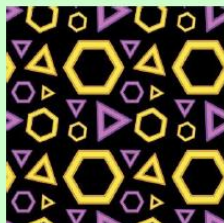


SOLUCIONS – ABRIL 2025

1*

Un triangle equilàter i un hexàgon regular tenen el mateix perímetre. Si l'àrea del triangle és 9 cm^2 , quina és l'àrea de l'hexàgon?



Solució:

Del fet de tindre el mateix perímetre deduïm que els costats de l'hexàgon mesuren la meitat que els del triangle. Per tant, els triangles equilàters obtinguts a l'interior, de la forma següent, són tots iguals:



I d'ací es dedueix que la raó entre les àrees és $6/4$.

Aleshores, l'àrea de l'hexàgon és $9 \cdot 6/4 = 13,5 \text{ cm}^2$.

2***

Es donen dues successions numèriques: 3, 6, 12, 6 i 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2. En totes dues se segueix la mateixa llei de formació.

a) Troba aquesta llei.

b) Troba tots els nombres naturals que es transformen en ells mateixos segons aquesta llei.

c) Demostra que el número 21991 es converteix en un nombre d'una xifra després de diverses transformacions.

3



Solució:

a) La llei es pot endevinar observant, per exemple, que quan el nombre és d'una sola xifra és duplica, i quan és de dues xifres no. I el fet que 10 es convertisca en 2 fa pensar que no és el nombre el que es duplica, sinó la suma de les xifres. Així, la llei de formació és: "el doble de la suma de les xifres".

b) És fàcil vore que no hi ha números d'una xifra amb la propietat requerida. Entre els números de dues xifres:

$$\begin{aligned}\overline{ab} = 10a + b &\Rightarrow 10a + b = 2(a + b) \Leftrightarrow 8a = b \Leftrightarrow \\ a = 1, b = 8 &\Rightarrow \mathbf{18}\end{aligned}$$

Es pot demostrar que no hi ha altres solucions: el nombre de tres dígit més menut és el 100 i el més gran $999 \Rightarrow 9 + 9 + 9 = 27 \Rightarrow 54$, de manera que el doble de la suma dels dígit sempre és més menut que el nombre. De la mateixa manera amb quatre dígit, cinc dígit, etc.

c) Mètode 1:

$$21991 \rightarrow 2(2 + 1 + 9 + 9 + 1) = 44 \rightarrow 2(4 + 4) = 16 \rightarrow \\ \rightarrow 2(1 + 6) = 14 \rightarrow 2(1 + 4) = 10 \rightarrow 2(1 + 0) = 2$$

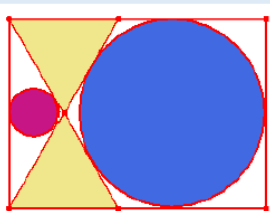
Mètode 2:

Tenim en compte que, si el nombre no té menys de tres xifres, aleshores la suma de les xifres és menor que el nombre. Això vol dir que el nombre disminuirà fins a convertir-se en dues xifres o una xifra. L'únic perill és que donem amb el valor fix del 18. Però això és impossible en el nostre cas, ja que el nombre original no és divisible per 9 i, amb aquesta transformació, els nombres que no siguin múltiples de 9 no poden passar a nombres que són múltiples de 9.

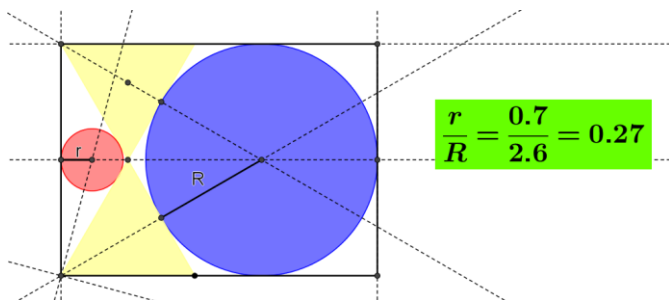
4 ggb

La figura està formada per un rectangle que conté dues circumferències i dos triangles equilàters iguals. Calcula la proporció entre els radis de les dues circumferències.

