

SOLUCIONS – JUNY 2025

2*
 Escriu, ordenats de menor a major, tots els números de sis xifres que es poden formar amb les xifres 1, 2, 2, 3, 3, 3.

3


Solució:

122333						1
123233	123323	123332				3
132233	132323	132332				3
133223	133232	133322				3
212333						1
213233	213323	213332				3
221333						1
223133	223313	223331				3
231233	231323	231332				3
232133	232313	232331				3
233123	233132	233213	233231	233312	233321	6
312233	312323	312332				3
313223	313232	313322				3
321233	321323	321332				3
322133	322313	322331				3
323123	323132	323213	323231	323312	323321	6
331223	331232	331322				3
332123	332132	332213	332231	332312	332321	6
333122	333212	333221				3
Total						60

4***

Un dia me'n vaig anar de compres amb aproximadament 15 euros, distribuïts en monedes d'1 euro i de 20 cèntims. En tornar tenia la mateixa quantitat de monedes d'1 euro que la que tenia de 20 cèntims al principi i viceversa. Però només em quedava un terç dels diners amb què vaig eixir. Quant em vaig gastar exactament?

5**Solució:**

Suposem que me'n vaig anar de compres amb a monedes d'1 euro i b de 20 cèntims. Aleshores portava, en total, $(100a + 20b)$ cèntims. Al tornar tenia b monedes d'1 euro i a de 20 cèntims; és a dir, $(100b + 20a)$ cèntims en total.

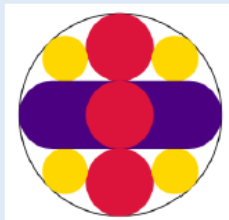
Com la primera quantitat és el triple que la segona, resulta:

$$3 \cdot (100b + 20a) = 100a + 20b. \text{ Simplificant, obtenim que } a = 7b.$$

Estudiem ara les distintes possibilitats. Sabent que a i b són nombres naturals: si $b=1$, aleshores $a=7$, i hauria eixit amb 7,20 euros, que NO s'aproxima a 15; per a $b=3$ resulta $a=21$ i serien 21,60 euros, també allunyat de 15. Per tant, els únics valors que compleixen l'enunciat són $b=2$ i $a=14$. Això ens dona un valor total inicial de 14,40 euros, la qual cosa significa que ens hem gastat exactament **9 euros i 60 cèntims**.

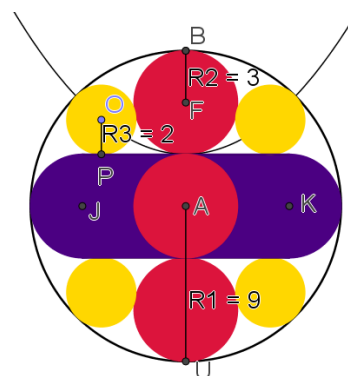
6 ggb

En la figura adjunta hi ha huit cercles. Calcula la relació entre els tres tipus de radis.

7**Solució amb geogebra:**

Passos a seguir:

1. Comencem per dibuixar les tres circumferències roges. La central amb centre en $A(0,0)$ i radi 3.
2. La gran externa està centrada també en A , però amb radi triple que el de la roja, és a dir, radi 9.
3. La peça blava resulta de dibuixar les tres circumferències tangents sobre l'eix d'abscisses centrades en A , J i K . Després, la recta tangent a totes tres, tant per dalt com per baix.



Perquè es veja tal com està en el dibuix, la circumferència central roja la col·loquem en una capa superior en la pestanya d'*avanzado*. Tracem un rectangle i acolorim tant el rectangle com les dues circumferències externes en blau.

4. Per a les grogues, tenim en compte que són tangents a una recta i a una roja, per la qual cosa el seu centre és a la paràbola amb focus en el punt F, centre de la circumferència, i vèrtex en el punt de contacte de la circumferència roja i la recta. La directriu de la paràbola coincidirà amb l'eix d'abscisses. La dibuixem.
5. Marquem un punt sobre la paràbola i fem la perpendicular a l'horitzontal i trobem el punt d'intersecció de les dues rectes. Amb aquests dos punts, tracem la circumferència. Només cal desplaçar el centre de la circumferència fins que siga tangent a la circumferència exterior.

