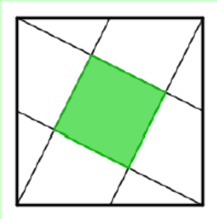
SOLUCIONES – SEPTIEMBRE 2025

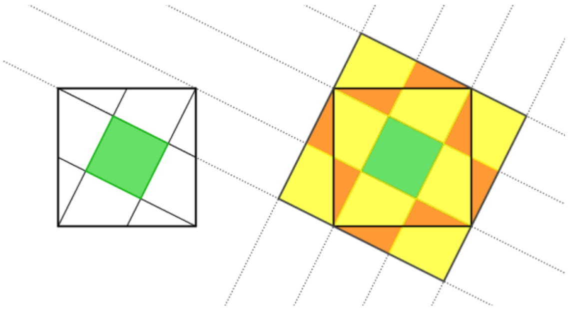
1* **2**

En un cuadrado de 1 dm² de superficie unimos los vértices con los puntos medios de los lados, como se ve en la figura, y se forma un cuadrado más pequeño. ¿Cuál es su superficie?



SOLUCIÓN:

Si nos fijamos en la figura de la derecha, podemos ver que, al unir un triángulo naranja con un cuadrilátero amarillo, obtenemos un cuadrado del mismo tamaño que el verde central.
El cuadrado de 1 dm² de superficie estará dividido en cinco cuadrados iguales, por lo que la superficie del cuadrado verde es de 1/5 dm².



3* ** **4**

En cada vértice de un triángulo se ha escrito un número natural, en cada lado el producto de los números que hay en sus extremos, y dentro del triángulo el producto de los números que hay en los vértices. La suma de los siete números es 2034. ¿Qué números se han escrito en los vértices del triángulo?

SOLUCIÓN:

Sean a, b, c los números escritos en los vértices del triángulo.

La siguiente igualdad se desprende de la condición:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c = 2034$$

Es una ecuación con números enteros que resolvemos por factorización:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 2035 \quad \Leftrightarrow$$
$$ab(c+1) + a(c+1) + b(c+1) + (c+1) = 5 \cdot 11 \cdot 37 \quad \Leftrightarrow$$
$$(c+1)(ab + a + b + 1) = 5 \cdot 11 \cdot 37 \quad \Leftrightarrow$$
$$(c+1)[a(b+1) + (b+1)] = 5 \cdot 11 \cdot 37 \quad \Leftrightarrow$$
$$(c+1)(b+1)(a+1) = 5 \cdot 11 \cdot 37$$

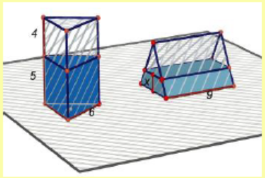
Es evidente que todos los paréntesis de la izquierda son más grandes que 1, y todos los factores de la derecha son números primos. Esto quiere decir que, salvo una permutación, los números a+1, b+1 y c+1 son 5, 11, 37.

Esto significa que los números en los vértices del triángulo son una unidad menos: **4, 10, 36.**

5**

6

La figura está formada por dos prismas regulares iguales (la base es un triángulo equilátero de lado 6 cm y altura 9 cm) que contienen la misma cantidad de agua.
En el de la izquierda la altura del agua es 5 cm. Calcula la altura x del agua en el prisma de la derecha.



SOLUCIÓN:

Calculamos la altura del triángulo equilátero de lado 6 cm:

$$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\ cm$$

El volumen sin agua en los dos prismas debe ser el mismo.

En el prisma de la izquierda:

$$V_{sin\ agua} = área\ base\ triangular \cdot altura\ sin\ agua = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}\right) \cdot 4 = 36\sqrt{3}\ cm^3$$

En el prisma de la derecha, el volumen sin agua corresponde a un prisma de base un triángulo equilátero de lado $c\,(c<6)$, altura 9 y volumen $36\sqrt{3}\,cm^3$.

La altura del triángulo será $h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{3}\ cm$

El volumen del prisma será:

$$V_{sin\ agua} = 36\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3}\right) \cdot 9 = \frac{9c^2}{4}\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad 36 = \frac{9c^2}{4} \quad \rightarrow \quad c^2 = 4^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad c = 4 \quad \rightarrow \quad h = \frac{4}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ cm$$

La altura del agua en el prisma de la derecha será:

$$x = a - h = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\ cm$$

8 ggb

Traza una circunferencia que esté a la misma distancia de los cuatro puntos siguientes: $A(-4,4)$, $B(1,-2)$, $C(-5,-3)$, $D(6,2)$. ¿Cuántas soluciones distintas puedes encontrar?

