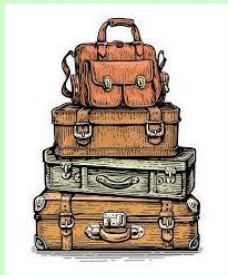


SOLUCIONES – DICIEMBRE 2025

1*

2

Tenemos cuatro maletas apiladas, de las que sabemos que cada una pesa la mitad de lo que pesa la que tiene debajo. Si entre todas pesan 150 kg, ¿cuánto pesará cada una por separado?



SOLUCIÓN:

Si cada una pesa la mitad de lo que pesa la que tiene debajo, podemos pensar que la segunda en peso es como si tuviéramos dos como la menos pesada, la que tiene debajo sería equivalente a cuatro y la mayor equivaldría a ocho.

En total tendríamos $1+2+4+8=15$ maletas como la menos pesada. Si entre todas pesan 150 kg, la menos pesada pesaría 10 kg. Los pesos se irían duplicando:

10 kg, 20 kg, 40 kg y 80 kg.

3***

4

En un triángulo, la longitud de uno de los lados es la media aritmética de las longitudes de los otros dos lados.

Demuestra que la longitud de la bisectriz al lado medio es $\sqrt{3}/2$ veces la media geométrica de las longitudes de los otros dos lados.



SOLUCIÓN:

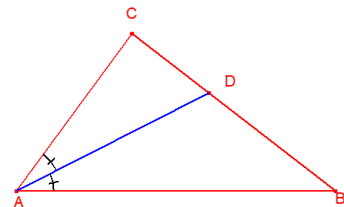
$$\text{Sean } \overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$$
$$a = \frac{b+c}{2}$$

Aplicamos la propiedad fundamental de la bisectriz en un triángulo: la bisectriz divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo:

$$\overline{CD} = kb, \overline{BD} = kc$$

Por lo que

$$a = \overline{CD} + \overline{BD} = k(b+c) = \frac{b+c}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$



Aplicando el teorema del coseno a los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$:

$$\frac{1}{4}b^2 = b^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot b \cdot \overline{AD} \cdot \cos \frac{A}{2} \rightarrow 8b \cdot \overline{AD} \cdot \cos \frac{A}{2} = 3b^2 + 4 \cdot \overline{AD}^2$$

$$\frac{1}{4}c^2 = c^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot c \cdot \overline{AD} \cdot \cos \frac{A}{2} \rightarrow 8c \cdot \overline{AD} \cdot \cos \frac{A}{2} = 3c^2 + 4 \cdot \overline{AD}^2$$

De donde

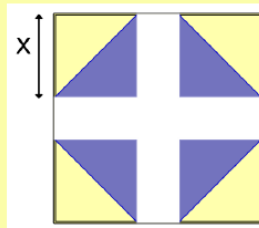
$$\frac{3b^2 + 4 \cdot \overline{AD}^2}{3c^2 + 4 \cdot \overline{AD}^2} = \frac{8b \cdot \overline{AD} \cdot \cos \frac{A}{2}}{8c \cdot \overline{AD} \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{b}{c} \rightarrow 3b^2c + 4c \cdot \overline{AD}^2 = 2bc^2 + 4b \cdot \overline{AD}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(c - b)\overline{AD}^2 = 3bc(c - b) \rightarrow \overline{AD}^2 = \frac{3}{4}bc \rightarrow \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot bc$$

5**

6

Un cuadrado de papel de 1 dm de lado se dobla por sus esquinas como se ve en la figura. Calcula la longitud de x para que la suma de las áreas de los triángulos azules coincida con la de la cruz blanca.



