matrículas posibles es 800·10 000=8 000 000 matrículas distintas.

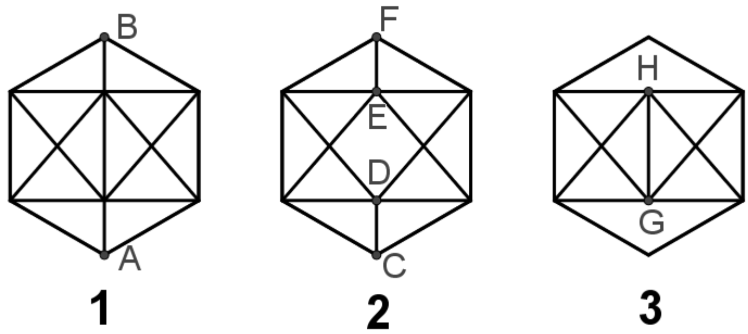
30*

Solamente una de las tres figuras no se puede dibujar de un trazo, sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea. ¿Cuál es? Justifica la respuesta.



Solución:

La única que no se puede dibujar es la 2.



Explicación: Para poder hacer el dibujo, siempre que lleguemos a un nudo (lugar donde se encuentran varios caminos) entraremos por un segmento y saldremos por otro distinto. Si en todos los nudos la cantidad de segmentos que llegan a él es par, no hay ningún problema para dibujar: entramos por uno y salimos por otro. Podemos empezar por un nudo cualquiera y acabaremos en el mismo.

El problema lo encontramos cuando la cantidad de caminos que salen de un nudo es impar, ya que no podemos hacerlo. Si Hay más de dos nudos de este tipo, no será posible hacer el dibujo, tal y como ocurre en el dibujo 2 en los nudos C, D, E y F.

En los dibujos 1 y 3 sólo hay dos nudos impares, el A y el B en el primero y el G y el H en el 3. Si empezamos en uno de los dos y terminamos en el otro, podremos hacer el dibujo de un trazo.