Els radis són 9, 3 i 2. La relació serà 9:3:2.

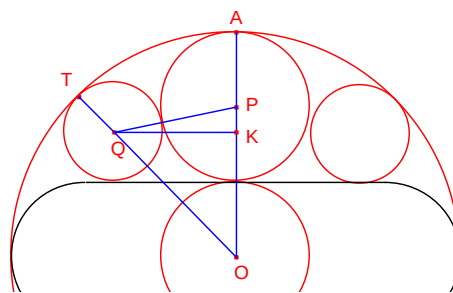
Solució analítica:

Siguen $\overline{OA} = R$, $\overline{PA} = r$, $\overline{QT} = s$
els radis dels tres tipus de circumferència.

$$R = 3r$$

$$\overline{PQ} = r + s, \quad \overline{OQ} = 3r - s,$$

$$\overline{OK} = r + s, \quad \overline{KP} = r - s$$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\triangle QKP$, $\triangle QKO$:

$$(r + s)^2 - (r - s)^2 = \overline{KQ}^2 = (3r - s)^2 - (r - s)^2$$

$$r^2 + 2rs + s^2 - (r^2 - 2rs + s^2) = 9r^2 - 6rs + s^2 - (r^2 - 2rs + s^2)$$

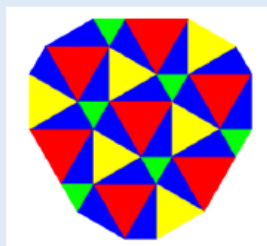
$$8r^2 - 12rs = 0 \rightarrow s = \frac{8r^2}{12r} = \frac{2r}{3}$$

$$r = \frac{3}{2}s$$

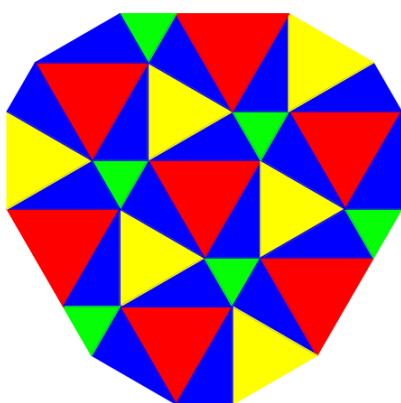
$$R : r : s = 9 : 3 : 2$$

9 ggb 10

La figura adjunta està descomposta en triangles rectangles amb hipotenusa de 4 cm i un angle de 60° i triangles equilàters. Calcula el perímetre i la superfície total del dibuix.



Solució:



Costat roig=4
Costat groc=3.46
Costat verd=2

Perímetre=
=3·costat roig+6·costat groc+6·costat verd=
=3·4+6·3.46+6·2=44.78

Àrea=152.42

Per trobar l'àrea farem el dibuix i dibuixarem el polígon extern. En la vista algebraica tindrem el valor de l'àrea com *polígono20*=152.42.

Per al perímetre, tindrem en compte que el costat dels triangles rojos coincideix amb la hipotenusa del triangle rectangle, el dels grocs amb el catet major i el dels verds amb el catet menor.

Passos per fer el dibuix:

1. Dibuixem un segment de longitud 4 que serà la hipotenusa. El més fàcil, que vaja des del punt A(0,0) fins a B(4,0).
2. Des d'un dels vèrtexs dibuixem l'angle de 60°. La perpendicular a la recta que determina l'angle i que passa per l'altre vèrtex ens dona el vèrtex que falta, el de l'angle recte. Ja podem dibuixar el triangle rectangle.
3. Des de cadascun dels costats, amb polígon regular dibuixem els tres equilàters que l'envolten.
4. Rotant 60° el triangle equilàter al voltant del centre de qualsevol dels equilàters podem aconseguir els que l'envolten.
5. Seguint el mateix procés completem el dibuix.
6. Per a la superfície dibuixem el polígon que envolta la imatge.
7. Per al perímetre, només cal prendre de la vista algebraica la longitud de cada segment i sumar-ho.