SOLUCIÓN:

ÁREA AZUL:

Equivale a la de dos cuadrados de lado x :

$$A_{azul} = 2x^2$$

ÁREA BLANCA:

Será la del cuadrado inicial menos la de cuatro cuadrados de lado x :

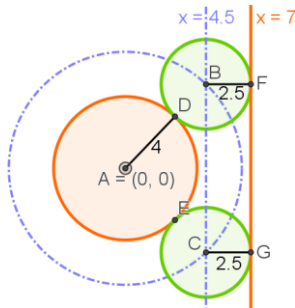
$$A_{blanca} = 1 - 4x^2$$

Para que sean iguales:

$$2x^2 = 1 - 4x^2 \rightarrow 6x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ dm}$$

8 ggb**9**

Dada una circunferencia de radio 4 cm y con centro en $A(0,0)$, traza todas las circunferencias de radio 2.5 cm que sean tangentes a ella y a la recta $x = 7$.



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Pasos a seguir:

1. Dibujamos la circunferencia centrada en $A(0,0)$ de radio 4 y la recta $x = 7$.
2. Si las circunferencias tangentes que buscamos deben tener radio 2.5, su centro debe estar en una circunferencia centrada en A de radio $4 + 2.5 = 6.5$. La dibujamos.
3. Para que también sea tangente a la recta, el centro debe estar en una recta paralela a $x = 7$ a 2.5 cm de ella. AL dibujar la de la izquierda ($x = 4.5$), es evidente que la de la derecha ($x = 9.5$) no sería válida porque una circunferencia centrada en ella con radio 2.5 no podría ser tangente a la circunferencia de radio 4 inicial.
4. Hallamos los puntos de intersección de la circunferencia de radio 6.5 y la recta $x = 4.5$. Estos puntos serán los centros de las circunferencias que buscamos.

10****11**

Aitana escribió el número 2026! en el sistema decimal. Después borró las últimas 500 cifras del número escrito. ¿Con qué cifra acaba finalmente el número de Aitana?

Nota: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$



SOLUCIÓN:

Es evidente que las últimas cifras de 2026! son iguales a 0, puesto que el producto $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2026$ contiene los factores 10, 100 y 1000.

Un número es divisible por 10N si y solo si es divisible por 2N y 5N.

Como que el factor 5 aparece menos veces que el factor 2, calculamos cuántas veces aparece el factor 5 en $2026!$

Los números divisibles por 5 son $\left[\frac{2026}{5}\right] = 405$, donde $[a]$ es la parte entera del número a .

Los números divisibles por 25 aportan un 5 más y son $\left[\frac{2026}{25}\right] = 81$

Los números divisibles por 5^3 aportan un 5 más y son $\left[\frac{2026}{125}\right] = 16$

Los números divisibles por 5^4 aportan un 5 más y son $\left[\frac{2026}{625}\right] = 3$

Si $n \geq 5$ entonces $\left[\frac{2026}{5^n}\right] < 1$ y no se añaden más 5.

Así, en la descomposición del número $2026!$ en factores primos, el factor 5 aparece $405 + 81 + 16 + 3 = 505$ veces.

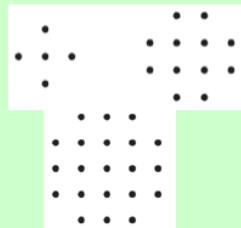
El factor 2 aparece al menos $\left[\frac{2026}{2}\right] = 1013 > 505$ veces.

Entonces $2026!$ es divisible por 10^{505} y, por tanto, los últimos 505 dígitos son iguales a 0. Así que el número final de Aitana, después de borrar los últimos 500 dígitos, también acabará en 0.

12*

Me ha dado por dibujar una secuencia de conjuntos de puntos siguiendo un cierto patrón. Aquí están los tres primeros. ¿Cuántos puntos tendrá el octavo conjunto que dibujaré?

13



SOLUCIÓN:

Tendrá 96 puntos.

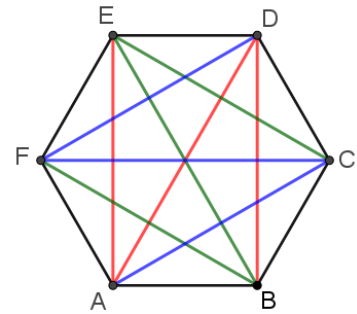
Hay varias formas de pensarlo. Podemos considerar que las figuras son cuadrados con lado dos puntos más del paso en el que estamos a los que se les han quitado los cuatro de los vértices. Así resulta: $(8 + 2)^2 - 4 = 96$

También se puede ver un cuadrado central, con lado los puntos del paso en el que estoy, con 4 líneas de esos puntos alrededor. En ese caso: $8^2 + 4 \cdot 8 = 96$.

