

SOLUCIONS – MAIG 2025

1**

Es tiren tres daus i ixen tres resultats diferents. Quina és la probabilitat d'haver obtingut un sis?



SOLUCIÓ:

Calculem el nombre de resultats possibles on els tres daus mostren números diferents:

Primer dau: 6 opcions. Segon dau: 5 opcions (qualsevol nombre excepte el que ha eixit en el primer dau). Tercer dau: 4 opcions (qualsevol nombre excepte els dos que han eixit en els altres daus).

El nombre de resultats on tots els daus mostren números diferents és $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Ara, volem comptar els casos en què un dels daus mostra un 6. Suposem que apareix en el primer dau:

Primer dau: 1 opció (el 6). 2n dau: 5 (qualsevol núm. diferent de 6). 3r: 4 (nombre diferent dels altres).

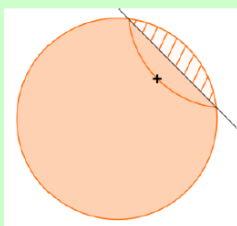
Però el 6 pot estar en qualsevol dels tres daus, per la qual cosa el nombre de resultats favorables on un dels daus és un 6 és: $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Aleshores la probabilitat d'haver obtingut un 6 és: $P = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} = 0.5$

2*

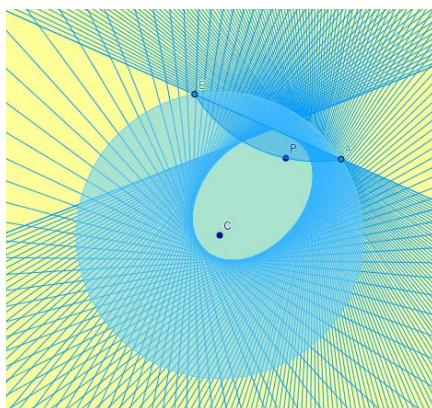
Retalla un cercle de paper. Marca un punt que no coincidisca amb el centre. Ves doblegant el paper perquè la vora del cercle passe per aquest punt i marca la corda del cercle que obtens cada vegada. Quina figura obtens?

3



SOLUCIÓ:

Obtindrem una el·lipse.



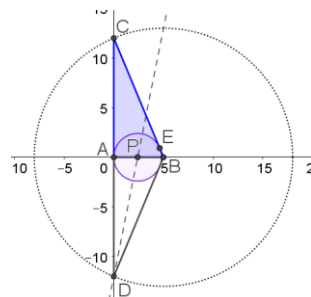
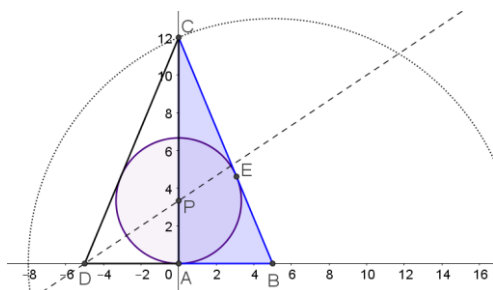
5 ggb

Donat un triangle rectangle de 13 cm d'hipotenusa i 5 cm de catet, construeix totes les circumferències que siguin tangents a la hipotenusa, passen pel vèrtex de l'angle recte i tinguen el centre en un catet.

6



SOLUCIÓ:



Per resoldre-ho, només cal pensar que, si formem un triangle isòsceles unint el triangle rectangle i el seu simètric, la circumferència inscrita en ell complirà les condicions que ens demanen.

Podrem trobar dues solucions diferents segons el catet amb el qual fem la simetria.