9

SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

La forma de encontrar una circunferencia equidistante de los cuatro puntos consiste en trazar dos circunferencias concéntricas que contengan a los cuatro puntos. Una vez hecho esto, la que buscamos estará entre las dos.

Los cuatro puntos se pueden repartir de dos formas distintas entre las dos circunferencias:

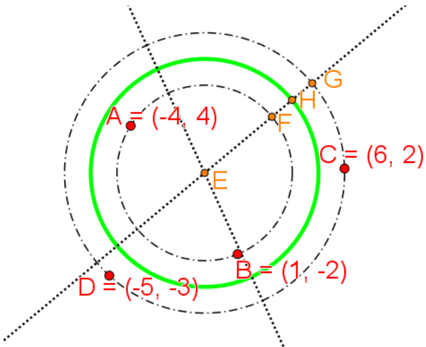
a) Dos en cada una, lo que podremos hacer de tres formas distintas (A con B, A con C y A con D en una de ellas y los dos restantes en la otra).

b) Tres en una y el otro en la otra circunferencia, lo que nos da cuatro circunferencias distintas en función del punto que quede solo.

En total, es posible conseguir 7 circunferencias que cumplan lo que pedimos.

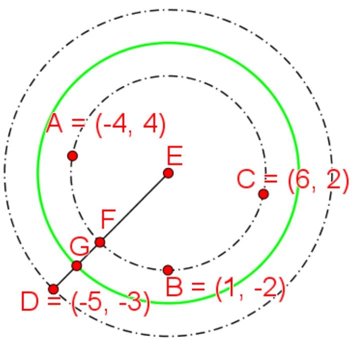
Construcción en el caso *a)* :

1. Empezamos por introducir los cuatro puntos.
2. Trazamos las mediatrices entre A y B y entre C y D. El punto de intersección de ambas E será el centro de las circunferencias. Las dibujamos.
3. Hallamos los puntos de intersección de las dos circunferencias con una de las mediatrices (F y G).
4. Hallamos el punto medio del segmento FG (H) y trazamos la circunferencia con centro en E que pase por H. Es la que buscábamos.



Construcción en el caso *b)*:

1. Empezamos por introducir los cuatro puntos.
2. Trazamos la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.
3. Hallamos el centro de la circunferencia E.
4. Trazamos la circunferencia con centro en E que pase por D.
5. Trazamos el segmento DE y hallamos el punto en que corta a la primera circunferencia F.
6. Hallamos el punto medio del segmento FD (G) y trazamos la circunferencia con centro en E que pase por G. Es la que buscábamos.



10** **11**

Calcula la última cifra del número

$0! + 1! + 2! + \ldots\ldots + 2025!$

Nota: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (*factorial de un número natural, y* $0! = 1$)

SOLUCIÓN:

Por definición, $0! = 1$

La última cifra de una suma es igual a la suma de las últimas cifras de los sumandos. Cuando $n \geq 5$, se cumple que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots\ldots \cdot n = 120 \cdot \ldots\ldots \cdot n$ acaba en 0.

Así, la última cifra de la suma original es igual a la última cifra de la suma:

$0! + 1! + 2! + 3! + 4!$=1+1+2+6+24

que es igual a la suma de las cifras:

$$1 + 1 + 2 + 6 + 4 = 14$$

que es **4.**

12*

El planeta X está dividido en 8 países, cada uno de los cuales ocupa un octante de la esfera y, por tanto, limita con otros 3 países. ¿De cuántas formas puede Andrea salir de su país, visitar todos los demás una única vez y volver a casa?

13

SOLUCIÓN:

Llamaremos a los países A, B, C, D, E, F, G y H. Los cuatro primeros en la mitad sur del planeta y los otros cuatro en la norte, distribuidos de la forma siguiente:

Hemisferio sur	
D	C
A	B

Hemisferio norte	
E	F
H	G

De forma que H está sobre A, G sobre B, F sobre C y E sobre D.

Supondremos que el país de Andrea es el A. Veamos en un diagrama de árbol los posibles caminos:

A	H	E	F – G – B – C – D	1
			D – C – F – G – B	2
		G	B – C – F – E – D	3
			F – E – D – C – B	4
A – D		C	B – G – F – E – H	5
			F – E – H – G – B	6
		E	H – G – F – C – B	7
			F – C – B – G – H	8
A	B	C	D – E – F – G – H	9
			F – G – H – E – D	10
		G	H – E – F – C – D	11
			F – C – D – E – H	12

Andrea tiene 12 formas de hacerlo.

