

SOLUCIONS – OCTUBRE 2025

1*

2

Per a una fotografia d'un grup de 10 persones, el fotògraf els demana que es posen en dues files de 5 persones, de manera que cap persona de la primera fila siga més alta que la que té al darrere. A més, les alçades han d'anar de menor a major mirant d'esquerra a dreta. De quantes maneres és possible fer-ho?



SOLUCIÓ:

Anomenarem les deu persones amb els números que indiquen la seva posició si les ordenem de menor a major.

Amb les condicions demanades, hi ha dues persones amb lloc fix: 1 i 10

	Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5
Fila 2					10
Fila 1	1				

En la posició fila 1, columna 2, no poden estar els números més grans que 3, perquè a la segona fila hauríem de posar una persona més baixa darrere.

De la mateixa manera, en la posició fila 1, columna 3, no hi poden anar números majors que 5. Si posàrem un 6, només ens quedarien quatre persones més altes, mentre que queden cinc posicions per ocupar per gent més alta.

En la posició fila 1, columna 4, no hi poden anar números majors que 7. Si posàrem un 8, només quedarien dues persones més altes, però queden tres posicions per ser ocupades per gent més alta.

En la posició fila 1, columna 5, els números vàlids seran els que van del 5 al 9.

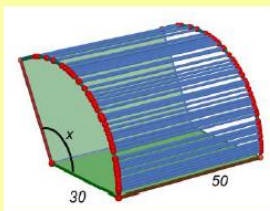
Vegem de quantes formes podem organitzar la primera fila. Un vegada que hem fet açò, la segona fila tindrà els que queden, ordenats de menor a major.

Opcions fila1	Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5
1	1	2	3	4	5
2	1	2	3	4	6
3	1	2	3	5	6
4	1	2	4	5	6
5	1	3	4	5	6
6	1	2	3	4	7
7	1	2	3	5	7
8	1	2	3	6	7
9	1	2	4	5	7
10	1	2	4	6	7
11	1	2	5	6	7
12	1	3	4	5	7
13	1	3	4	6	7
14	1	3	5	6	7
15	1	2	3	4	8
16	1	2	3	5	8
17	1	2	3	6	8
18	1	2	3	7	8
19	1	2	4	5	8
20	1	2	4	6	8
21	1	2	4	7	8
22	1	2	5	6	8
23	1	2	5	7	8
24	1	3	4	5	8
25	1	3	4	6	8
26	1	3	4	7	8
27	1	3	5	6	8
28	1	3	5	7	8
29	1	2	3	4	9
30	1	2	3	5	9
31	1	2	3	6	9
32	1	2	3	7	9
33	1	2	4	5	9
34	1	2	4	6	9
35	1	2	4	7	9
36	1	2	5	6	9
37	1	2	5	7	9
38	1	3	4	5	9
39	1	3	4	6	9
40	1	3	4	7	9
41	1	3	5	6	9
42	1	3	5	7	9

Per tant, hi ha 42 formes diferents de col·locar-se per a la fotografia.

3**

El volum de la figura és de $15\,000\pi u^3$. Calcula la mesura de l'angle x .

4**SOLUCIÓ:**

El que tenim és un tros d'un cilindre amb 30 unitats de radi i 50 d'altura. Si el cilindre estiguera complet, el volum que ocuparia seria

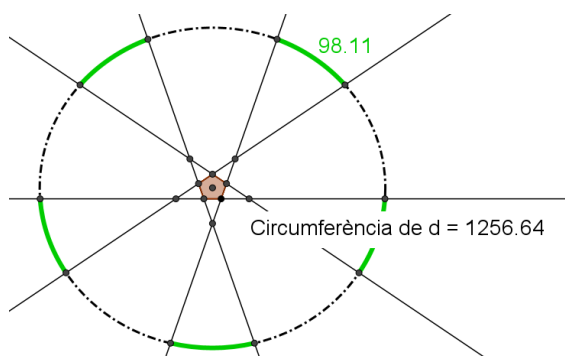
$$V = \pi \cdot R^2 \cdot a = \pi \cdot 30^2 \cdot 50 = 45\,000\pi u^3$$

Com el volum que ocupa la nostra figura és la tercera part ($45\,000 : 15\,000 = 3$), l'angle que abasta serà la tercera part de 360° , l'angle del cilindre complet.