Passos a seguir:

1. Per dibuixar el triangle rectangle, començarem pel catet conegut dibuixant un segment entre els punts A(0,0) i B(5,0).
2. Per a la hipotenusa, dibuixem una circumferència centrada en B amb radi 13. El punt en què talla l'eix d'ordenades serà el vèrtex C que ens falta. Obtenim C(0,12).
3. Dibuixem el simètric del triangle respecte a l'eix d'ordenades i obtenim el triangle isòsceles de vèrtexs B, C i D en el qual inscriurem la circumferència.
4. El centre de la circumferència és el punt d'intersecció de les bisectrius. Ja en tenim una (l'eix d'ordenades). Dibuixem la bisectriu de l'angle a B, i amb la intersecció d'ambdues obtindrem el centre de la circumferència P.
5. La circumferència tindrà centre a P i passarà pel punt A. Ja podem dibuixar-la.

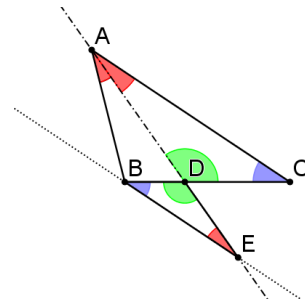
Per obtenir l'altra solució procedirem manera semblant. Aquesta vegada, però, en lloc de fer la simetria del triangle respecte a l'eix d'ordenades, la farem respecte a l'eix d'abscisses.

7***

En un triangle ABC, es dibuixa la bisectriu AD, on D és el punt d'intersecció de la bisectriu de l'angle A amb el costat BC.

Demostra que es compleix $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

8



SOLUCIÓ:

Per B, dibuixem una paral·lela al costat AC, que talla la bisectriu AD en el punt E.

Els angles $\widehat{CAD} = \widehat{AEB}$ son alterns interns i $\widehat{ADC} = \widehat{BDE}$ oposats pel vèrtex.

Els triangles ADC i BDE tenen els mateixos angles i, per tant, són semblants:

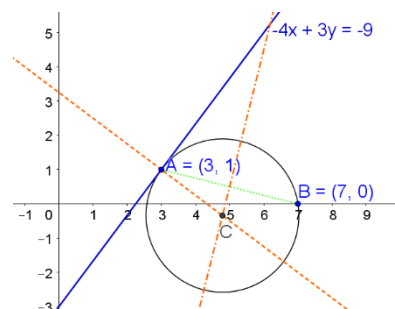
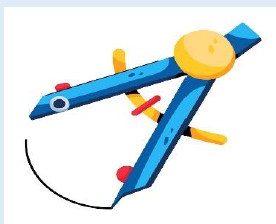
$$\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{AC} = \frac{DE}{AD}$$

El triangle ABE és isòsceles ja que té dos angles iguals i, per tant, AB=BE

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

9 ggb

Construeix una circumferència que siga tangent a la recta $4x - 3y = 9$ en el punt A d'abscissa $x = 3$ i que passe pel punt $B(7,0)$.

10**SOLUCIÓ:**

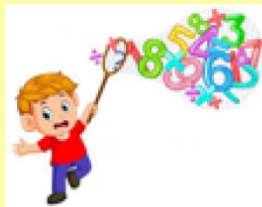
Per poder dibuixar la circumferència tindrem en compte dues coses:

1. Si ha de ser tangent a la recta en A, el radi de la circumferència que arriba al punt A és perpendicular a la recta.
2. Si A i B són dos punts de la circumferència, la mediatriu de la corda que els uneix passa pel centre de la circumferència.

Així que, per dibuixar-la, traçarem la perpendicular a la recta per A i la mediatriu del segment AB. El punt d'intersecció d'ambdues és el centre de la circumferència. Com que tenim dos punts d'aquesta (A i B), podem traçar-la.

12**

Troba totes les ternes de números naturals a, b, c que siguin diferents, d'una sola xifra i que complisquen: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$

13**SOLUCIÓ:**

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a-b}{c}$$

Com que els tres números són naturals i diferents i $a > a - b$, podem deduir que la fracció $\frac{a-b}{c}$ resulta de simplificar $\frac{a}{b}$.