5



Solució amb geogebra:



Passos a seguir:

1. Comencem dibuixant el triangle equilàter inferior; després, per simetria axial, aconseguirem l'altre.
2. Tracem la vertical esquerra del rectangle, i aconseguim un triangle on està inscrit el cercle petit.
3. Per traçar el cercle, necessitem dues bisectrius del triangle. Una coincideix amb la recta horitzontal utilitzada per a la simetria del triangle. Tracem una de les altres dues.
4. El centre del cercle es troba al punt d'intersecció de les dues bisectrius, i el punt on l'horitzontal talla el costat vertical del rectangle pertany a la circumferència. Ja podem dibuixar-la.
5. Per mesurar-ne el radi, tracem el segment entre el centre i el punt conegut. En direm r .
6. La circumferència gran és tangent a les bases dels dos triangles, per la qual cosa la recta que passa pel punt mitjà de la base i el vèrtex oposat passa pel centre de la circumferència. Tracem les dues rectes i en la intersecció d'ambdues tindrem el

centre. Com a punt podem fer servir el punt mitjà de la base de qualsevol dels dos triangles. La tracem, i per mesurar el radi, igual que a l'altra, tracem el segment que uneix el centre amb un dels punts. En diem R.

7. Introduïm a la barra d'entrada el quocient r/R i obtenim 0.27.

Solució analítica:

$$\text{Siga } \overline{OM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{HE} = R$$

$$\overline{PN} = r$$

$$\text{Siga } \overline{AH} = x$$

$$\frac{x}{R} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$

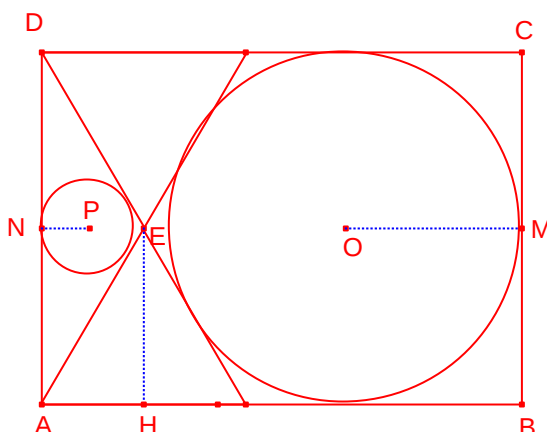
$$\overline{AE} = \overline{DE} = 2 \cdot x = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$$

L'àrea del triangle $\triangle ADE$ és:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{2R + \frac{2\sqrt{3}}{3} R + \frac{2\sqrt{3}}{3} R}{2} r$$

Simplificant:

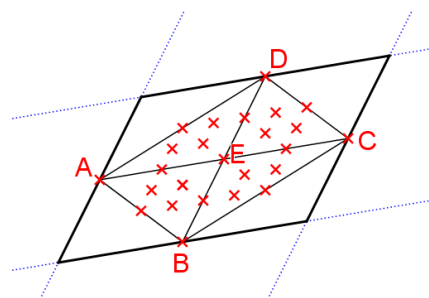
$$\frac{r}{R} = 2 - \sqrt{3} \cong 0.27$$



7 ggb

8

En un paral·lelogram marquem el centre i els punts mitjans dels costats. Considerem tots els triangles amb vèrtexs en aquests cinc punts. Ara, en cada triangle marquem els punts mitjans dels costats i de les mitjanes. Quants punts hi ha marcats en total?



Solució:

En total tindríem 25 punts marcats (alguns més d'una vegada).