Per tant, $x = 360 : 3 = 120^\circ$.

6 ggb

Un observador situat en un punt a 200 m del centre d'un edifici pentagonal de costat 20 m, i des del qual en té una bona visió, mira cap a ell. Quina probabilitat hi ha que veja tres costats de l'edifici?

7**SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:**

1. Dibuixem l'edifici amb un pentàgon regular de costat 20.
2. Trobem el centre.
3. Dibuixem la circumferència centrada en aquest punt amb radi 200. Seran els punts on es pot ubicar l'observador.

4. Tracem les rectes que passen pels costats del pentàgon. Aquestes tallen la circumferència en una sèrie d'arcs, de manera que des d'uns es veuran dos costats de l'edifici i des d'altres se'n veuran tres, que són els que ens interessen (en verd en el dibuix).

5. Calculem la longitud de la circumferència amb . La dels arcs és a la vista algebraica.

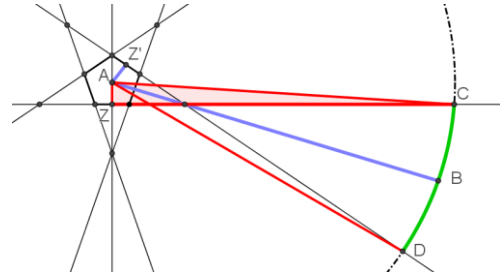
La probabilitat que veja tres de les cares de l'edifici serà:

$$P = \frac{\text{longitud de cinc arcs verds}}{\text{longitud circumferència}} = \frac{5 \cdot 98.1142925}{1256.637081} = 0.390384$$

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Per trobar la longitud d'un arc des del que siguin visibles tres costats de l'edifici necessitem l'angle que abraça. Al dibuix seria $\widehat{CAD}$.

El radi serà el segment $\overline{AB}$, amb una longitud de 200 m.

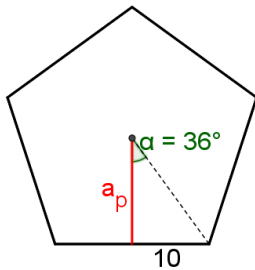


Considerem el triangle ACZ, on $\overline{AZ}$ és l'apotema del pentàgon. És rectangle a Z, i la hipotenusa coincideix amb el radi de la circumferència (200 m). Amb aquestes dades podem calcular l'angle $\beta = \widehat{CAZ}$.

Si anomenem α a l'angle $\widehat{CAB}$, tenim que l'angle que busquem és 2α .

Es compleix que $\beta - \alpha = 2 \cdot 36^\circ \rightarrow \alpha = \beta - 72^\circ$

Calculem la longitud de l'apotema:



$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{10}{a_p} \rightarrow a_p = \frac{10}{\operatorname{tg} 36^\circ}$$

Calculem β :

$$\cos \beta = \frac{a_p}{200} = \frac{\frac{10}{\operatorname{tg} 36^\circ}}{200} = \frac{1}{20 \operatorname{tg} 36^\circ} \rightarrow \beta = \arccos \frac{1}{20 \operatorname{tg} 36^\circ}$$

L'angle que abraça l'arc de circumferència que ens interessa és 2α :

$$2\alpha = 2\beta - 144^\circ = 28.10767435^\circ$$

La longitud de l'arc serà $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 200}{360} \cdot 2\alpha = 98.1142925 \text{ m}$

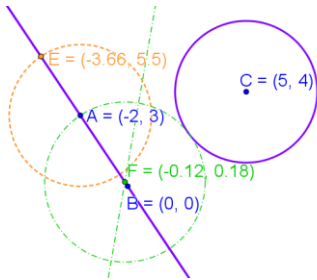
Per a calcular la probabilitat que l'observador veja tres costats de l'edifici calculem:

$$P = \frac{\text{longitud de cinc arcs verds}}{\text{longitud circumferència}} = \frac{5L}{2\pi \cdot 200} = 0.390384$$

8 ggb

Determina sobre la recta que passa per $A(-2,3)$ i $B(0,0)$ un altre punt d'aquesta que estiga a la mateixa distància d'A que de la circumferència amb centre a $C(5,4)$ i radi 3 cm.

