SOLUCIONES – MAYO 2025

1**

Se tiran tres dados y salen tres resultados distintos. ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un seis?

SOLUCIÓN:

Calculamos el número de resultados posibles donde los tres dados muestren números diferentes:

Primer dado: 6 opciones. Segundo dado: 5 opciones (cualquier número excepto el que salió en el primer dado). Tercer dado: 4 opciones (cualquier número excepto los dos que salieron en los otros dados).

El número de resultados donde todos los dados muestran números diferentes es 6·5·4=120.

Ahora, queremos contar los casos en los que uno de los dados muestra un 6. Supongamos que aparece en el primer dado:

Primer dado: 1 opción (el 6). 2º dado: 5 (cualquier nº distinto de 6). 3º: 4 (nº distinto a los otros)

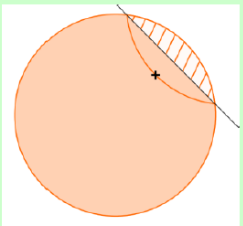
Pero el 6 puede estar en cualquiera de los tres dados, por lo que el número de resultados favorables donde uno de los dados es un 6 es: $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Luego la probabilidad de que hayamos obtenido un 6 es: $P = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}$

2*

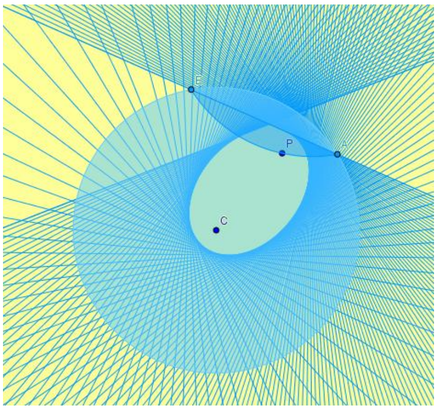
Recorta un círculo de papel. Marca un punto en él que no coincida con el centro. Ve doblando el papel para que el borde del círculo pase por ese punto y marca la cuerda del círculo que obtienes cada vez. ¿Qué figura obtienes?

3



SOLUCIÓN:

Obtendremos una elipse.

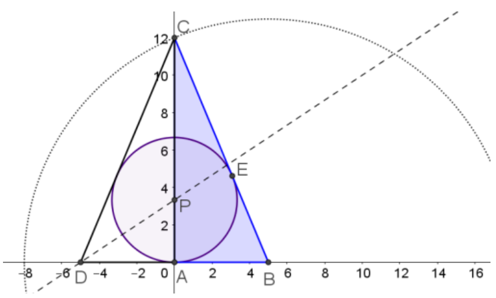


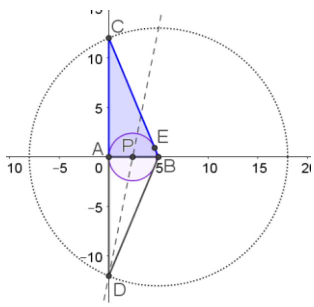
5 ggb

Dado un triángulo rectángulo de 13 cm de hipotenusa y 5 cm de cateto, construye todas las circunferencias que sean tangentes a la hipotenusa, pasen por el vértice del ángulo recto y tengan el centro en un cateto.

6

SOLUCIÓN:





Para resolverlo, basta pensar en que si formamos un triángulo isósceles uniendo el triángulo rectángulo y su simétrico, la circunferencia inscrita en él cumplirá las condiciones que nos piden.

Podremos encontrar dos soluciones distintas según el cateto por el que realicemos la simetría.

Pasos a seguir:

1. Para dibujar el triángulo rectángulo, empezaremos por el cateto conocido dibujando un segmento entre los puntos A(0,0) y B(5,0).
2. Para la hipotenusa, dibujamos una circunferencia centrada en B con radio 13. El punto en que corte al eje de ordenadas será el vértice C que nos falta. Obtenemos C(0,12).
3. Dibujamos el simétrico del triángulo respecto al eje de ordenadas obteniendo el triángulo isósceles de vértices B, C y D en el que inscribiremos la circunferencia.
4. El centro de la circunferencia es el punto de intersección de las bisectrices. Ya tenemos una (el eje de ordenadas). Hallamos la bisectriz del ángulo en B, y con la intersección de ambas el centro de la circunferencia P.
5. La circunferencia tendrá centro en P y pasará por el punto A. Ya podemos dibujarla.