15*

La familia de Carles está formada por 1 abuela, 1 abuelo, 2 madres, 2 padres, 2 hijas, 2 hijos, 3 nietos y nietas, 1 hermano, 2 hermanas, 1 suegro, 1 suegra y 1 nuera. ¿Cuál es el menor número posible de miembros de la familia?

16

SOLUCIÓN:

Pongamos nombres a lo que puede ser el árbol genealógico de la familia de Carles:

Aitor  Berta

↓

Carles  Dunia

↓

| Elisa | Fran | Gloria |

Veamos si así tenemos todos los que dice el enunciado:

1 abuela: Berta

1 abuelo: Aitor

2 madres: Berta y Dunia

2 padres: Aitor y Carles

2 hijas: Elisa y Gloria

2 hijos: Carles y Fran

3 nietos y nietas: Elisa, Fran y Gloria

1 hermano: Fran

2 hermanas: Elisa y Gloria

1 suegro: Aitor

1 suegra: Berta

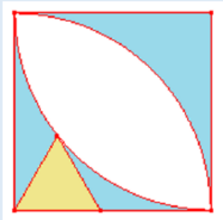
1 nuera: Dunia

Para la solución, a Carles le podríamos haber asignado cualquiera de los papeles de hombres, es decir, podría estar donde Aitor o donde Fran.

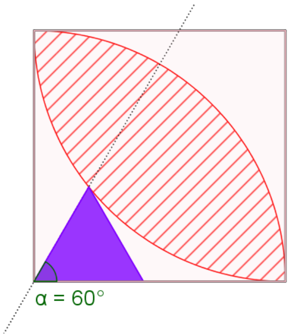
El menor número de integrantes de la familia sería 7 personas.

17 ggb **18**

La figura está formada por un cuadrado, dos arcos de circunferencia (con radio el lado del cuadrado) y un triángulo equilátero. Calcula la relación entre el área del triángulo equilátero y el área del cuadrado.



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

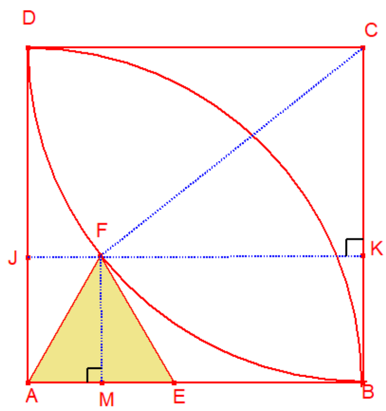


$$\frac{\acute{A}rea\ tri\acute{a}ngulo}{\acute{A}rea\ cuadrado} = \frac{5.2541}{64} = 0.0821$$

Pasos a seguir:

1. Dibujamos el cuadrado con *polígono regular*. De lado 10 cm.
2. Dibujamos los dos arcos de circunferencia.
3. El triángulo, al ser equilátero, tiene ángulos de 60º. Con *ángulo dada la amplitud* lo trazamos en la esquina inferior izquierda del cuadrado.
4. El punto en que la recta que forma el ángulo corta al arco inferior será un vértice del triángulo.
5. Como ya tenemos dos de los vértices, con *polígono regular* lo trazamos.
6. En la barra de entrada introducimos el cociente entre las dos superficies y obtenemos 0.0821.

SOLUCIÓN ANALÍTICA:



$\overline{AB} = 1, \overline{AE} = c$

$\overline{JF} = \overline{AM} = \frac{c}{2}, \overline{MF} = \overline{BK} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$

$\overline{CF} = 1, \overline{FK} = 1 - \frac{c}{2}, \overline{CK} = 1 - \frac{c\sqrt{3}}{2}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{FKC}$:

$$1 = \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Simplificando:

$c^2 - (1 + \sqrt{3})c + 1 = 0$

Resolviendo la ecuación:

$$c = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$$

El área del triángulo equilátero es:

$$S_{AEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot c^2 = \frac{2\sqrt{3}+6-\sqrt{6\sqrt{3}}-3\sqrt{2\sqrt{3}}}{8}$$

La proporción de áreas es:

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABCD}} = \frac{2\sqrt{3}+6-\sqrt{6\sqrt{3}}-3\sqrt{2\sqrt{3}}}{8} \approx 0.0821$$