11****12**

Trobeu el nombre natural més menut que es pot obtenir amb la suma de cinc nombres naturals diferents que complisquen que la suma de les xifres en cadascun dels cinc dona el mateix resultat. (Ex.: en 241 i 106, la suma de les xifres és 7).

**Solució:**

1. La suma de las xifres és 1. Els únics nombres possibles són del tipus de la unitat seguida de zeros.
 $1+10+100+1000+10000=11111$
 2. La suma de las xifres és 2. Podem tindre un dos i zeros o dos uns i zeros. Els menors possibles són:
 $2+11+20+101+110=244$
 3. La suma de les xifres és 3. Podem tindre un tres i zeros; un dos, un u i zeros; o tres uns i zeros:
 $3+12+21+30+102=168$
 4. La suma de las xifres és 4:
 $4+13+22+31+40=110$
 5. La suma de las xifres és 5:
 $5+14+23+32+41=115$
 6. La suma de las xifres és 6:
 $6+15+24+33+42=120$
 7. La suma de las xifres és 7:
 $7+16+25+34+43=125$
- Es fàcil vore que cada vegada la suma serà major. Per tant, la menor suma que podrem obtindre serà el 110.

13*****14**

En una bossa hi ha 100 boles de tres colors: groc, roig i verd. A) hi ha més verdes que el doble de grogues. B) el triple de les grogues és major que el quàdruple de les roges. C) El triple de les roges és major que el nombre de verdes. Quantes n'hi ha de cada color?

**Solució:**

Anomenarem G al nombre de boles grogues, R al de roges i V al de verdes.

1) Sabem que es compleix

$$\begin{cases} G + R + V = 100 \\ V > 2G \end{cases} \rightarrow G + R + 2G < 100 \rightarrow 3G + R < 100$$

Com $3G > 4R$, podem deduir que $4R + R < 100 \rightarrow 5R < 100 \rightarrow R < 20$

2) De la mateixa manera,

$$\begin{cases} G + R + V = 100 \\ V < 3R \end{cases} \rightarrow G + R + 3R > 100 \rightarrow G + 4R > 100$$

Aplicant ara que $3G > 4R$, obtenim que $G + 3G > 100 \rightarrow 4G > 100 \rightarrow G > 25$

3) De $V > 2G$ deduïm que $V > 50$

Si agafem els primers valors possibles per a R i G: $R=19$, $G=26$, tindrem que el valor de V ha de ser 55.

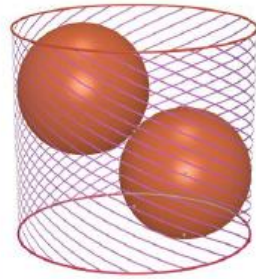
Comprovant totes les condicions, veiem que es compleixen totes:

$$\begin{aligned} V &= 55 > 2G = 2 \cdot 26 = 52 \\ 3G &= 3 \cdot 26 = 78 > 4R = 4 \cdot 19 = 76 \\ 3R &= 3 \cdot 19 = 57 > V = 55 \end{aligned}$$

La solució és, doncs, que hi ha 19 roges, 26 grogues i 55 verdes.

16****17**

La figura està formada per un cilindre de radi 4.5 cm i dues esferes iguals de radi 2.5 cm que caben justes en el cilindre. Calcula el volum que hi ha entre el cilindre i les esferes.