Passos:

1. Per dibuixar el paral·lelogram, introduïm tres punts no alineats que seran tres dels vèrtexs. Amb rectes paral·leles determinem el vèrtex que ens falta per dibuixar el paral·lelogram.
2. Amb punt mitjà o centre marquem els cinc primers punts: A, B, C i D punts mitjans dels costats i E centre del paral·lelogram.
3. Sobre aquests cinc punts podem traçar vuit triangles: quatre més menuts amb un vèrtex a E i els altres dos en punts mitjans dels costats que siguen consecutius, per exemple, l'ABE, i quatre més grans amb els tres vèrtexs en punts mitjans dels costats, per exemple, l'ABC.
4. Marquem els punts mitjans de tots els costats.
5. Les mitjanes van des del punt mitjà d'una banda (que ja hem marcat) fins al vèrtex oposat (que també tenim marcat). A cada triangle en tenim tres, marquem el seu punt mitjà.

9**

En una festa cadascun dels assistents va saludar tots els altres amb una encaixada de mans. Si en total hi va haver 120 encaixades, quantes persones van assistir a la festa?

10



Solució:

Anomenarem n al nombre de persones que hi havia a la festa. Si cadascuna va saludar totes les altres, ho faria $n - 1$ vegades en total.

El total de salutacions va ser de $n(n - 1)$, però en cada salutació intervenen dues persones encara que hi ha una única encaixada de mans, per la qual cosa el total d'encaixades va ser de $\frac{n(n-1)}{2}$ o, com diu l'enunciat, 120.

Resolem l'equació $\frac{n(n-1)}{2} = 120 \rightarrow n(n - 1) = 240 = 16 \cdot 15$

D'on podem deduir que hi van assistir 16 persones.

També podríem obtenir el resultat resolent l'equació de segon grau:

$$n^2 - n - 240 = 0 \rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-240)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 31}{2} = \begin{cases} 16 \\ -15 \end{cases}$$

L'única solució amb sentit és 16, ja que el nombre d'assistents a la festa no pot ser negatiu.

11***12**

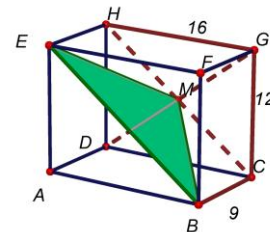
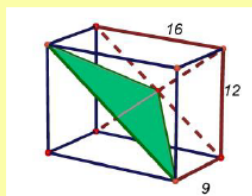
Usant quatre vegades el número 7, les operacions de suma, resta, multiplicació i divisió, els parèntesis necessaris i una mica d'enginy, obtén els nombres naturals de l'1 al 10.

**Solució:**

- 1 $77:77 = 7:7 + 7 - 7 = 1$
- 2 $7:7 + 7:7 = 2$
- 3 $(7 + 7 + 7):7 = 3$
- 4 $77:7 - 7 = 4$
- 5 $7 - (7 + 7):7 = 5$
- 6 $(7 \cdot 7 - 7):7 = 6$
- 7 $7 + (7 - 7) \cdot 7 = 7$
- 8 $(7 \cdot 7 + 7):7 = 8$
- 9 $7 + (7 + 7):7 = 9$
- 10 $(77 - 7):7 = 10$

14****15**

La figura està formada per un ortoedre d'arestes 16, 9, 12. Calcula l'àrea del triangle ombrejat.

**Solució:**

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle EAB :

$$\overline{BE} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

El quadrilàter BCHE és un rectangle.

$$S_{BME} = \frac{1}{2} S_{BCHE} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9 = 90$$

16*

Nou lleons pesen el mateix que quatre ossos. Vuit ossos pesen el mateix que quinze tigres i deu tigres pesen el mateix que vint-i-set cabres. Quantes cabres pesen el mateix que quatre lleons?