19**

Encuentra todas las parejas de números naturales a y b que cumplen

a) $MCD\,(a,b) = 36$

b) $MCM\,(a,b) = 216$

20

SOLUCIÓN:

Aplicaremos la propiedad siguiente:

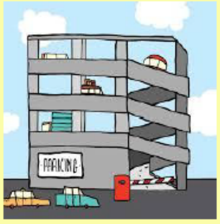
$$a\cdot b = MCD(a,b)\cdot MCM(a,b) = 36\cdot 216 = 2^2\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 3^3 = 2^5\cdot 3^5$$

Que el $MCD(a,b) = 36 = 2^2\cdot 3^2$ nos indica que es la parte común a ambos números, ningún otro factor puede estar a la vez en los dos. Por esto, las opciones para $a\ y\ b$ son:

Parte común	Resto en a	Resto en b	a	b
$2^2\cdot 3^2$	$2^1\cdot 3^1$	1	$2^3\cdot 3^3 = 216$	$2^2\cdot 3^2 = 36$
$2^2\cdot 3^2$	1	$2^1\cdot 3^1$	$2^2\cdot 3^2 = 36$	$2^3\cdot 3^3 = 216$
$2^2\cdot 3^2$	2^1	3^1	$2^3\cdot 3^2 = 72$	$2^2\cdot 3^3 = 108$
$2^2\cdot 3^2$	3^1	2^1	$2^2\cdot 3^3 = 108$	$2^3\cdot 3^2 = 72$

22 ** 23

En un garaje hay 973 coches con matrículas de cuatro cifras, y todas las matrículas son distintas. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro primeros coches que salgan del garaje tengan las matrículas en orden ascendente?



SOLUCIÓN:

Da igual la cantidad de coches que haya en el garaje. Sólo nos interesan los cuatro que salgan primero y el hecho de que los números de las cuatro matrículas son distintos.

Cuatro coches pueden salir de $4! = 24$ formas distintas, de las que sólo en una las cuatro matrículas estarán ordenadas de menor a mayor. Por lo tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{1}{24}$.

24* 25

Una caja contiene 60 piezas de fruta, de las que tres cuartas partes son mandarinas. ¿Cuántas mandarinas nos tenemos que comer para que las restantes pasen a ser la mitad de las frutas que quedan en la caja?

SOLUCIÓN:

En la caja hay $\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$ mandarinas y $60 - 45 = 15$ frutas de otro tipo.

Hay que dejar, pues, 15 mandarinas para que sean la mitad de lo que quede en la caja y, por lo tanto, comernos $45 - 15 =$ **30 mandarinas.**

26***

A, B y C son tres ciudades conectadas entre sí por una red de carreteras. Desde A hay 82 formas de llegar a B (directamente o pasando antes por C). Entre B y C hay 62 formas de llegar y entre A y C hay menos de 300. ¿Cuántas son?

27

SOLUCIÓN:

Llamaremos x al número de caminos directos entre A y B (sin pasar por C).

El número de caminos directos entre B y C sería y, y el número de caminos directos entre A y C sería z.

La información del problema quedaría:

De A a B hay 82 formas: $x + yz = 82$

De B a C hay 62 formas: $y + xz = 62$

De A a C hay menos de 300: $z + xy < 300$

Si sumamos las dos ecuaciones obtenemos:

$$x + yz + \ y + xz = 82 + 62 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x + y + z(x + y) = 144 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (x + y)(1 + z) = 144$$

Como x, y y z son números enteros, descomponiendo el 144 en dos factores tendremos las opciones posibles: 12·12, 6·24, 4·36, 3·48, 2·72. La de 1·144 no sería válida porque cada paréntesis debe valer al menos 2.

Como $x + yz = 82 \quad \rightarrow \quad x = 82 - yz \quad \rightarrow \quad y + (82 - yz)z = 62$

$z+1$	z	$y + (82 - yz)z = 62$	y	x	válido
2	1	$y + 82 - y = 62$	$\nexists$		No
3	2	$y + (82 - 2y)2 = 62$	34	14	Sí
4	3	$y + (82 - 3y)3 = 62$	23	13	Sí
6	5	$y + (82 - 5y)5 = 62$	$^{56}/_{3}$		No
12	11	$y + (82 - 11y)11 = 62$	7	5	Sí
24	23	$y + (82 - 23y)23 = 62$	$^{-38}/_{11}$		No
36	35	$y + (82 - 35y)35 = 62$	$^{39}/_{17}$		No
48	47	$y + (82 - 47y)47 = 62$	$^{79}/_{46}$		No
72	71	$y + (82 - 71y)71 = 62$	$^{8}/_{7}$		No

Con las tres opciones posibles, veamos si la condición $z + xy < 300$ que no hemos usado aún se verifica:

x	y	z	$z + xy$	$z + xy < 300$
14	34	2	478	No
13	23	3	302	No
5	7	11	46	Sí

Por lo tanto, hay 46 formas de llegar de A a C.