9



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Passos a seguir:

1. Començarem per dibuixar la recta i la circumferència que diu l'enunciat (en blau en el dibuix).
2. Tracem una circumferència amb centre a A i el mateix radi que l'altra (3 cm) (en taronja en el dibuix).
3. Trobem el punt E d'intersecció d'aquesta circumferència amb la recta inicial.
4. Tracem la mediatriu del segment que va de C a E.
5. Trobem el punt d'intersecció F entre les dues rectes. És el punt que busquem.
6. Per comprovar-ho, només cal traçar la circumferència amb centre en F que passe per A i vorem que és tangent a la circumferència inicial. Per tant, F és a la mateixa distància d'A que de la circumferència.

10***

Siguen x i y tots els valors enters i positius que satisfan l'equació $5x + 11y = 2027$.

Calcula la suma de tots els valors possibles de y .

11**SOLUCIÓN:**

Com l'equació $5x + 11y = 2027$ té un coeficient múltiple de 5, seguirem la estratègia de les xifres terminals.

El terme $5x$ acabarà en 0 o en 5.

Si $5x$ acaba en 0 $\Rightarrow 11y$ acabarà en 7

Si $5x$ acaba en 5 $\Rightarrow 11y$ acabarà en 2

Per no haver de treballar amb els dos casos per separat, multipliquem l'equació per 2: $10x + 22y = 4054$

El terme $10x$ acaba en 0 $\Rightarrow$ el terme $22y$ haurà d'acabar en 4:

Possibilitats per a y :

Si $y=2 \Rightarrow 5x+11(2)=2027 \Rightarrow x=401$

Si $y=7 \Rightarrow 5x+11(7)=2027 \Rightarrow x=390$

Si $y=12 \Rightarrow 5x+11(12)=2027 \Rightarrow x=379$

Observem que els valors de y augmenten de 5 en 5 (coeficient de x), mentre que els de x disminueixen d'11 en 11 (coeficient de y).

Per a les x tenim una progressió aritmètica amb $a_1=401$ i diferència $d=-11$:

$\{a_x\}=401, 390, 379, \dots$

$a_x=0=a_1+(n-1)d=401+(n-1)(-11)=412-11n \Rightarrow n = \frac{412}{11} = 37,45 \Rightarrow$ L'últim terme

positiu és el $n=37 \Rightarrow a_{37}=a_1+(n-1)d=401+36(-11)=5$

Per a les y tenim la successió $\{a_y\}=2, 7, 12, \dots, a_{37}$, progressió aritmètica amb $d=5$
 $a_{37}=2+36 \cdot 5=182$

La suma dels 37 valors possibles de y : $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2+182}{2} \cdot 37 = 3404$

13***14**

La meva àvia va comprar ahir menjar per alimentar durant 12 dies els 4 gats que tenia a casa, però al tornar va recollir del carrer dos gats més. Quants dies li durarà ara el menjar?

**SOLUCIÓ:**

Si anomenem ració a la quantitat de menjar que necessita per a un gat durant un dia, la meva àvia va comprar $12 \cdot 4 = 48$ racions per alimentar durant 12 dies els seus quatre gats.

En recollir dos gats, ara haurà de repartir aquestes 48 racions entre els 6 gats, és a dir, $48 : 6 = 8$ dies durarà el dinar.

15****16**

Usant una balança de dos platerets i un màxim de 7 pesades, ordena de menor a major pes cinc caixes de pesos diferents.