**Solució:**

Anomenem R al radi del cilindre i r al d'una esfera.

$$R = \overline{OK} = \frac{9}{2}, \overline{AB} = 2r = 2 \cdot 2.5 = 5,$$

$$\overline{BC} = 2 \cdot R - 2 \cdot r = 9 - 5 = 4$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

$$\overline{OP} = 2r + \overline{AC} = 5 + 3 = 8$$

El volum del cilindre és:

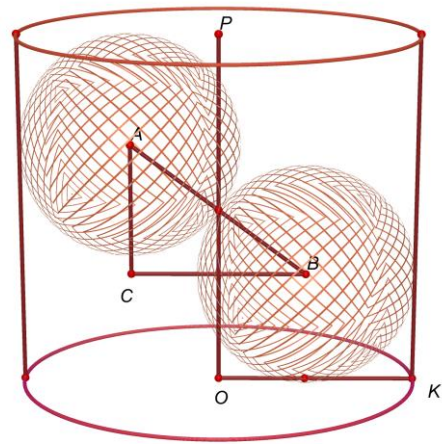
$$V_{cilindre} = \pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot 8 = 162\pi$$

El volum d'una esfera és:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{6}\pi$$

El volum que busquem és:

$$V = V_{cilindre} - 2 \cdot V_{esfera} = \frac{361}{3}\pi$$



18***19**

Un joc consisteix a traure boles, una a una i a l'atzar, d'una caixa que conté boles blanques i roges. Per guanyar cal traure dues boles roges consecutives o traure'n dues blanques sense importar l'ordre. De quantes maneres diferents es pot guanyar?

**Solució:**

Hi ha set formes de guanyar:

1. **B B**
2. **B R R**
3. **B R B**
4. **R R**
5. **R B B**
6. **R B R R**
7. **R B R B**

20****21**

Si la mitjana aritmètica de quinze nombres naturals diferents és 13, quin és el valor màxim que pot prendre el segon nombre més gran d'aquests quinze naturals?

**Solució:**

Sabem que $\bar{x}_{15} = \frac{S_{15}}{15} = 13$.

Per tant, la suma dels 15 nombres és $S_{15} = 13 \cdot 15 = 195$.

Si els ordenem de menor a major, i sabent que els quinze números són diferents, la manera d'aconseguir que els dos últims siguin més grans és reduir tot el possible els tretze primers, és a dir, que siguin els naturals de l'1 al 13.

Si els sumem obtindrem $S_{13} = \frac{13}{2} \cdot (1 + 13) = 91$.

Si restem $S_{15} - S_{13} = 195 - 91 = 104$ és el que sumaran els dos més grans. Com que és un resultat parell, els dos números han de tindre la mateixa paritat, i, per aconseguir que el penúltim siga el més gran possible, l'últim ha de ser dues unitats major.

De tot açò deduïm que els nombres són 51 i 53.

El major valor que pot prendre el segon nombre més gran serà 51.

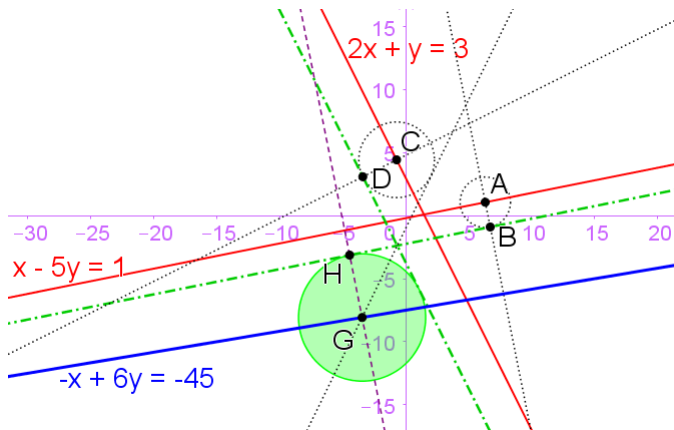
23 ggb

Construeix una circumferència el centre de la qual pertanga a la recta $x - 6y = 45$, i la distància mínima de la qual a la recta $x - 5y = 1$ és de 2 unitats i a la recta $2x + y = 3$ és de 3 unitats.

24



Solució:



Passos a seguir:

1. El primer és introduir les tres rectes (a la barra d'entrada). Per distingir-les, en blau la que conté el centre de la circumferència buscada i en roig les altres dues.

La circumferència serà tangent a una paral·lela a cadascuna de les dues rectes que es trobe a la distància indicada: 2 unitats per a $x - 5y = 1$ i 3 unitats per a $2x + y = 3$.