S'ha de complir que $a > b > c$ i $\frac{a}{b}$ ha de poder simplificar-se, és a dir, a i b han de tindre algun divisor comú.

De tot això deduïm que els possibles valors per a a són els naturals des del 3 fins al 9. Les opcions per a b han de ser nombres naturals menors que a que, a més, permeten simplificar la fracció $\frac{a}{b}$.

Vegem les possibles opcions:

a	b	$a - b$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a - b}{c}$	c	Vàlid S/N	Ternes vàlides a, b, c
9	6	3	$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	S	9, 6, 2
	3	6	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{6}{2} = 3$	2	S	9, 3, 2
8	6	2	$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$	$\frac{2}{—}$	$\nexists$	N	
	4	4	$\frac{8}{4} = 2$	$\frac{4}{2} = 2$	2	S	8, 4, 2
	2	6	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{6}{—}$	$\nexists$	N	
7	$\nexists$					N	
6	3	3	$\frac{6}{3} = 2$	$\frac{3}{—}$	$\nexists$	N	
	2	4	$\frac{6}{2} = 3$	$\frac{4}{—}$	$\nexists$	N	
5	$\nexists$					N	
4	2	2	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{2}{1} = 2$	1	S	4, 2, 1
3	$\nexists$					N	

14*

Un tros de paper rectangular es doblega per la meitat per formar un quadrat.
L'àrea del quadrat és 36 cm^2 .
Quin és el perímetre del rectangle original?

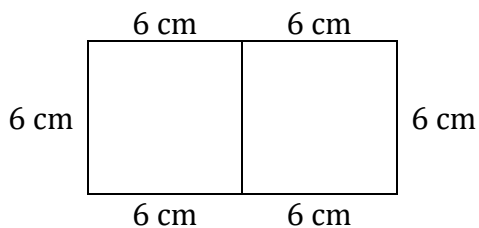
15



SOLUCIÓ:

Com que l'àrea del quadrat és 36 cm^2 , podem deduir que el costat del quadrat mesura 6 cm.

El rectangle original està format per dos quadrats de costat 6 cm units, així que el perímetre serà $6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}$.



16****17**

La suma de vint-i-cinc números consecutius és 2025. Quant sumen el primer i l'últim?
Quin és el número central?

**SOLUCIÓ:**

La suma de vint-i-cinc números consecutius la calculem com:

$$S_{25} = (a_1 + a_{25}) \frac{25}{2} = 2025 \rightarrow a_1 + a_{25} = 2025 \cdot \frac{2}{25} = 162$$

Tenint en compte que el nombre de sumands és imparell, el terme central serà la meitat del valor de la suma del primer i de l'últim, és a dir, $a_{13} = 81$.

19 *****20**

Triem a l'atzar un nombre de quatre xifres, totes senars. L'anomenarem A. Després definirem a partir d'ell dos números més: $B=2 \cdot A$ i $C=2 \cdot B$. Troba la probabilitat que B estiga format per dues xifres parelles i dues senars (en qualsevol ordre) i que C estiga format per quatre xifres parelles.

**SOLUCIÓ:**

El número $C=4 \cdot A$.

Si ha d'estar format només per xifres parelles, el valor més gran possible és 8888. Per tant, A no pot ser més gran que 2222.

Però A està format exclusivament per xifres imparelles, per la qual cosa sabem que la de les unitats de miler ha de ser un 1. Les altres tres xifres poden prendre qualsevol valor amb l'única condició de ser imparelles si volem que el número C no siga més gran que 8888.

La següent condició, que B estiga format per dues xifres parelles i dues senars, només és possible si dues de les xifres d'A són menors que 5 (en multiplicar-les per 2 no passarien de 8) i les altres dues majors o iguals que el cinc perquè en multiplicar i obtenir un nombre més gran o igual que 10, portem una i aconseguim que la xifra següent siga imparella.