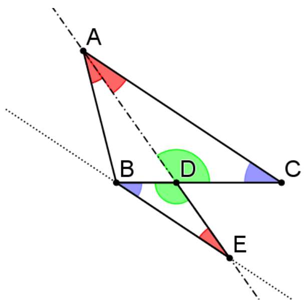
Para obtener la otra solución, procederemos de la misma forma, pero esta vez, la simetría del triángulo hecha antes respecto al eje de ordenadas, ahora será respecto al eje de abscisas.

7***

En un triángulo ABC, se dibuja la bisectriz AD, donde D es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo en A con el lado BC.

Demuestra que se cumple $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$.

8



SOLUCIÓN:

Por B, dibujamos una paralela al lado AC, que corta a la bisectriz AD en el punto E.

Los ángulos $\widehat{CAD}=\widehat{AEB}$ son alternos internos y $\widehat{ADC}=\widehat{BDE}$ opuestos por el vértice. Los triángulos ADC y BDE tienen los mismos ángulos y por tanto son semejantes:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BE}{AC}=\frac{DE}{AD}$$

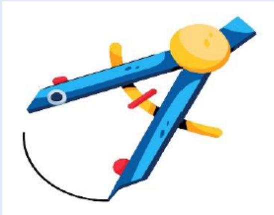
El triángulo ABE es isósceles ya que tiene dos ángulos iguales y por tanto AB=BE

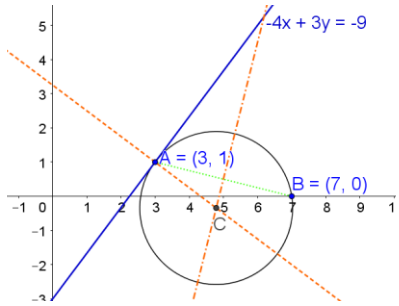
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$$

9 ggb

Construye una circunferencia que sea tangente a la recta $4x - 3y = 9$ en el punto A de abscisa $x = 3$ y que pase por el punto $B(7,0)$.

10





SOLUCIÓN:

Para poder dibujar la circunferencia tendremos en cuenta dos cosas:

1. Si ha de ser tangente a la recta en A, el radio de la circunferencia que llega al punto A, es perpendicular a la recta.
2. Si A y B son dos puntos de la circunferencia, la mediatriz de la cuerda que los une pasa por el centro de la circunferencia.

Así que para dibujarla, trazaremos la perpendicular a la recta por A y la mediatriz del segmento AB. El punto de intersección de ambas es el centro de la circunferencia. Como tenemos dos puntos de esta (A y B), podemos trazarla.

12**

Halla todas las ternas de números naturales a, b, c que sean distintos, de una sola cifra y que cumplan: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$

13

SOLUCIÓN:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a-b}{c}$$

Como los tres números son naturales y distintos y $a > a - b$, podemos deducir que la fracción $\frac{a-b}{c}$ resulta de simplificar $\frac{a}{b}$.

Debe cumplirse que $a > b > c$ y $\frac{a}{b}$ debe poder simplificarse, es decir, a y b deben tener algún divisor común.

De todo esto deducimos que los posibles valores para a son los naturales desde el 3 hasta el 9. Las opciones para b deben ser números naturales menores que a que además permitan simplificar la fracción a/b.

