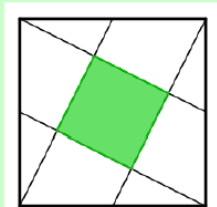


SOLUCIONS – SETEMBRE 2025

1*

En un quadrat d'1 dm² de superfície unim els vèrtexs amb els punts mitjans dels costats, com es veu a la figura, i es forma un quadrat més menut. Quina n'és la superfície?

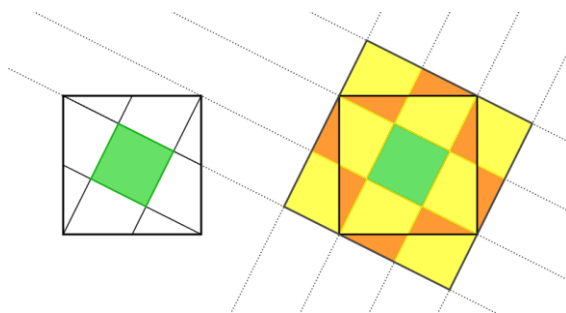
2



SOLUCIÓ:

Si ens fixem en la figura de la dreta, podem veure que, en unir un triangle taronja amb un quadrilàter groc, obtenim un quadrat de la mateixa mida que el verd central.

El quadrat d'1 dm² de superfície estarà dividit en cinc quadrats iguals, per la qual cosa la superfície del quadrat verd és d' 1/5 dm².



3***

En cada vèrtex d'un triangle s'ha escrit un nombre natural, en cada costat el producte dels nombres que hi ha als extrems, i dins del triangle el producte dels nombres que hi ha als vèrtexs. La suma dels set nombres és 2034. Quins nombres s'han escrit en els vèrtexs del triangle?

4



SOLUCIÓ:

Siguen a, b, c els nombres escrits en els vèrtexs del triangle.

La igualtat següent es desprén de la condició:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c = 2034$$

És una equació amb nombres enters que resollem per factorització:

$$\begin{aligned} abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 &= 2035 && \Leftrightarrow \\ ab(c+1) + a(c+1) + b(c+1) + (c+1) &= 5 \cdot 11 \cdot 37 && \Leftrightarrow \\ (c+1)(ab + a + b + 1) &= 5 \cdot 11 \cdot 37 && \Leftrightarrow \\ (c+1)[a(b+1) + (b+1)] &= 5 \cdot 11 \cdot 37 && \Leftrightarrow \\ (c+1)(b+1)(a+1) &= 5 \cdot 11 \cdot 37 \end{aligned}$$

És evident que tots els parèntesis de l'esquerra són majors que 1, i tots els factors de la dreta són nombres primers. Això vol dir que, excepte una permutació, els nombres $a+1$, $b+1$ i $c+1$ són 5, 11, 37.

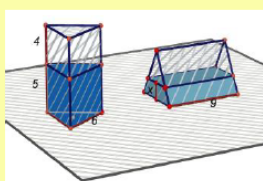
Això significa que els nombres en els vèrtexs del triangle són una unitat menys: **4, 10, 36**.

5**

6

La figura està formada per dos prismes regulars iguals (la base és un triangle equilàter de costat 6 cm i altura 9 cm) que contenen la mateixa quantitat d'aigua.

En el de l'esquerra l'altura de l'aigua és 5 cm. Calcula l'altura x de l'aigua en el prisma de la dreta.



SOLUCIÓ:

Calculem l'altura del triangle equilàter de costat 6 cm:

$$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

El volum sense aigua en els dos prismes ha de ser el mateix.