**SOLUCIÓ:**

Anomenarem a les cinc caixes A, B, C, D i E.

Pesada 1

Posem en un plateret la caixa A i a l'altre la B.

Suposem que el resultat és $A < B$.

Pesada 2

Ara comparem C i D.

Suposem que $C < D$.

Pesada 3

Comparem els dos de menor pes, en aquest cas A i C.

Suposem que $A < C$.

Pesada 4

Ara comparem les dos més pesades, que serien B i D.

Suposem que hem obtingut que $D < B$.

Amb aquestes quatre pesades, ja hem ordenat quatre de les cinc caixes. Tenim que $A < C < D < B$.

Sols ens falta saber on va l'última, la caixa E. Per saber-ho, comencem per comparar-la amb una de les dues centrals, C o D. Segons el resultat obtingut anirem comparant-la amb les més pesades o amb les menys.

Pesada 5

Comparem E amb C.

Suposem que hem obtingut $C < E$.

Pesada 6

Ara comparem E amb D (si en l'anterior haguérem obtingut $C > E$, ara comparariem E amb A).

Suposem que $D < E$.

Pesada 7

Ja falta sols saber quina pesa més, E o B.

Les comparem i obtenim $E < B$

Ja podem ordenar les cinc caixes:

$$A < C < D < E < B$$

17***18**

L'any 1961 va tenir l'estranya propietat de llegir-se igual si el capgirem. Des de l'any 1, quants n'han tingut aquesta propietat? Quin serà el proper?

**SOLUCIÓ:**

El primer és tenir clar quines xifres podem girar i obtenir una xifra vàlida:

0, 1, 6, 8 i 9.

El 0, 1 i 8 girats tornen a ser el mateix número, mentre que el 6 i el 9 es transformen un en l'altre.

Anys d'una xifra que el compleixin n'hi ha dos: els anys 1 i 8.

Anys de dues xifres, quatre: 11, 69, 88 i 96.

Anys de tres xifres, dotze: 101, 111, 181, 609, 619, 689, 808, 818, 888, 906, 916 i 986.

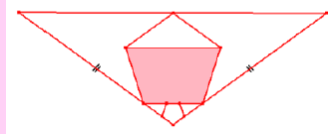
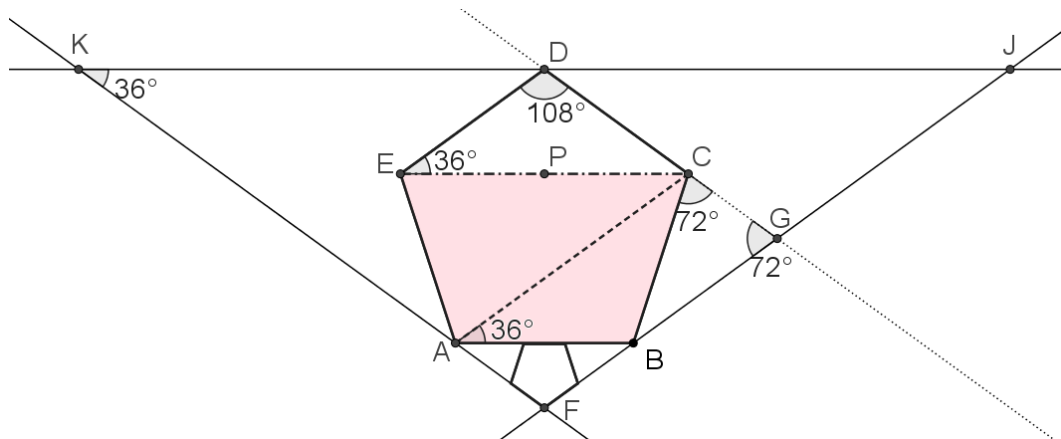
Anys que ja han passat amb quatre xifres n'hi ha cinc: 1001, 1111, 1691, 1881, 1961.

En total, 23 anys han tingut aquesta propietat fins ara.