Veamos las posibles opciones:

a	b	$a-b$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a-b}{c}$	c	Válido S/N	Ternas válidas a, b, c
9	6	3	$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	S	9, 6, 2
	3	6	$\frac{9}{3}=3$	$\frac{6}{2}=3$	2	S	9, 3, 2
8	6	2	$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	$\frac{2}{\ }$	∄	N	
	4	4	$\frac{8}{4}=2$	$\frac{4}{2}=2$	2	S	8, 4, 2
	2	6	$\frac{8}{2}=4$	$\frac{6}{\ }$	∄	N	
7	∄					N	
6	3	3	$\frac{6}{3}=2$	$\frac{3}{\ }$	∄	N	
	2	4	$\frac{6}{2}=3$	$\frac{4}{\ }$	∄	N	
5	∄					N	
4	2	2	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{2}{1}=2$	1	S	4, 2, 1
3	∄					N	

14*

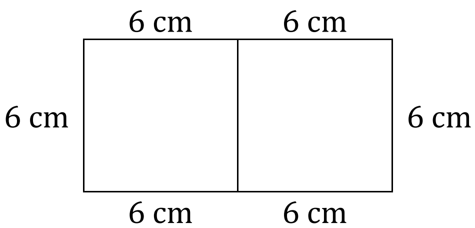
Un trozo de papel rectangular se dobla por la mitad para formar un cuadrado. El área del cuadrado es 36 cm^2. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo original?

15

SOLUCIÓN:

Como el área del cuadrado es de 36 cm^2, podemos deducir que el lado del cuadrado mide 6 cm.

El rectángulo original está formado por dos cuadrados de lado 6 cm unidos, así que su perímetro será de 6·6=36 cm.



16**** **17**

La suma de veinticinco números consecutivos es 2025. ¿Cuánto suman el primero y el último de ellos?
¿Cuál es el número central?

SOLUCIÓN:

La suma de veinticinco números consecutivos la calculamos como:

$$S_{25} = (a_1 + a_{25})\frac{25}{2} = 2025 \quad \rightarrow \quad a_1 + a_{25} = 2025 \cdot \frac{2}{25} = 162$$

Teniendo en cuenta que el número de sumandos es impar el término central será la mitad del valor de la suma del primero y el último, es decir, a_{13} =81.

19 *** **20**

Elegimos al azar un número de cuatro cifras, todas ellas impares. Lo llamaremos A. Después definiremos a partir de él otros dos números: B=2·A y C=2·B. Halla la probabilidad de que B esté formado por dos cifras pares y dos impares (en cualquier orden) y que C esté formado por cuatro cifras pares.

SOLUCIÓN:

El número C=4·A.
Si debe estar formado solo por cifras pares, el mayor valor posible es 8888. Por lo tanto, A no puede ser mayor que 2222.
Pero A está formado exclusivamente por cifras impares, por lo que sabemos que la de las unidades de millar debe ser un 1. Las otras tres cifras pueden tomar cualquier valor con la única condición de ser impares si queremos que el número C no sea mayor que 8888.
La siguiente condición, que B esté formado por dos cifras pares y dos impares, solo es posible si dos de las cifras de A son menores que 5 (al multiplicarlas por 2 no pasarían de 8) y las otras dos mayores o iguales que el cinco para que al multiplicar y obtener un número mayor o igual que 10, llevemos una y consigamos que la cifra siguiente sea impar.
La última condición, que C esté formado por cuatro cifras pares se cumplirá siempre que las cifras de B sean todas menores que 5, porque en caso contrario, el producto de 2 por las cifras que no sean menores que 5 haría que el resultado del producto 2·B tuviera alguna cifra impar:

n	1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
2n	2	~~4~~	~~6~~	~~8~~	10	~~12~~	14	~~16~~	~~18~~

Analizando esto, el número A solo puede contener las cifras 1, 1, 5 y 7 con la condición de que uno de los 1 es la unidad de millar.
Veamos las posibles combinaciones de estas cifras:

A	1155	1515	1551	1157	1175	1517	1715	1571	1751	1177	1717	1771
B	2310	3030	3102	2314	2350	3034	3430	3142	3502	2354	3434	3542
C	4620	6060	6204	4628	~~4700~~	6068	6860	6284	~~7004~~	~~4708~~	6868	~~7084~~

Solo 8 números cumplen todas las condiciones.
Para calcular la probabilidad pedida, solo nos falta saber cuántos números de cuatro cifras están formados solo por impares. En cada una tenemos cinco opciones (1, 3, 5, 7, 9).
La cantidad de números será $5·5·5·5=5^4 = 625$.
La probabilidad será $P = \frac{8}{625}$.