En el prisma de l'esquerra:

$$V_{\text{sense aigua}} = \text{àrea base triangular} \cdot \text{altura sense aigua} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}\right) \cdot 4 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

En el prisma de la dreta, el volum sense aigua correspon a un prisma la base del qual és un triangle equilàter de costat c ($c < 6$), altura 9 i volum $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

$$\text{L'altura del triangle serà } h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{3} \text{ cm}$$

El volum del prisma serà:

$$V_{\text{sense aigua}} = 36\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3}\right) \cdot 9 = \frac{9c^2}{4}\sqrt{3} \rightarrow 36 = \frac{9c^2}{4} \rightarrow c^2 = 4^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 4 \rightarrow h = \frac{4}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

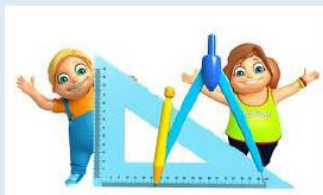
L'altura de l'aigua en el prisma de la dreta serà:

$$x = a - h = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

8 ggb

Traça una circumferència que estiga a la mateixa distància dels quatre punts següents: $A(-4,4)$, $B(1,-2)$, $C(-5,-3)$, $D(6,2)$. Quantes solucions diferents pots trobar?

9



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

La manera de trobar una circumferència equidistant dels quatre punts consisteix a traçar dues circumferències concèntriques que continguin els quatre punts. Una vegada fet açò, la que busquem estarà entre les dues.

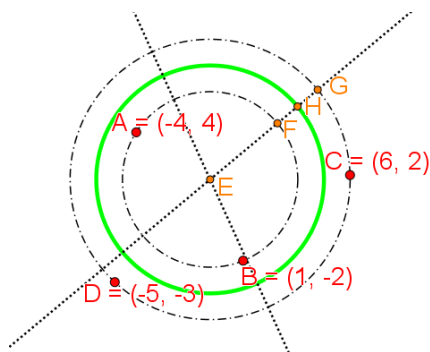
Els quatre punts es poden repartir de dues maneres diferents entre les dues circumferències:

- Dos a cadascuna, i ho podem fer de tres maneres diferents (A amb B, A amb C i A amb D en una d'elles i els dos restants en l'altra).
- Tres en una i l'altre a l'altra circumferència, cosa que ens dona quatre circumferències diferents en funció del punt que quede sol.

En total, és possible aconseguir 7 circumferències que compleixen el que demanem.

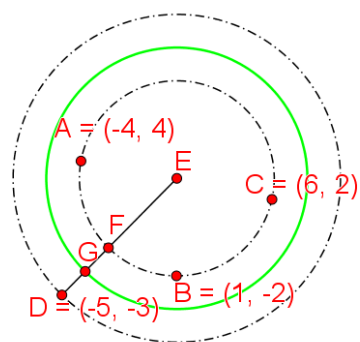
Construcció en el cas a):

- Comencem per introduir els quatre punts.
- Tracem les mediatrises entre A i B i entre C i D. El punt d'intersecció d'ambdues E serà el centre de les circumferències. Les dibuixem.
- Troblem els punts d'intersecció de les dues circumferències amb una de les mediatrises (F i G).
- Troblem el punt mitjà del segment FG (H) i tracem la circumferència amb centre a E que passe per H. És la que buscàvem.



Construcció en el cas b):

1. Comencem per introduir els quatre punts.
2. Tracem la circumferència que passa pels punts A, B i C.
3. Trobem el centre de la circumferència E.
4. Tracem la circumferència amb centre a E que passe per D.
5. Tracem el segment DE i trobem el punt en què talla la primera circumferència F.
6. Trobem el punt mitjà del segment FD (G) i tracem la circumferència amb centre a E que passe per G. És la que buscàvem.



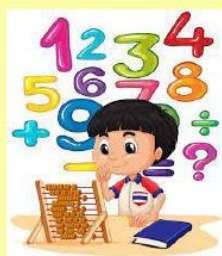
10**

11

Calcula l'última xifra del nombre

$$0! + 1! + 2! + \dots + 2025!$$

Nota: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (factorial d'un nombre natural, i $0! = 1$)



SOLUCIÓ:

Por definició, $0! = 1$

L'última xifra d'una suma és igual a la suma de les últimes xifres dels sumands.

Quan $n \geq 5$, es compleix que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n = 120 \cdot \dots \cdot n$ acaba en 0.

Així, l'última xifra de la suma original és igual a l'última xifra de la suma:

$$0! + 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1 + 2 + 6 + 24$$

que és igual a la suma de les xifres:

$$1 + 1 + 2 + 6 + 4 = 14$$

que és 4.