17



Solució:

$$\begin{cases} 9 \text{ lleons} = 4 \text{ ossos} \\ 8 \text{ ossos} = 15 \text{ tigres} \end{cases} \rightarrow 15 \text{ tigres} = 18 \text{ lleons} \rightarrow 5 \text{ tigres} = 6 \text{ lleons} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10 \text{ tigres} = 12 \text{ lleons}$$

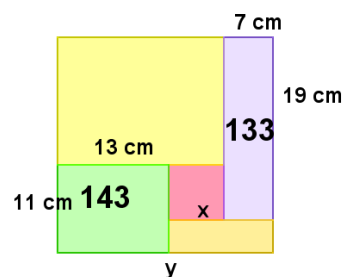
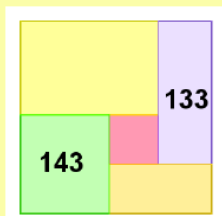
$$10 \text{ tigres} = 27 \text{ cabres}$$

$$\text{D'on } 12 \text{ lleons} = 27 \text{ cabres} \rightarrow 4 \text{ lleons} = 9 \text{ cabres}$$

18**

Un quadrat es descompon en un quadrat menut i quatre rectangles. Coneixem l'àrea de dos dels rectangles en cm^2 , tal com es veu a la figura. Calcula l'àrea del quadrat menut. (Sabem que tots els costats són nombres naturals majors que 1).

19



Solució:

A l'enunciat del problema ens diuen que els costats dels polígons són nombres naturals, per la qual cosa, si descomponem en factors primers les dues superfícies que coneixem:

$$143 = 11 \cdot 13$$

$$133 = 7 \cdot 19$$

podem deduir que els costats d'aquests rectangles són 11 i 13 cm en un d'ells i 7 i 19 cm a l'altre.

Anomenarem x al costat del quadrat menut i y al del gran.

Si relacionem tots dos i les quatre mesures conegudes, tindrem:

$$\begin{cases} y = 13 + x + 7 & (\text{en horitzontal}) \\ y = 19 - x + 11 & (\text{en vertical}) \end{cases} \rightarrow 13 + x + 7 = 19 - x + 11 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x = 19 + 11 - 20 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

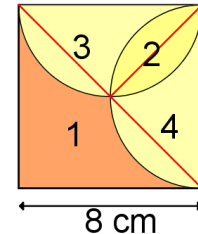
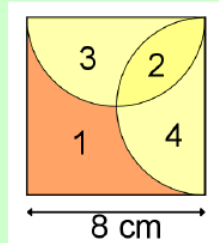
Per tant, l'àrea del quadrat menut és de 25 cm^2 .

21*

22

En un quadrat de costat 8 cm tracem sobre dos costats consecutius dues semicircumferències que divideixen el quadrat en quatre regions tal com es veu a la imatge.

Calcula la porció del quadrat coberta per les regions 1 i 2.



Solució:

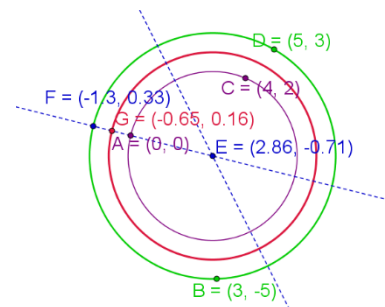
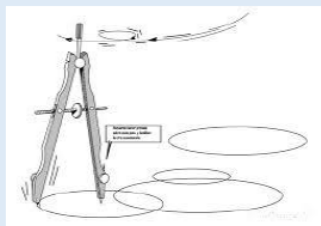
Cobreixen mig quadrat.

Només cal fer els talls marcats en roig per veure que la regió 2 pot descompondre's en dos trossos que cobreixen el que li falta a la regió 1 per ocupar exactament mig quadrat.

23 ggb

Construeix una circumferència que es trobe a la mateixa distància dels punts A(0,0), B(3,-5), C(4,2) i D(5,3).

24



Solució amb geogebra:

Per resoldre'l, buscarem dues circumferències concèntriques que passen una per A i C i l'altra per B i D. La que busquem estarà al mig de totes dues, amb el mateix centre, de manera que A i C quedaran a un costat i B i D a l'altre, però tots a la mateixa distància.