El proper serà l'any 6009.

20*****21**

La figura està formada per dos pentàgons regulars dins d'un triangle isòsceles. Calcula la proporció entre les àrees del quadril·later ombrejat i l'àrea del triangle.

**SOLUCIÓ:**

Suposarem que el costat del pentàgon gran mesura 1.

En la figura tenim quatre triangles semblants amb dos angles de 36° i un de 108° . Són els de vèrtexs FJK, GJD, CDE i ABF.

També tenim un triangle isòsceles amb dos angles de 72° i un de 36° amb vèrtexs BCG.

ÀREA DEL QUADRIL·LATER ABCE

Per trobar-la, calcularem la del pentàgon i restarem la del triangle CDE.

1. Àrea del triangle CDE

Del triangle rectangle EPD deduïm que

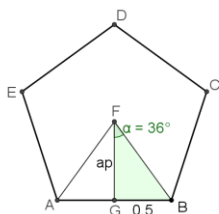
$$\cos 36^\circ = \frac{\overline{EP}}{1} \rightarrow \overline{EC} = 2\overline{EP} = 2 \cos 36^\circ = \text{base}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\overline{PD}}{1} = \overline{PD} = \text{altura}$$

D'on $S_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 36^\circ \cdot \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 72^\circ$

2. Àrea del pentàgon ABCDE

Necessitem l'apotema del pentàgon.



En el triangle BFG es compleix:

$$\operatorname{tg} 36^{\circ} = \frac{0.5}{ap} \rightarrow ap = \frac{1}{2 \operatorname{tg} 36^{\circ}}$$

L'àrea del pentàgon serà

$$S_{ABCDE} = \frac{\text{Perímetre} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg} 36^{\circ}}}{2} = \frac{5}{4 \operatorname{tg} 36^{\circ}}$$

3. Àrea del quadrilàter ABCE

$$S_{ABCE} = S_{ABCDE} - S_{CDE} = \frac{5}{4 \operatorname{tg} 36^{\circ}} - \frac{1}{2} \cdot \sin 72^{\circ}$$

ÀREA DEL TRIANGLE FJK

D'aquest triangle no tenim més dades que els angles, per la qual cosa començarem calculant la longitud d'un dels costats, el KJ, o el que ens servirà per al mateix, calcularem DJ usant la semblança entre els triangles CDE i GJD.

1. Longitud CG

Tenint en compte les dades conegudes del triangle isòsceles BCG, amb el teorema del sinus podem afirmar que

$$\frac{\sin 72^{\circ}}{1} = \frac{\sin 36^{\circ}}{\overline{CG}} \rightarrow \overline{CG} = \frac{\sin 36^{\circ}}{\sin 72^{\circ}} = \frac{1}{2 \cos 36^{\circ}}$$

2. Longitud DG

Es compleix que $\overline{DG} = \overline{DC} + \overline{CG} = 1 + \frac{1}{2 \cos 36^{\circ}}$

3. Longitud DJ

Fem servir la semblança dels triangles GJD i CDE:

$$\frac{\overline{DJ}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{\overline{DJ}}{2 \cos 36^{\circ}} = \frac{1 + \frac{1}{2 \cos 36^{\circ}}}{1} \rightarrow \overline{DJ} = 1 + 2 \cos 36^{\circ}$$

La base del triangle FJK és $\overline{KJ} = 2\overline{DJ}$.

La altura de FJK serà la longitud de $\overline{DF}$:

Es compleix $\operatorname{tg} 36^{\circ} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DJ}} \rightarrow \overline{DF} = \operatorname{tg} 36^{\circ} \cdot \overline{DJ}$

$$\text{altura} = \overline{DF} = \operatorname{tg} 36^{\circ}(1 + 2 \cos 36^{\circ})$$