12*

El planeta X està dividit en 8 països, cadascun dels quals ocupa un octant de l'esfera i, per tant, limita amb 3 països més. De quantes maneres pot Andrea eixir del seu país, visitar tots els altres una única vegada i tornar a casa?

13



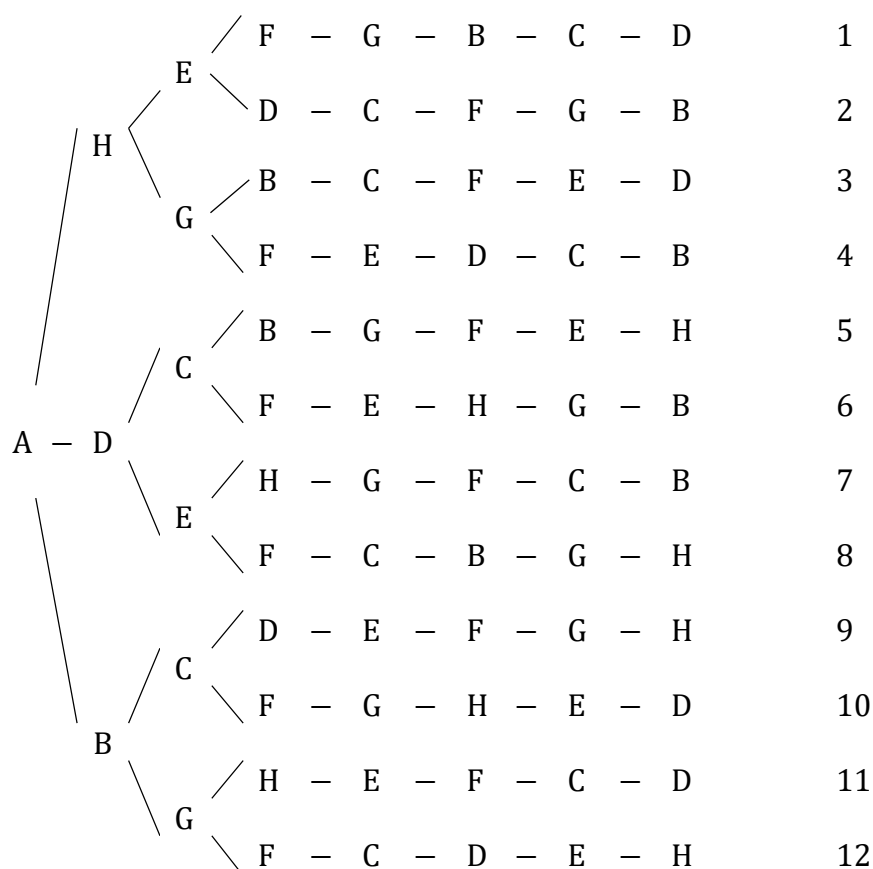
SOLUCIÓ:

Anomenarem als països A, B, C, D, E, F, G i H. Els quatre primers són a la meitat sud del planeta i els altres quatre a la nord, distribuïts de la manera següent:

Hemisferi sud		Hemisferi nord	
D	C	E	F
A	B	H	G

De manera que H està sobre A, G sobre B, F sobre C i E sobre D.

Suposarem que el país d'Andrea és l'A. Vegem els possibles camins en un diagrama d'arbre:



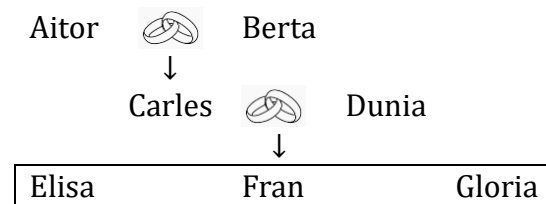
Andrea té 12 maneres de fer-ho.

15*

La família de Carles està formada per 1 àvia, 1 avi, 2 mares, 2 pares, 2 filles, 2 fills, 3 nets i netes, 1 germà, 2 germanes, 1 sogre, 1 sogra i 1 nora. Quina és la menor quantitat possible de membres de la família?