21**

De un número positivo de tres cifras *abc* sabemos que es primo. ¿Cuántos divisores primos positivos tendrá el número de seis cifras *abcabc*? ¿Y sin la condición de que sean primos?

22

SOLUCIÓN:

Podemos poner que $abcabc = abc \cdot 1001$

a) Si factorizamos $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, como sabemos que abc es primo, los divisores primos de $abcabc$ serán 7, 11, 13 y abc.
Por lo que hay cuatro divisores primos.
b) Si eliminamos la condición de que los divisores sean primos, podremos tener:

1, 7, 11, 13, abc, 7·11=77, 7·13=91, 7·abc, 11·13=143, 11·abc, 13·abc, 7·11·13=1001, 7·11·abc=77abc, 7·13·abc=91abc, 11·13·abc=143abc, 7·11·13·abc=1001abc=$abcabc$

El número total de divisores es dieciséis.

Otra forma de contar el número de divisores (la mejor cuando hay bastantes divisores):

Dado que $abcabc = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot abc$ tiene cuatro factores primos, todos con exponente 1, el número de divisores es 2·2·2·2=16.

23*

¿Cuántos números de cuatro cifras existen de forma que el producto de las cuatro cifras sea mayor que 0 y menor que 10?

24

SOLUCIÓN:

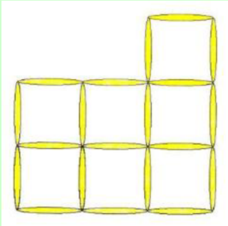
<table>
<tr><th>Producto</th><th>Factores</th><th colspan="6">Números</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1, 1, 1, 1</td><td>1111</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1,1,1, 2</td><td>1112</td><td>1121</td><td>1211</td><td>2111</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1, 1, 1, 3</td><td>1113</td><td>1131</td><td>1311</td><td>3111</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>1, 1, 1, 4</td><td>1114</td><td>1141</td><td>1411</td><td>4111</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>1, 1, 2, 2</td><td>1122</td><td>1212</td><td>1221</td><td>2112</td><td>2121</td><td>2211</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1, 1, 1, 5</td><td>1115</td><td>1151</td><td>1511</td><td>5111</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6</td><td>1, 1, 1, 6</td><td>1116</td><td>1161</td><td>1611</td><td>6111</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1, 1, 2, 3</td><td>1123</td><td>1213</td><td>1231</td><td>2113</td><td>2131</td><td>2311</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td>1132</td><td>1312</td><td>1321</td><td>3112</td><td>3121</td><td>3211</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1, 1, 1, 7</td><td>1117</td><td>1171</td><td>1711</td><td>7111</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">8</td><td>1, 1, 1, 8</td><td>1118</td><td>1181</td><td>1811</td><td>8111</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1, 1, 2, 4</td><td>1124</td><td>1214</td><td>1241</td><td>2114</td><td>2141</td><td>2411</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td>1142</td><td>1412</td><td>1421</td><td>4112</td><td>4121</td><td>4211</td></tr>
<tr><td>1, 2, 2, 2</td><td>1222</td><td>2122</td><td>2212</td><td>2221</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td>1, 1, 1, 9</td><td>1119</td><td>1191</td><td>1911</td><td>9111</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>1, 1, 3, 3</td><td>1133</td><td>1313</td><td>1331</td><td>3113</td><td>3131</td><td>3311</td><td>6</td></tr>
</table>

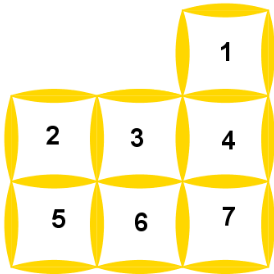
En total podemos encontrar 73 números.