15*

Pintamos cada diagonal de un hexágono regular de algún color, de forma que si dos diagonales se cortan no pueden ser del mismo color.

¿Cuántos colores necesitaremos como mínimo?

16**SOLUCIÓN:**

Necesitaríamos al menos tres colores, tal y como se ve en el dibujo.

17 ggb

Tenemos una mesa de billar americano de 3 x 5 metros. Golpeamos una bola desde una esquina con un ángulo de 45° y la fuerza suficiente para que no pare hasta entrar en un agujero. ¿Cuántas veces rebotará antes de entrar en el agujero del vértice opuesto?

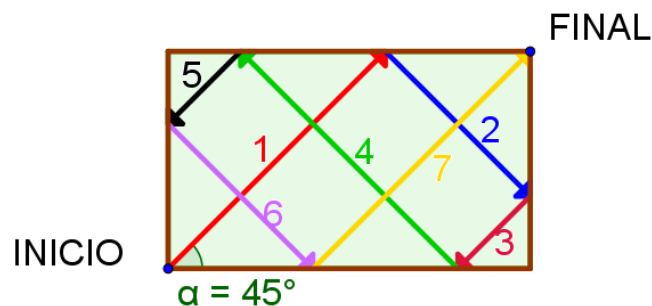
18**SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:**

Para dibujarlo, empezaremos por dibujar el rectángulo de lados 3 y 5.

Desde un vértice trazamos un ángulo de 45° sentido antihorario. Trazamos la recta con esa inclinación y hallamos el punto en que chocaría con el borde con la intersección de la recta y el lado correspondiente del rectángulo.

A partir de este punto vamos repitiendo el proceso hasta llegar al agujero del ángulo opuesto al del principio.

Tal y como se ve en el dibujo, golpearía seis veces ante de entrar en el agujero.



19****20**

Con los números 21, 22, ..., 28, 29 forma un cuadrado mágico aditivo de orden tres (los nueve números en una tabla 3 x 3 de forma que los tres números de cada fila, columna y diagonal sumen lo mismo).

**SOLUCIÓN:**

22	27	26
29	25	21
24	23	28

Método 1

Si los números que tenemos que colocar van del 21 al 29, para saber cuanto deben sumar los de cada línea, los sumamos todos y dividimos por 3:

$$21+22+\dots+29=225$$

$$225/3=75$$

Podemos resolverlo buscando todos los grupos de tres de estos números que sumen 75. Como el 25 aparece en cuatro de las opciones posibles (más que ninguno), lo colocamos en el centro.

Después es fácil encajar el resto.

Método 2

Sirve para cualquier cuadrado mágico de orden 3.

Se colocan los nueve números ordenados tal y como se ve en la imagen:

		23		
	22		26	
21		25		29
	24		28	
		27		

Después, los cuatro números que han quedado fuera del cuadrado se colocan en el hueco opuesto vacío de la línea en que se encuentran, tal y como se ve en el dibujo.

		23		
	22	27	26	
21	29	25	21	29
	24	23	28	
		27		

22 ****23**

Carlos se ha juntado estas vacaciones con sus primos de Zaragoza, Oviedo y Santander. Sabemos que 9 de ellos no viven en Cantabria, 6 no viven en Aragón y 13 no viven en Asturias. ¿Cuántos primos tiene Carlos y cuántos viven en cada sitio?

**SOLUCIÓN:**

Los que no viven en Cantabria viven en Zaragoza u Oviedo.

Los que no viven en Aragón viven en Oviedo o Santander.

Los que no viven en Asturias viven en Aragón o Santander.