16**SOLUCIÓ:**

Posem noms al possible l'arbre genealògic de la família de Carles:



Vegem si tenim tot el que diu l'enunciat:

1 àvia: Berta

1 avi: Aitor

2 mares: Berta i Dunia

2 pares: Aitor i Carles

2 filles: Elisa i Gloria

2 fills: Carles i Fran

3 nets i netes: Elisa, Fran i Gloria

1 germà: Fran

2 germanes: Elisa i Gloria

1 sogre: Aitor

1 sogra: Berta

1 nora: Dunia

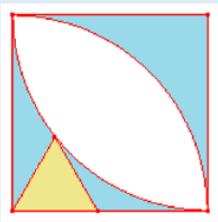
Per a la solució, a Carles li podríem haver assignat qualsevol dels papers d'homes, és a dir, podria ser on Aitor o Fran.

La quantitat més menuda de membres de la família seria 7 persones.

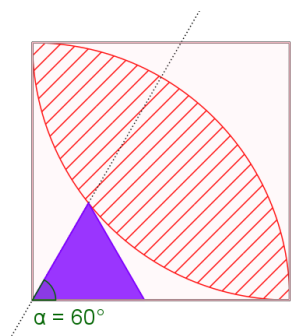
17 ggb

18

La figura està formada per un quadrat, dos arcs de circumferència (amb radi el costat del quadrat) i un triangle equilàter. Calculeu la relació entre l'àrea del triangle equilàter i l'àrea del quadrat.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:



$$\frac{\text{Àrea triangle}}{\text{Àrea quadrat}} = \frac{5.2541}{64} = 0.0821$$

Passos a seguir:

1. Dibuixem el quadrat amb *polígon regular*. De costat 10 cm.
2. Dibuixem els dos arcs de circumferència.
3. El triangle, com és equilàter, té angles de 60°. Amb *angle donada l'amplitud* el tracem al cantó inferior esquerre del quadrat.
4. El punt en què la recta que forma l'angle talla l'arc inferior serà un vèrtex del triangle.
5. Com que ja tenim dos dels vèrtexs, amb *polígon regular* el tracem.
6. En la barra d'entrada introduïm el quocient entre les dues superfícies i obtenim 0.0821.

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

$$\overline{AB} = 1, \overline{AE} = c$$

$$\overline{JF} = \overline{AM} = \frac{c}{2}, \overline{MF} = \overline{BK} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

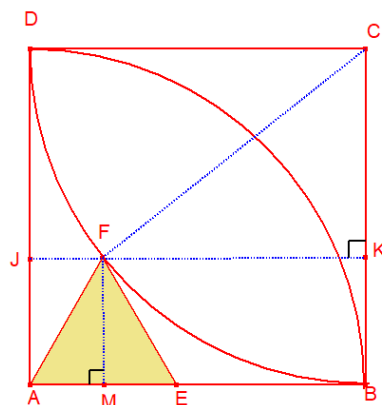
$$\overline{CF} = 1, \overline{FK} = 1 - \frac{c}{2}, \overline{CK} = 1 - \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle FKC$:

$$1 = \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Simplificant:

$$c^2 - (1 + \sqrt{3})c + 1 = 0$$



Resolent l'equació:

$$c = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$$

L'àrea del triangle equilàter és:

$$S_{AEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 = \frac{2\sqrt{3} + 6 - \sqrt{6\sqrt{3}} - 3\sqrt{2\sqrt{3}}}{8}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABCD}} = \frac{2\sqrt{3} + 6 - \sqrt{6\sqrt{3}} - 3\sqrt{2\sqrt{3}}}{8} \approx 0.0821$$

19**

Troba totes les parelles de nombres naturals a i b que compleixen

- a) $MCD(a, b) = 36$
- b) $MCM(a, b) = 216$

20



SOLUCIÓ:

Aplicarem la propietat següent:

$$a \cdot b = MCD(a, b) \cdot MCM(a, b) = 36 \cdot 216 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 2^5 \cdot 3^5$$

$MCD(a, b) = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ ens indica que és la part comuna a ambdós nombres. Cap altre factor pot estar alhora en tots dos. Per això, les opcions per a a i b són:

Part comuna	Resta en a	Resta en b	a	b
$2^2 \cdot 3^2$	$2^1 \cdot 3^1$	1	$2^3 \cdot 3^3 = 216$	$2^2 \cdot 3^2 = 36$
$2^2 \cdot 3^2$	1	$2^1 \cdot 3^1$	$2^2 \cdot 3^2 = 36$	$2^3 \cdot 3^3 = 216$
$2^2 \cdot 3^2$	2^1	3^1	$2^3 \cdot 3^2 = 72$	$2^2 \cdot 3^3 = 108$
$2^2 \cdot 3^2$	3^1	2^1	$2^2 \cdot 3^3 = 108$	$2^3 \cdot 3^2 = 72$

22 **

En un garatge hi ha 973 cotxes amb matrícules de quatre xifres, i totes les matrícules són diferents. Quina és la probabilitat que els quatre primers cotxes que isquen del garatge tinguin les matrícules en ordre ascendent?

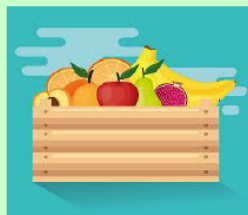
23**SOLUCIÓ:**

És igual la quantitat de cotxes que hi haja al garatge. Només ens interessen els quatre que isquen primer i el fet que les quatre matrícules són diferents.

Quatre cotxes poden eixir de $4! = 24$ formes diferents, de les quals només en una estaran les quatre matrícules ordenades de menor a major. Per tant, la probabilitat demanada és $P = \frac{1}{24}$.

24*

Una caixa conté 60 peces de fruita, de les quals tres quartes parts són mandarines. Quantes mandarines ens hem de menjar perquè les restants passen a ser la meitat de les fruites que queden a la caixa?

25**SOLUCIÓ:**

En la caixa hi ha $\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$ mandarines i $60 - 45 = 15$ fruites d'un altre tipus.

Aleshores hem de deixar 15 mandarines perquè siguin la meitat del que quede en la caixa i, per tant, hem de menjar-nos $45 - 15 =$ **30 mandarines**.

26***

A, B i C són tres ciutats connectades entre si per una xarxa de carreteres. Des d'A hi ha 82 maneres d'arribar a B (directament o passant abans per C). Entre B i C hi ha 62 maneres d'arribar i entre A i C n'hi ha menys de 300. Quantes són?

27



SOLUCIÓ:

Anomenarem x a la quantitat de camins directes entre A i B (sense passar per C).

La quantitat de camins directes entre B i C seria y , i la quantitat de camins directes entre A i C seria z .

La informació del problema quedaria:

D'A a B hi ha 82 formes: $x + yz = 82$

De B a C hi ha 62 formes: $y + xz = 62$

D'A a C hi ha menys de 300: $z + xy < 300$

Si sumem les dues equacions obtenim:

$$x + yz + y + xz = 82 + 62 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + y + z(x + y) = 144 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + y)(1 + z) = 144$$

Com x, y i z són nombres enters, descomponent el 144 en dos factors tindrem les opcions possibles: 12·12, 6·24, 4·36, 3·48, 2·72. La de 1·144 no seria vàlida perquè cada parèntesi ha de valdre almenys 2.

Com $x + yz = 82 \rightarrow x = 82 - yz \rightarrow y + (82 - yz)z = 62$

$z + 1$	z	$y + (82 - yz)z = 62$	y	x	vàlid
2	1	$y + 82 - y = 62$	0		No
3	2	$y + (82 - 2y)2 = 62$	34	14	Sí
4	3	$y + (82 - 3y)3 = 62$	23	13	Sí
6	5	$y + (82 - 5y)5 = 62$	$56/3$		No
12	11	$y + (82 - 11y)11 = 62$	7	5	Sí
24	23	$y + (82 - 23y)23 = 62$	$-38/11$		No
36	35	$y + (82 - 35y)35 = 62$	$39/17$		No
48	47	$y + (82 - 47y)47 = 62$	$79/46$		No
72	71	$y + (82 - 71y)71 = 62$	$8/7$		No

Amb les tres opcions possibles, vegem si la condició $z + xy < 300$ que no hem fet servir encara es verifica:

x	y	z	$z + xy$	$z + xy < 300$
14	34	2	478	No
13	23	3	302	No
5	7	11	46	Sí

Per tant, hi ha 46 formes d'anar d'A a C.