26*

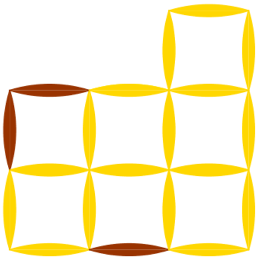
En esta figura hay 20 palillos que forman 7 cuadrados iguales.
a) Eliminando tres palillos, debes dejar cinco cuadrados iguales.
b) Partiendo de la figura inicial, tienes que mover tres palillos, sin eliminarlos, para conseguir también cinco cuadrados iguales.

27

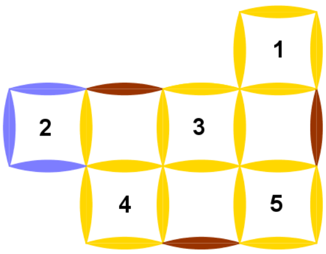




SOLUCIÓ<u>N</u>:



Basta quitar los palillos de color marrón.
La solución no es única:
- los dos palillos eliminados del cuadrado 2 también se podrían haber quitado en el 5 o en el 7.
-el del cuadrado 6 podría haber sido del 3 o del 4, con la condición de que no sea de un cuadrado contiguo al que hayamos quitado los dos.

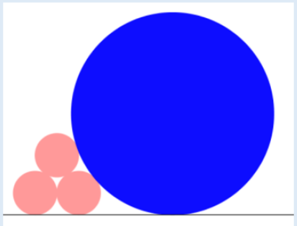


Igual que antes quitamos los palillos marrones, pero ahora los colocamos en las posiciones azules.
La solución tampoco es única. El nuevo cuadrado se puede colocar en seis posiciones, dos en cada uno de los cuadrados 2, 5 y 7.
Los otros dos palillos corresponderían a dos de los cuadrados 3, 4 o 6.

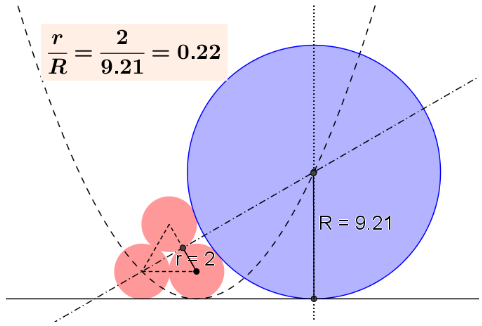
28 ggb

Tenemos 3 circunferencias de radio r tangentes dos a dos, y dos de ellas tangentes a una recta. Una circunferencia grande, de radio R, es tangente a dos de las anteriores y tangente a la recta. Calcula la proporción entre el radio de una circunferencia pequeña y el de la grande.

29



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:



Pasos a seguir:

1. Lo primero, dibujamos el triángulo equilátero cuyos vértices serán los centros de las tres circunferencias pequeñas.
2. Hallamos los puntos medios de los lados para poder dibujar las circunferencias.
3. Trazamos la recta tangente a las dos de la base.
4. Para la circunferencia grande tendremos en cuenta que al ser tangente a las pequeñas, su centro estará en la mediatriz del lado del triángulo más próximo a ella.
5. También se cumple que los centros de dos circunferencias tangentes entre sí y también a una recta, se encuentran sobre una parábola con centro en la circunferencia pequeña que ya tenemos y vértice en el punto de tangencia de la circunferencia y la recta. La dibujamos. (Necesitaremos la directriz de la parábola que es la recta simétrica por la recta tangente a las circunferencias, de la que pasa por la base del triángulo equilátero que hemos usado para dibujar las circunferencias pequeñas).
6. Hallamos el centro de la circunferencia como intersección de la mediatriz y la parábola.
7. Para el punto que necesitamos para dibujarla, trazamos la perpendicular a la recta de la base que pase por el centro de la circunferencia.