Luego si sumamos las cantidades que nos dan como datos habremos sumado dos veces a todos los primos. Como $9 + 6 + 13 = 28$, Carlos tiene en total 14 primos, 8 viven en Zaragoza ($14 - 6 = 8$), 5 en Santander ($14 - 9 = 5$) y 1 en Oviedo ($14 - 13 = 1$).

24***25**

Olga escribió 2025 signos “-” y 2026 signos “+” en la pizarra. De vez en cuando, Claudia borra dos signos cualesquiera y escribe uno en su lugar: si ha borrado dos signos iguales, entonces escribe un signo “+”, y si ha borrado dos signos diferentes, entonces un signo “-”. Después de varias acciones de este tipo, solo queda un signo en el tablero. ¿Cuál es?

**SOLUCIÓN:**

Después de cada operación, el número de signos “-” no cambia o disminuye en 2:

Si borra “++” escribirá un “+” y el número de signos “-” en la pizarra será el mismo.

Si borra “- -” escribirá un “+” y el número de signos “-” disminuye en 2.

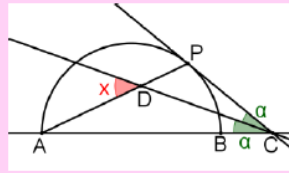
Si borra “+ -” escribirá un “-” y el número de signos “-” no cambia.

Por lo tanto, la paridad del número de signos “-” no cambia, y como inicialmente es un número impar, al final quedará un “-”.

26***

27

En la semicircunferencia de diámetro AB trazamos la recta tangente a la misma en el punto P. Llamamos C al punto de corte de la tangente con la recta por AB. Trazamos la bisectriz del ángulo en C. Halla la amplitud del ángulo x.

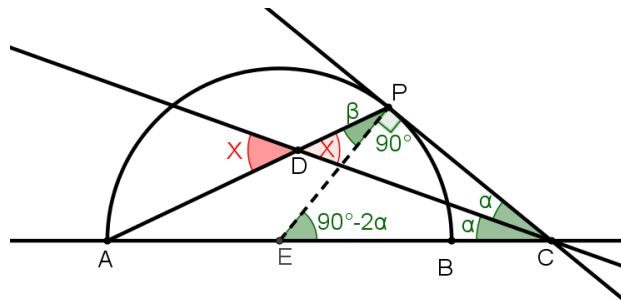


SOLUCIÓN:

Al ser la recta por P tangente a la circunferencia, es perpendicular al radio EP.

Si consideramos el triángulo ECP, el ángulo en E será

$$\hat{E} = 180^\circ - 2\alpha - 90^\circ = 90^\circ - 2\alpha$$



El ángulo $\hat{X}$ que queremos calcular coincide con el ángulo en D del triángulo DCP. Si hallamos el valor del ángulo β , podremos calcularlo. Para eso nos fijaremos en el triángulo AEP:

Es isósceles, ya que $\overline{AE} = \overline{EP}$ al ser dos radios de la circunferencia.

El ángulo en E es el suplementario de $90^\circ - 2\alpha$, es decir, es $90^\circ + 2\alpha$.

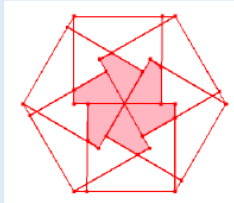
Los ángulos del triángulo AEP suman $90^\circ + 2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$

Para hallar la amplitud del ángulo $\hat{X}$, tendremos en cuenta el triángulo CDP, cuyos ángulos suman $\hat{X} + \alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, y como $\alpha + \beta = 45^\circ$, tendremos que

$$\hat{X} = 45^\circ$$

29 ggb**30**

La figura está formada por un hexágono regular y seis cuadrados iguales. Cada uno de los cuadrados tiene un vértice en el hexágono y los seis pasan por el centro del hexágono. Calcula la proporción entre el área sombreada y el área del hexágono regular.