4. ÀREA FJK

$$S_{FJK} = \frac{1}{2} \cdot 2\overline{DJ} \cdot \overline{DF} = (1 + 2 \cos 36^{\circ}) \operatorname{tg} 36^{\circ}(1 + 2 \cos 36^{\circ})$$

$$S_{FJK} = (1 + 2 \cos 36^{\circ})^2 \operatorname{tg} 36^{\circ}$$

La relació demanada: $\frac{S_{ABCE}}{S_{FJK}} = \frac{1}{4}$

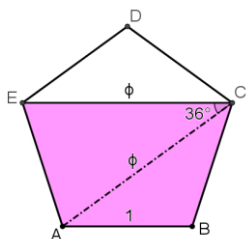
SOLUCIÓ USANT EL NOMBRE D'OR:

En un pentàgon regular, si dividim el que mesura una diagonal entre el que mesura un costat, obtenim el nombre d'or. Per tant, si fem servir un pentàgon amb costat 1, la longitud de les diagonals coincidirà amb el nombre d'or

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Es compleix que } 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

ÀREA DEL QUADRILÀTER ABCE



Calcularem les àrees dels triangles ABC i ACE.
Com $\overline{AB}$ i $\overline{EC}$ són paral·lels, les altures coincideixen.
Calculem el valor:

$$\sin 36^\circ = \frac{a}{\phi} \rightarrow a = \phi \sin 36^\circ$$

$$\begin{aligned} S_{ABCE} &= S_{ABC} + S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \phi \sin 36^\circ + \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot \phi \sin 36^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \phi) \cdot \phi \sin 36^\circ \end{aligned}$$

ÀREA DEL TRIANGLE FJK

D'aquest triangle no tenim més dades que els angles, per la qual cosa començarem calculant la longitud d'un dels costats.

1. Al triangle isòsceles BDG coneixem $\overline{BD} = \phi$ i els angles de 36° en

D i de 72° en B i G, per la qual cosa $\overline{DG} = \overline{BD} = \phi$.

2. Com els triangles CDE i DGJ són semblants:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DJ}} \rightarrow \frac{1}{\phi} = \frac{\phi}{\overline{DJ}} \rightarrow \overline{DJ} = \phi^2 \rightarrow \overline{KJ} = 2\phi^2$$

3. Calculem l'altura de FJK:

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\overline{FD}}{\overline{DJ}} \rightarrow \overline{FD} = \overline{DJ} \cdot \operatorname{tg} 36^\circ = \phi^2 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ$$

4. L'àrea del triangle FJK:

$$\begin{aligned} S_{FJK} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{KJ} \cdot \overline{FD} = \frac{1}{2} \cdot 2\phi^2 \cdot \phi^2 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \\ S_{FJK} &= \phi^4 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \end{aligned}$$

La relació demanada:

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABCE}}{S_{FJK}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 + \phi) \cdot \phi \sin 36^\circ}{\phi^4 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{(1 + \phi) \cdot \cos 36^\circ}{2\phi^3} = \frac{1}{4} \\ \frac{S_{ABCE}}{S_{FJK}} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

22*

Aconsegueix els números 666 i 999

inserir quatre signes **+** entre els nombres:

987654321

23

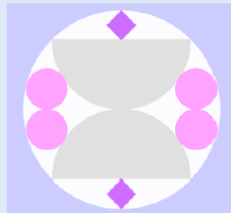
SOLUCIÓ:

$$9+87+6+543+21=666$$

$$9+8+7+654+321=999$$

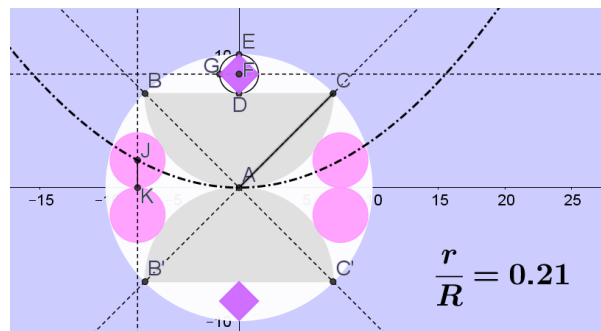
24 ggb

Tenim una circumferència que conté dues semicircumferències iguals i tangents i quatre circumferències iguals. Calculeu la proporció entre el radi d'una circumferència rosa i el radi de la circumferència exterior.