29 ggb 30

Un fabricante de bolígrafos ha notado que, si vende cada uno a 15 céntimos, vende 1 000 unidades diarias, pero por cada céntimo que aumenta el precio deja de vender 100 bolígrafos diarios. A él le cuesta fabricar uno 7,5 céntimos. ¿Con qué precio de venta obtendrá mayor beneficio?

SOLUCIÓN:

Llamaremos x al número de céntimos que aumenta el precio de referencia de 15 céntimos el bolígrafo.

Si con 15 céntimos vende 1000 bolígrafos diarios, con 15+x céntimos, venderá $1000 - 100x$ bolígrafos.

Los ingresos serán de $I(x) = (1000 - 100x)(15 + x)$

El coste de fabricarlos $C(x) = 7.5(1000 - 100x)$

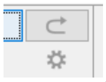
Los beneficios que queremos maximizar

$$B(x) = I(x) - C(x) = (1000 - 100x)(15 + x) - 7.5(1000 - 100x) =$$

$$= (1000 - 100x)(15 + x - 7.5) = (1000 - 100x)(7.5 + x)$$

SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

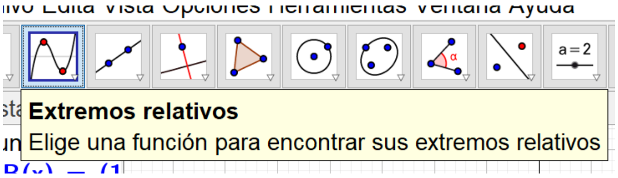
Para hallar el valor de x que nos proporciona el beneficio máximo usando geogebra, introducimos la función en la barra de entrada. Al hacerlo, veremos que en la pantalla aparecen lo que parecen dos rectas verticales. Esto se debe a que, aunque la función es una parábola, con los ejes tal y como los tenemos, no se ve bien. Debemos tener en cuenta que, en el eje de abscisas, lo que representamos es la cantidad de céntimos que subimos el precio de un bolígrafo, mientras que en el de ordenadas tenemos el beneficio obtenido al vender todos los de un día.

Para arreglarlo, pulsamos en la rueda (esquina superior derecha) , seleccionamos *vista gráfica* y modificamos los intervalos para x e y:

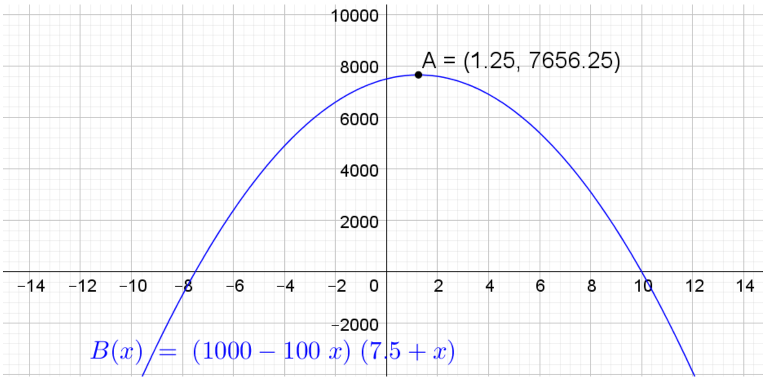
Para x es suficiente entre -15 y 15, para y podemos seleccionar entre -2000 y 10000.

Ahora se verá como la de la imagen.

Sólo falta hallar el máximo. Para eso seleccionamos *extremos relativos* y la función.



Obtendremos $A(1.25, 7656.25)$, lo que significa que cuando $x = 1.25$, el beneficio será máximo (de 7656.25 céntimos o, lo que es lo mismo, de 76.5625 €)



SOLUCIÓN ANALÍTICA:

Para hallar el valor de x que nos proporciona el beneficio máximo de forma analítica, derivamos la función de beneficios e igualamos a 0:

$B(x) = (1000 - 100x)(7.5 + x)$

$B'(x) = -100(7.5 + x) + 1000 - 100x = 250 - 200x$

$B'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 250 - 200x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1.25$