2. Marquem un punt qualsevol A sobre la recta $x - 5y = 1$.
Dibuixem una circumferència centrada a A amb radi 2.
Tracem la perpendicular a $x - 5y = 1$ per A i el punt B en què talla a la circumferència pertanyerà a la recta paral·lela a $x - 5y = 1$ que busquem.
Tracem la paral·lela a $x - 5y = 1$ per B. L'acolorim en verd.
3. Actuem de la mateixa manera amb la recta $2x + y = 3$. Els punts ara són C i D i la circumferència té radi 3.
Tracem la recta paral·lela a $2x + y = 3$ per D i l'acolorim en verd.

La circumferència que busquem ha de ser tangent a les dues rectes verdes, per la qual cosa el seu centre ha d'estar en la bisectriu de l'angle de tall d'ambdues. La tracem.

4. El centre de la circumferència ha d'estar tant en la bisectriu com en la recta $x - 6y = 45$, és a dir, estarà en el punt G d'intersecció d'ambdues.

5. Per trobar un punt de la circumferència H, només cal traçar la perpendicular per G a una de les dues rectes verdes i trobar la intersecció.
6. Ja podem dibuixar-la.

25**

26

Se sap que l'alçada, la llargària i l'amplària d'un prisma de base rectangular són tres nombres naturals consecutius. El seu volum és 15 600 u³.
Calcula l'àrea total de la superfície del prisma.



Solució:

Per tindre dimensions tan semblants el prisma és pràcticament un cub. Tenint en compte que

$\sqrt[3]{15600} \approx 24,99 \dots$ obtenim fàcilment que les dimensions són

$$24 \cdot 25 \cdot 26 = 15\,600 \text{ u}^3.$$

Aleshores l'àrea total de la superfície és $2 \cdot (24 \cdot 25 + 25 \cdot 26 + 24 \cdot 26) = 3\,748 \text{ u}^2$.

27*

28

Després-ahir Carla tenia 15 anys, i l'any que ve en farà 18. Quin dia és hui?

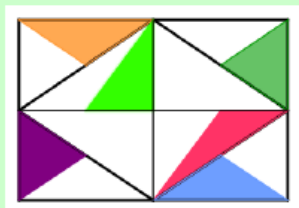


Solució:

Després-ahir	Ahir	Hui	Aquest any	L'any que ve
15 anys	16 anys	16 anys	17 anys	18 anys
30 desembre	31 desembre	1 gener	31 desembre	31 desembre
	L'aniversari		L'aniversari	L'aniversari

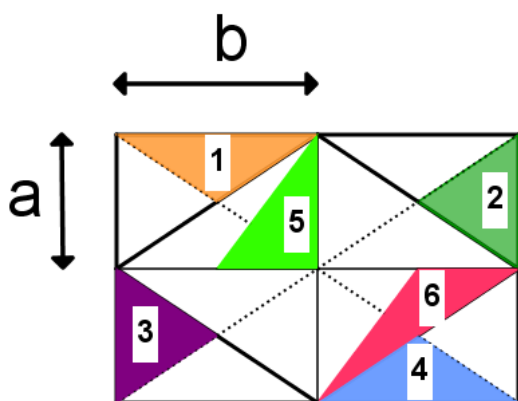
30*

En el rectangle de la imatge hi ha diversos triangles pintats. Ordena'ls de menor a major superfície. Quin percentatge del rectangle està pintat?



Solució:

Tots els triangles acolorits ocupen la mateixa superfície.



$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4} \\
 S_2 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4} \\
 S_3 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4} \\
 S_4 &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4} \\
 S_5 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot a = \frac{ab}{4} \\
 S_6 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot a = \frac{ab}{4}
 \end{aligned}$$

Si tracem les dues diagonals del rectangle, juntament amb els costats del rombe interior, veiem que queda dividit en 16 triangles de la mateixa superfície. En total tenim 6 acolorits, per la qual cosa el percentatge demanat és $P = \frac{6}{16} = 0.375 = 37.5\%$.