L'última condició, que C estiga format per quatre xifres parells, es complirà sempre que les xifres de B siguin totes menors que 5 perquè, en cas contrari, el producte de 2 per les xifres que no siguin menors que 5 faria que el resultat del producte $2 \cdot B$ tinguera alguna xifra imparell:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2n	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Analitzant això, el número A només pot contenir les xifres 1, 1, 5 i 7 amb la condició que un dels 1 és la unitat de miler.

Vegem les combinacions possibles d'aquestes xifres:

A	1155	1515	1551	1157	1175	1517	1715	1571	1751	1177	1717	1771
B	2310	3030	3102	2314	2350	3034	3430	3142	3502	2354	3434	3542
C	4620	6060	6204	4628	4700	6068	6860	6284	7004	4708	6868	7084

Només 8 números compleixen totes les condicions.

Per calcular la probabilitat demanada, només ens falta saber quants números de quatre xifres estan formats només per imparells. Per a cadascuna tenim cinc opcions (1, 3, 5, 7, 9).

La quantitat de números serà $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$.

La probabilitat serà $P = \frac{8}{625}$.

21**

D'un nombre positiu de tres xifres abc sabem que és primer. Quants divisors primers positius tindrà el nombre de sis xifres $abcabc$? I sense la condició que siguin primers?

22



SOLUCIÓ:

Podem posar que $abcabc = abc \cdot 1001$

a) Si factoritzem $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, com sabem que abc és primer, els divisors primers de $abcabc$ seran 7, 11, 13 i abc .

Per tant, hi ha quatre divisors primers.

b) Si eliminem la condició que els divisors siguin primers, podrem tindre:

1, 7, 11, 13, abc , $7 \cdot 11 = 77$, $7 \cdot 13 = 91$, $7 \cdot abc$, $11 \cdot 13 = 143$, $11 \cdot abc$, $13 \cdot abc$, $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, $7 \cdot 11 \cdot abc = 77abc$, $7 \cdot 13 \cdot abc = 91abc$, $11 \cdot 13 \cdot abc = 143abc$, $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot abc = 1001abc = abcabc$

El número total de divisors és setze.

Una altra manera de comptar el nombre de divisors (la millor quan hi ha molts divisors):

Donat que $abcbac = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot abc$ té quatre factors primers, tots amb exponent 1, el nombre de divisors és $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

23*

Quants números de quatre xifres hi ha, de manera que el producte de les quatre xifres siga major que 0 i menor que 10?

24



SOLUCIÓ:

Producte	Factors	Nombres						Total
1	1, 1, 1, 1	1111						1
2	1,1,1, 2	1112	1121	1211	2111			4
3	1, 1, 1, 3	1113	1131	1311	3111			4
4	1, 1, 1, 4	1114	1141	1411	4111			4
	1, 1, 2, 2	1122	1212	1221	2112	2121	2211	6
5	1, 1, 1, 5	1115	1151	1511	5111			4
6	1, 1, 1, 6	1116	1161	1611	6111			4
	1, 1, 2, 3	1123	1213	1231	2113	2131	2311	12
		1132	1312	1321	3112	3121	3211	
7	1, 1, 1, 7	1117	1171	1711	7111			4
8	1, 1, 1, 8	1118	1181	1811	8111			4
	1, 1, 2, 4	1124	1214	1241	2114	2141	2411	12
		1142	1412	1421	4112	4121	4211	
	1, 2, 2, 2	1222	2122	2212	2221			4
9	1, 1, 1, 9	1119	1191	1911	9111			4
	1, 1, 3, 3	1133	1313	1331	3113	3131	3311	6

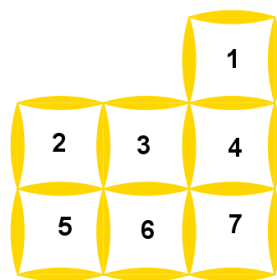
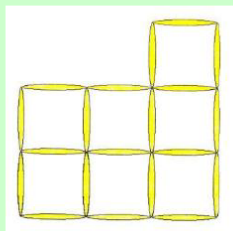
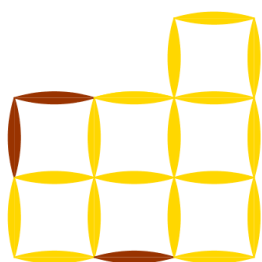
En total podem trobar 73 números.