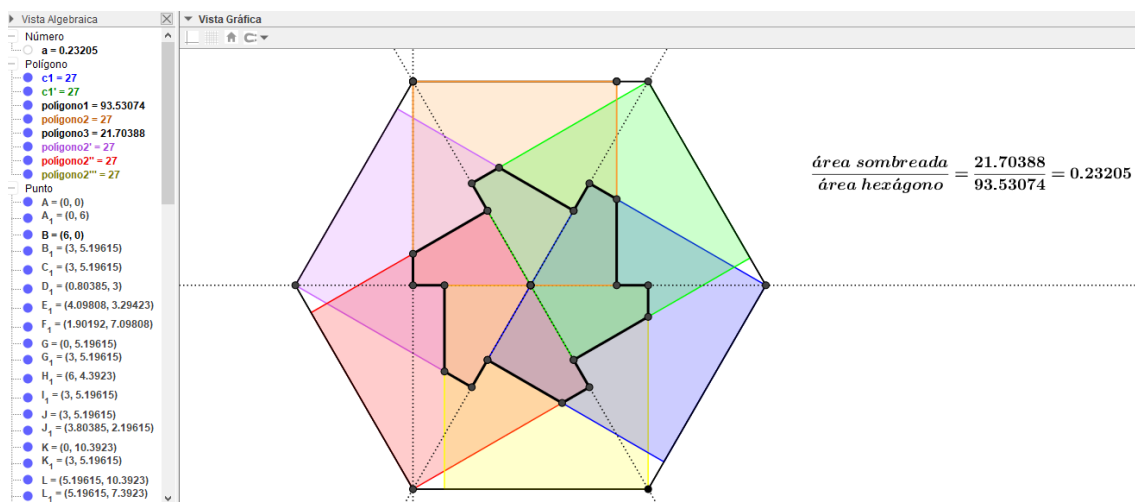


SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Pasos a seguir:

1. Dibujamos el hexágono.
2. Dibujamos las diagonales que van de un vértice al opuesto y la vertical de la izquierda.
3. Hallamos el centro del hexágono.
4. Para dibujar el primer cuadrado, hallamos la intersección entre la diagonal vertical y la horizontal. Ya tenemos dos vértices consecutivos del cuadrado y podemos dibujarlo con polígono regular de 4 vértices.
5. Para los demás cuadrados, vamos rotando 60° alrededor del centro del cuadrado hasta tener los seis.
6. Hallamos las intersecciones que definen el polígono interior y lo trazamos.

NOTA: Al haber varios cuadrados amontonados, es posible que cueste hallar los puntos de intersección marcando directamente en el dibujo, es más fácil si lo hacemos marcando los cuadrados en la vista algebraica. Para no tener que estar fijándonos en los nombres de cada cuadrado, es más cómodo pintar cada uno de un color, ya que su nombre en la vista algebraica aparece escrito en el color elegido.



SOLUCIÓN ANALÍTICA:

1. ÁREA DEL HEXÁGONO

Empezaremos por considerar el hexágono de lado 1, es decir, $\overline{AB} = 1$.

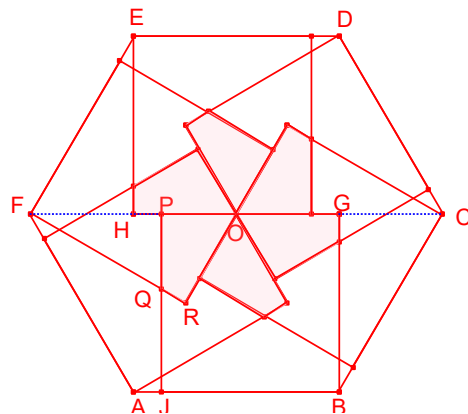
Para el área necesitamos la apotema: $a_p = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

El área del hexágono será $S_{HEX} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{6 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{4}$

2. ÁREA DEL POLÍGONO

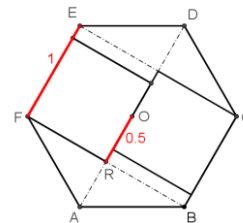
El polígono está formado por seis cuadriláteros iguales. Calcularemos la superficie que ocupa uno de ellos, en concreto el OPQR.