25

SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

1. Començarem per dibuixar una circumferència amb centre a $A(0,0)$.
2. Per a les semicircumferències necessitem els extrems de l'arc, que estaran als punts de tall de la circumferència amb dos diàmetres perpendiculars entre si i una inclinació de 45° respecte als eixos.



3. Tracem les dues semicircumferències.
4. Per als dos quadrats trobem el punt mitjà del segment BD i després el punt mitjà del segment que va des del punt que acabem de calcular i E (punt de tall de la circumferència amb l'eix d'ordenades).
5. Tracem la circumferència amb centre a F que passe per E i la perpendicular a l'eix d'ordenades per F. El punt de tall G és un vèrtex del quadrat.
6. Tracem el quadrat amb polígon regular i els vèrtexs E i G.

7. Per a les circumferències menudes, tracem la paràbola amb centre en D i vèrtex a A.
8. Marquem un punt J sobre la paràbola i la perpendicular a l'eix d'abscisses per J. El punt K d'intersecció de l'eix i la perpendicular el farem servir per traçar una circumferència amb centre a J.
9. Desplacem J per la paràbola fins que la circumferència siga tangent a la circumferència exterior i a la semicircumferència.

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Siga $\overline{OA} = R$, radi de la circumferència exterior.

Siga $\overline{PA} = \frac{\sqrt{2}}{2} R$ radi de la semicircumferència.

Siga $\overline{QT} = s$, radi de les quatre circumferències menudes.

$$\overline{OQ} = r - s, \overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2} r + s, \overline{PK} = \frac{\sqrt{2}}{2} r - s$$

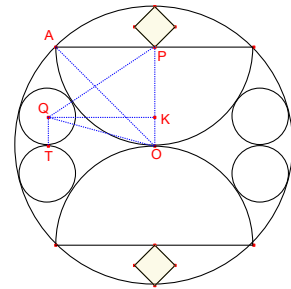
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\triangle QKO, \triangle PKQ$:

$$\begin{aligned} (R - s)^2 - s^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r + s \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r - s \right)^2 \\ R^2 - 2Rs + s^2 - s^2 &= \frac{1}{2} r^2 + \sqrt{2}rs + s^2 - \left(\frac{1}{2} r^2 - \sqrt{2}rs + s^2 \right) \\ R^2 - 2Rs &= 2\sqrt{2}rs \\ R^2 &= 2Rs + 2\sqrt{2}rs = (2R + 2\sqrt{2}r)s \end{aligned}$$

Resolent l'equació: $s = \frac{\sqrt{2}-1}{2} R$

La proporció dels radis és:

$$\frac{s}{R} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cong 0.2071$$

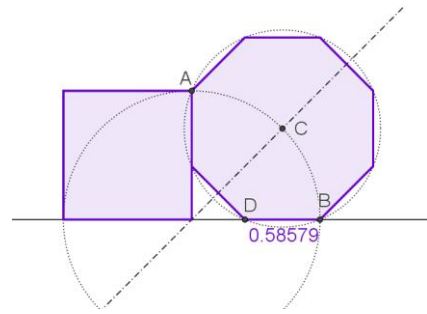
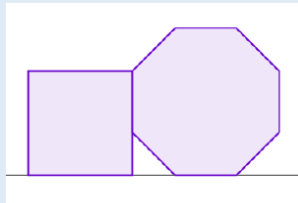


27 ggb

Un quadrat i un octògon regular tenen un costat sobre la mateixa recta i el vèrtex comú que s'observa a la figura.

Si el costat del quadrat mesura 1 dm, quant mesura el costat de l'octògon?