26*

En aquesta figura hi ha 20 escuradents que formen 7 quadrats iguals.

a) Eliminant tres escuradents, has de deixar cinc quadrats iguals.

b) Partint de la figura inicial, has de moure tres escuradents, sense eliminar-los, per aconseguir també cinc quadrats iguals.

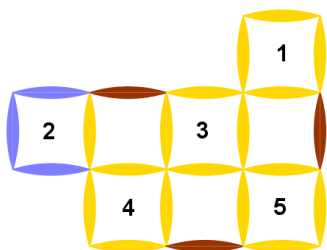
27**SOLUCIÓ:**

Només cal treure els escuradents de color marró.

La solució no és única:

-els dos escuradents eliminats del quadrat 2 també es podrien haver tret del 5 o del 7.

-el del quadrat 6 podria haver estat del 3 o del 4, amb la condició que no siga d'un quadrat contigu al que hagem tret els altres dos.



Igual que abans, traiem els escuradents marrons, però ara els col·loquem a les posicions blaves.

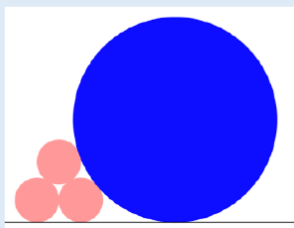
La solució tampoc és única. El nou quadrat es pot col·locar en sis posicions, dues a cadascun dels quadrats 2, 5 i 7.

Els altres dos escuradents correspondrien a dos dels quadrats 3, 4 o 6.

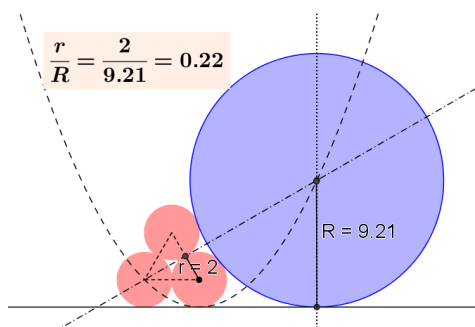
28 ggb

Tenim 3 circumferències de radi r tangents dues a dues, i dues d'elles tangents a una recta. Una circumferència gran, de radi R , és tangent a dues de les anteriors i tangent a la recta. Calculeu la proporció entre el radi d'una circumferència menuda i el de la gran.

29



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:



Passos a seguir:

1. Primer dibuixem el triangle equilàter els vèrtexs del qual seran els centres de les tres circumferències menudes.
2. Trobem els punts mitjans dels costats per poder dibuixar les circumferències.
3. Tracem la recta tangent a les dues de la base.
4. Per a la circumferència gran tindrem en compte que, en ser tangent a les menudes, el seu centre estarà en la mediatriu del costat del triangle més proper a ella.
5. També es compleix que els centres de dues circumferències tangents entre si i també a una recta, es troben sobre una paràbola amb centre a la circumferència menuda que ja tenim i vèrtex al punt de tangència de la circumferència i la recta. La dibuixem. (Necessitarem la directriu de la paràbola que és la recta simètrica per la recta tangent a les circumferències, de la que passa per la base del triangle equilàter que hem fet servir per dibuixar les circumferències menudes).
6. Trobem el centre de la circumferència com a intersecció de la mediatriu i la paràbola.
7. Per al punt que necessitem per dibuixar-la, tracem la perpendicular a la recta de la base que passe pel centre de la circumferència.