Si lo observamos, veremos que tiene dos ángulos opuestos de 90° cada uno (los ángulos en P y en R), por lo que, si trazamos un segmento desde O hasta Q, tendremos dos triángulos rectángulos, y para conocer su superficie solo necesitamos conocer la longitud de los catetos.



OR:

Si observamos el dibujo, teniendo en cuenta que $\overline{EF}$ es el lado del hexágono y O el centro del mismo, está claro que $\overline{OR} = \frac{1}{2}$



OP:

Para calcularlo, tendremos en cuenta que $\overline{OP} + \overline{OG}$ es el lado de uno de los cuadrados, cuya longitud coincide con la apotema del hexágono que ya hemos calculado; además, $\overline{OG} = \overline{OR}$, por lo que:

$$\overline{OP} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Para calcular los dos catetos que nos faltan usaremos el triángulo FPQ, del que conocemos sus ángulos: 30° el ángulo en F, 90° el ángulo en P y 60° el ángulo en R.

Podemos calcular el cateto $\overline{FP} = \overline{FO} - \overline{OP} = 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

PQ

En FPQ se cumple: $\text{tg } 30^\circ = \frac{\overline{PQ}}{\overline{FP}} \rightarrow \overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

QR

$\overline{QR} = \overline{FR} - \overline{FQ}$, donde $\overline{FR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\overline{FQ}$ es la hipotenusa del triángulo FPQ, donde se cumple $\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{PQ}}{\overline{FQ}} \rightarrow \overline{FQ} = \frac{\overline{PQ}}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 1$

Por tanto $\overline{QR} = \overline{FR} - \overline{FQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3} - 1) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

De donde:

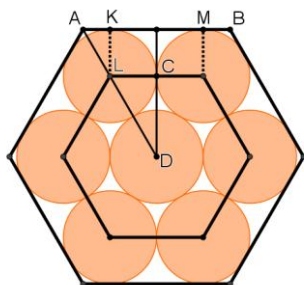
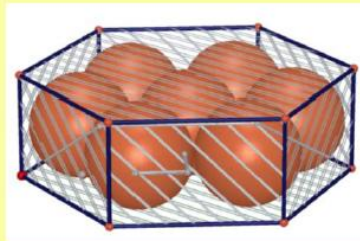
$$S_{OPQR} = S_{OPQ} + S_{OQR} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{PQ}}{2} + \frac{\overline{OR} \cdot \overline{QR}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{8} (2 - \sqrt{3})$$

La proporción pedida será:

$$\frac{S_{POL}}{S_{HEX}} = \frac{6 \cdot S_{OPQR}}{S_{HEX}} = \frac{6 \cdot \frac{3}{8} (2 - \sqrt{3})}{\frac{6\sqrt{3}}{4}} = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} \cong 0.23205$$

31**

La figura está formada por siete esferas de radio 1 en un prisma regular hexagonal. Calcula el volumen que hay entre el prisma y las siete esferas.



SOLUCIÓN:

Volumen de las esferas:

$$V_{7 \text{ esferas}} = 7 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \frac{28\pi}{3}$$

Volumen del prisma:

Necesitamos: 1. la altura, que será 2 (diámetro de una esfera).

2.El perímetro ($6\overline{AB}$) y la apotema del hexágono ($\overline{CD} + 1$).

Calculamos $\overline{CD}$:

El triángulo LCD es rectángulo y conocemos la hipotenusa que mide 2 y el cateto $\overline{LC}$ que mide 1.

$$\overline{CD} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Calculamos $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = 2(\overline{AK} + \overline{LC})$$

El triángulo AKL es semejante al LCD, por lo que:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{CD}} \rightarrow \frac{\overline{AK}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \overline{AK} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AB} = 2(\overline{AK} + \overline{LC}) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$

$$\begin{aligned} V_{prisma} &= \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \overline{AB} \cdot (\overline{CD} + 1) \cdot 2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot 2 = 24 + 16\sqrt{3} \cong 51.7128 \end{aligned}$$

$$V_{hueco} = V_{prisma} - V_{7 \text{ esferas}} = 24 + 16\sqrt{3} - \frac{28\pi}{3} \cong 22.3913$$