SOLUCIÓN ANALÍTICA:

Sea O el centro de la circunferencia grande y $\overline{OT_1} = R$ el radio.

Sea P el centro de la circunferencia pequeña tangente a la recta y a la circunferencia grande, $\overline{PT_2} = r$ el radio.

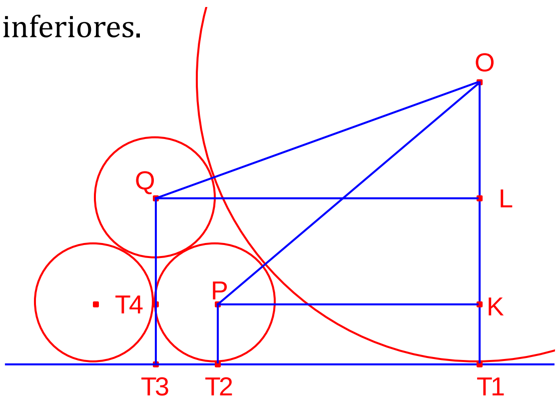
Sea Q el centro de la circunferencia pequeña tangente a la grande y a las dos inferiores.

Sea T_3 la proyección de Q sobre la recta.

Sea T_4 el punto de tangencia de las circunferencias inferiores.

Sea K la proyección de P sobre $\overline{OT_1}$

Sea L la proyección de Q sobre $\overline{OT_1}$



Llamamos $x = \overline{T_1T_2}$

$\overline{OK} = R - r, \quad \overline{OP} = R + r$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PKO}$

$(R + r)^2 = x^2 + (R - r)^2$. Simplificando:

$4Rr = x^2$ (1)

Los centros de las tres circunferencias iguales forman un triángulo equilátero de lado 2r.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{QT_4P}$

$\overline{QT_4} = r\sqrt{3}, \overline{QT_3} = r(1 + \sqrt{3})$

$\overline{QL} = x + r, \overline{OL} = R - (1 + \sqrt{3})r$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{QLO}$

$(R + r)^2 = (x + r)^2 + \left(R - (1 + \sqrt{3})r\right)^2$. Simplificando:

$2Rr = x^2 + 2xr + (4 + 2\sqrt{3})r^2 - 2(1 + \sqrt{3})Rr$

Sustituyendo la expresión (1) en la expresión anterior y simplificando:

$-2Rr = 2xr + (4 + 2\sqrt{3})r^2 - 2(1 + \sqrt{3})Rr$

$x = R\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})r$ (2)

Sustituyendo la expresión (2) en la expresión (1):

$4Rr = \left(R\sqrt{3} - (2+\sqrt{3})r\right)^2.$

Simplificando:

$(7+4\sqrt{3})r^2 + (-10-4\sqrt{3})Rr + 3R^2 = 0$

$r^2 + (-22+12\sqrt{3})Rr + (21-12\sqrt{3})R^2 = 0$

Dividiendo por R^2:

$\left(\frac{r}{R}\right)^2 + (-22+12\sqrt{3})\frac{r}{R} + (21-12\sqrt{3}) = 0$

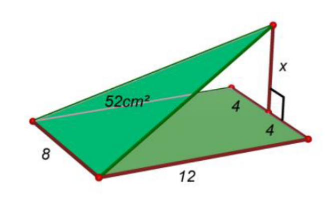
Resolviendo la ecuación:

$\frac{r}{R} = 21 - 12\sqrt{3} \cong 0{,}22$

30**

31

La figura está formada por un rectángulo de dimensiones 12×8 cm y un triángulo de área 52 cm^2. Calcula la longitud del segmento x.



SOLUCIÓN:

$\overline{BK} = \overline{AK}$

Sea N el punto medio del lado $\overline{AB}$

Sea $\overline{NK} = h$

El área del triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABK}$ es:

$S_{ABK} = 52 = \frac{1}{2} \cdot 8h$

$h = 13$

$\overline{NM} = \overline{BC} = 12$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{NMK}$:

$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$