28



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

1. Comencem per traçar el quadrat de costat 1.
2. Tracem la circumferència amb centre el vèrtex inferior dret del quadrat que passe per A, vèrtex comú al quadrat i l'octògon.
3. El punt B, vèrtex de l'octògon, el trobem amb la intersecció d'aquesta circumferència i la recta de la base.
4. El centre de l'octògon és sobre la bisectriu traçada.
5. Trobem el punt C d'intersecció de la circumferència amb la bisectriu.
6. Tracem la circumferència amb centre a C que passe per B. Tots els vèrtexs de l'octògon són sobre ella.
7. Trobem el punt D amb la intersecció de la circumferència i la recta base.
8. El segment BD serà la base de l'octògon. Amb polígon regular de 8 vèrtexs el tracem.
9. El costat de l'octògon mesura 0.58579 dm.

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Entre el quadrat, l'octògon i recta de la base queda un triangle rectangle isòsceles de vèrtexs B, N i H en què es compleix

$$x^2 + x^2 = y^2$$

Com que el costat del quadrat és 1, també sabem que

$$x + y = 1$$

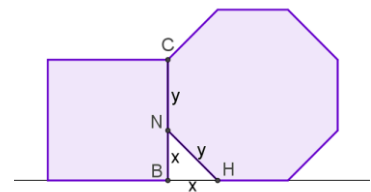
Resolem el sistema:

$$x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x \rightarrow x^2 + x^2 = (1 - x)^2 \rightarrow 2x^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Però com x és la longitud d'un catet, l'única solució vàlida és $x = -1 + \sqrt{2}$

El costat de l'octògon valdrà: $y = 1 - x = 1 - (-1 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} \cong 0.58579$ dm

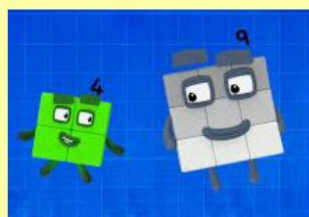


29**

El nombre $2026!$ és un quadrat perfecte?

Nota:

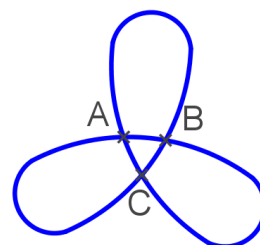
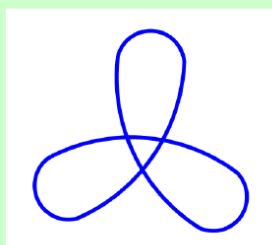
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

30**SOLUCIÓ:**

Perquè el nombre siga un quadrat perfecte, en factoritzar-lo hem de tenir una quantitat parella de qualsevol factor. Però 2017 , per exemple, és un nombre primer que només apareix una vegada (ocorre amb més factors primers).

31*

El meu cosí m'ha enviat aquest dibuix de com ha col·locat una corda tancada i em pregunta quina és la probabilitat que haja fet un nuc. Tenint en compte que no es veu quan la corda passa per damunt i quan per davall, calcula-ho.

**SOLUCIÓ:**

Anomenarem A, B i C als tres punts on es creuen dos trams de la corda.

En el punt A, a representarà la corda en la posició

En el punt B, b representarà la corda en la posició

En el punt C, c representarà la corda en la posició

Indicarem amb s que aqueix tram de corda està en la part superior i amb i en la inferior en el creuament corresponent.

Como tenim tres creuaments i dues opcions en cada un, el total de possibles posicions de la corda serà $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

as	bs	cs	1
as	bs	ci	2
as	bi	cs	2
as	bi	ci	NUC
ai	bi	ci	2
ai	bi	cs	1
ai	bs	ci	1
ai	bs	cs	NUC

Per comprovar si hi ha un nuc o no, agafem una cordeta i la posem tal com indiquen les diferents opcions. En estirar, veurem que només en dos dels casos hem aconseguit un nuc.

Els sis restants, en realitat només són dues disposicions diferents (indicades amb 1 i 2 a la taula). S'aconsegueixen rotant 120° el dibuix al voltant del centre d'aquest.

La probabilitat que tinga un nuc serà:

$$P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$