Passos a seguir:

1. Introduïm els quatre punts.
2. Trobem la mediatriu del segment que uneix A i C, i després la del segment entre B i D. El punt E d'intersecció de totes dues serà el centre de les circumferències.
3. Tracem una circumferència centrada a E que passe per A i una altra centrada a E que passe per B.
4. Tracem una recta que passe per E i un punt d'una de les circumferències, per exemple A.
5. Trobem els punts d'intersecció d'aquesta recta amb les dues circumferències (A i F al dibuix).
6. Trobem el punt G mitjà entre A i F.
7. La circumferència que busquem està centrada en E i passa per G.

25*****26**

Quants números de set xifres són múltiples de 388 i acaben en 388?

**Solució:**

Busquem quants nombres de la forma $abcd388$ són múltiples de 388. Equival a buscar els nombres de la forma $abcd000 + 388$ que són múltiples de 388. És a dir, a trobar quants nombres de la forma $abcd \cdot 10^3$ són múltiples de 388

Perquè $abcd \cdot 10^3$ siga múltiple de 388, com $388 = 4 \cdot 97$ i 10^3 és múltiple de 4, el problema es redueix a trobar els nombres de quatre xifres múltiples de 97.

El menor és $97 \cdot 11$ i el major $97 \cdot 103$. Amb la qual cosa hi haurà 93 nombres que compleixen aquesta condició.

28****29**

Les matrícules dels cotxes espanyols estan formades per quatre xifres (des de 0000 fins a 9999) i tres lletres (escollides entre totes les consonants excepte la Ñ i la Q). Quants cotxes es poden matricular amb aquest sistema?

**Solució:**

Per a la part numèrica és clar que hi ha 10 000 opcions.

Les lletres que es poden fer servir són:

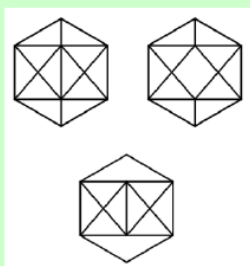
B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z

És a dir, un total de 20. Com es poden repetir, les possibles opcions seran en total $20 \cdot 20 \cdot 20 = 800$

Si per a cada grup de lletres tenim 10 000 opcions amb els números, el total de matrícules possibles és $800 \cdot 10\,000 = 8\,000\,000$ matrícules diferents.

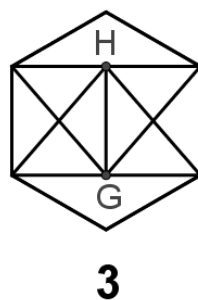
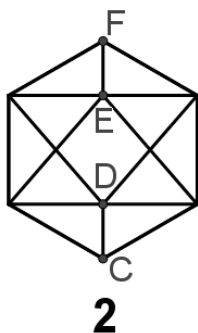
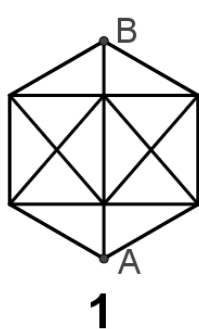
30*

Només una de les tres figures no es pot dibuixar d'un traç, sense aixecar el llapis del paper i sense passar dues vegades per la mateixa línia. Quina és? Justifica la resposta.



Solució:

L'única que no es pot dibuixar és la 2.



Explicació: Per poder fer el dibuix, sempre que arribem a un nuc (lloc on hi ha diversos camins) entrarem per un segment i eixirem per un altre diferent. Si en tots els nucs la quantitat de segments que hi arriben és parell, no hi ha cap problema per dibuixar: entrem per un i eixim per un altre. Podem començar per un nuc qualsevol i acabarem al mateix.

El problema el trobem quan la quantitat de camins que ixen d'un nuc és imparell, ja que no podem fer-ho. Si hi ha més de dos nucs d'aquest tipus, no serà possible fer el dibuix, tal com passa al dibuix 2 en els nucs C, D, E i F.

En els dibuixos 1 i 3 només hi ha dos nucs senars, A i B en el primer i G i H en el 3. Si comencem en un dels dos i acabem en l'altre, podrem fer el dibuix d'un traç.