29 ggb

30

Un fabricant de bolígrafs ha notat que, si ven cadascun a 15 cèntims, ven 1000 unitats diàries, però per cada cèntim que augmenta el preu deixa de vendre 100 bolígrafs diaris. A ell li costa fabricar-ne un 7,5 cèntims. Amb quin preu de venda obtindrà més benefici?



SOLUCIÓ:

Anomenarem x a la quantitat de cèntims que augmenta el preu de referència de 15 cèntims el bolígraf.

Si amb 15 cèntims ven 1000 bolígrafs diaris, amb $15+x$ cèntims vendrà $1000 - 100x$ bolígrafs.

Els ingressos seran: $I(x) = (1000 - 100x)(15 + x)$

El cost de fabricar-los: $C(x) = 7.5(1000 - 100x)$

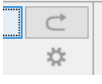
Els beneficis que volem maximitzar:

$$B(x) = I(x) - C(x) = (1000 - 100x)(15 + x) - 7.5(1000 - 100x) =$$

$$= (1000 - 100x)(15 + x - 7.5) = (1000 - 100x)(7.5 + x)$$

SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

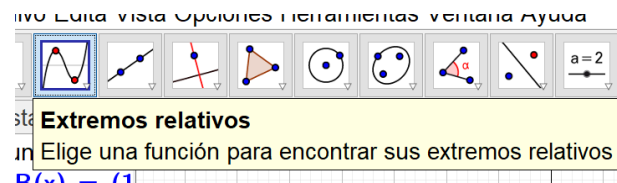
Per trobar el valor de x que ens proporciona el benefici màxim usant geogebra, introduïm la funció en la barra d'entrada. En fer-ho, veurem que a la pantalla apareixen el que semblen dues rectes verticals. Això és perquè, encara que la funció és una paràbola, amb els eixos tal com els tenim, no es veu bé. Hem de tenir en compte que, a l'eix d'abscisses, el que representem és la quantitat de cèntims que pugem el preu d'un bolígraf, mentre que al d'ordenades tenim el benefici obtingut en vendre tots els d'un dia.

Para apanyar-ho, premem en la roda (cantó superior dret) , seleccionem *vista gràfica* i modifiquem els intervals per a x i y :

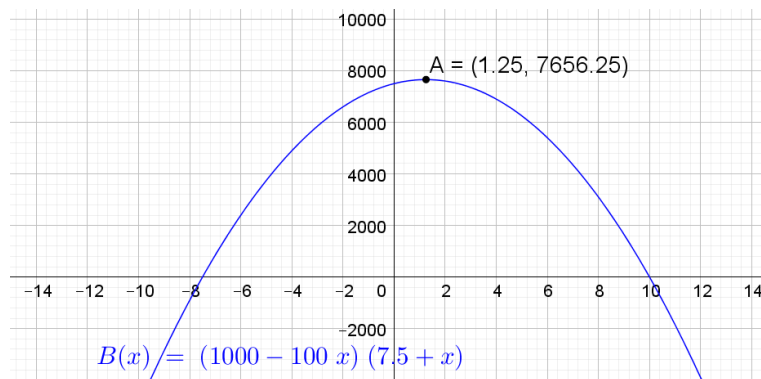
Per a x és suficient entre -15 i 15 , per a y podem seleccionar entre -2000 i 10000 .

Ara es vorà com en la imatge.

Només falta trobar-ne el màxim. Per això seleccionem *extrems relatiu* i la funció.



Obtindrem $A(1.25, 7656.25)$, la qual cosa significa que, quan $x = 1.25$, el benefici serà màxim (de 7656.25 cèntims o, el que és el mateix, de 76.5625 €)



SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Per calcular el valor de x que ens proporciona el benefici màxim de forma analítica, derivem la funció de beneficis i igualem a 0:

$$B(x) = (1000 - 100x)(7.5 + x)$$

$$B'(x) = -100(7.5 + x) + 1000 - 100x = 250 - 200x$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow 250 - 200x = 0 \rightarrow x = 1.25$$