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Siga O el centre de la circumferència gran i $\overline{OT_1} = R$ el radi.

Siga P el centre de la circumferència menuda tangent a la recta i a la circumferència gran i $\overline{PT_2} = r$ el radi.

Siga Q el centre de la circumferència menuda tangent a la gran i a les dues inferiors.

Siga T_3 la projecció de Q sobre la recta.

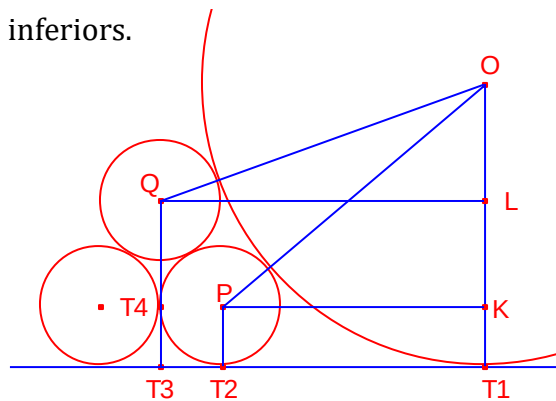
Siga T_4 el punt de tangència de las circumferències inferiors.

Siga K la projecció de P sobre $\overline{OT_1}$

Siga L la projecció de Q sobre $\overline{OT_1}$

Anomenem $x = \overline{T_1T_2}$

$$\overline{OK} = R - r, \quad \overline{OP} = R + r$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKO}$:

$$(R + r)^2 = x^2 + (R - r)^2.$$

$$\text{Simplificant: } 4Rr = x^2 \quad (1)$$

Els centres de les tres circumferències iguals formen un triangle equilàter de costat $2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QT_4P}$:

$$\overline{QT_4} = r\sqrt{3}, \quad \overline{QT_3} = r(1 + \sqrt{3})$$

$$\overline{QL} = x + r, \quad \overline{OL} = R - (1 + \sqrt{3})r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QLO}$:

$$(R + r)^2 = (x + r)^2 + (R - (1 + \sqrt{3})r)^2. \text{ Simplificant:}$$

$$2Rr = x^2 + 2xr + (4 + 2\sqrt{3})r^2 - 2(1 + \sqrt{3})Rr$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió anterior i simplificant:

$$-2Rr = 2xr + (4 + 2\sqrt{3})r^2 - 2(1 + \sqrt{3})Rr$$

$$x = R\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})r \quad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$4Rr = (R\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})r)^2.$$

Simplificant:

$$(7 + 4\sqrt{3})r^2 + (-10 - 4\sqrt{3})Rr + 3R^2 = 0$$

$$r^2 + (-22 + 12\sqrt{3})Rr + (21 - 12\sqrt{3})R^2 = 0$$

Dividint per R^2 :

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 + (-22 + 12\sqrt{3})\frac{r}{R} + (21 - 12\sqrt{3}) = 0$$

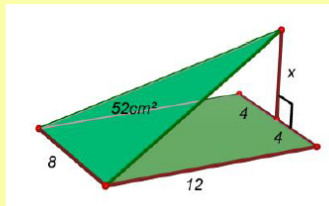
Resolent l'equació:

$$\frac{r}{R} = 21 - 12\sqrt{3} \cong 0,22$$

30**

La figura està formada per un rectangle de dimensions 12×8 cm i un triangle d'àrea 52 cm^2 .
Calcula la longitud del segment x .

31



SOLUCIÓ:

$$\overline{BK} = \overline{AK}$$

Siga N el punt mitjà del costat $\overline{AB}$

$$\text{Siga } \overline{NK} = h$$

L'àrea del triangle isòsceles $\triangle ABK$ és:

$$S_{ABK} = 52 = \frac{1}{2} \cdot 8h$$

$$h = 13$$

$$\overline{NM} = \overline{BC} = 12$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle NMK$:

$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

