SOLUCIONS – DESEMBRE 2025

1* **2**

Tenim quatre maletes apilades, de les quals sabem que cadascuna pesa la meitat del que pesa la que té davall. Si entre totes pesen 150 kg, quant pesarà cadascuna per separat?

SOLUCIÓ:

Si cadascuna pesa la meitat del que pesa la que té davall, podem pensar que la segona en pes és com si en tinguérem dues com la menys pesada, la que té davall seria equivalent a quatre i la més gran equivaldria a vuit.

En total tindríem 1+2+4+8=15 maletes como la menys pesada. Si entre totes pesen 150 kg, la menys pesada pesaria 10 kg. Els pesos anirien duplicant-se:

10 kg, 20 kg, 40 kg i 80 kg.

3*** **4**

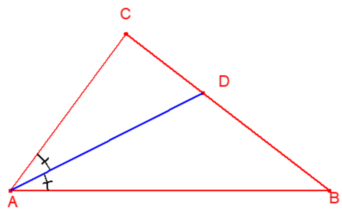
En un triangle, la longitud d'un dels costats és la mitjana aritmètica de les longituds dels altres dos costats. Demostra que la longitud de la bisectriu al costat mitjà és $\sqrt{3}/2$ vegades la mitjana geomètrica de les longituds dels altres dos costats.

SOLUCIÓ:

Siguen $\overline{BC} = a,\ \overline{AC} = b,\ \overline{AB} = c, a = \frac{b+c}{2}$

Apliquem la propietat fonamental de la bisectriu en un triangle: la bisectriu divideix el costat oposat en dos segments proporcionals als altres dos costats del triangle:

$$\overline{CD} = kb, \overline{BD} = kc$$



Per la qual cosa:

$$a = \overline{CD} + \overline{BD} = k(b+c) = \frac{b+c}{2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ABD}$ i $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\frac{1}{4}b^2 = b^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot b\cdot \overline{AD}\cdot \cos\frac{A}{2} \quad\rightarrow\quad 8b\cdot\overline{AD}\cdot\cos\frac{A}{2} = 3b^2 + 4\cdot\overline{AD}^2$$

$$\frac{1}{4}c^2 = c^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot c\cdot \overline{AD}\cdot \cos\frac{A}{2} \quad\rightarrow\quad 8c\cdot\overline{AD}\cdot\cos\frac{A}{2} = 3c^2 + 4\cdot\overline{AD}^2$$

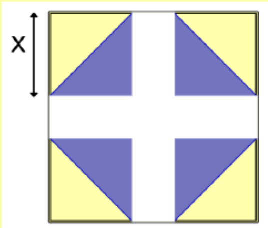
D'on obtenim:

$$\frac{3b^2 + 4\cdot\overline{AD}^2}{3c^2 + 4\cdot\overline{AD}^2} = \frac{8b\cdot\overline{AD}\cdot\cos\frac{A}{2}}{8c\cdot\overline{AD}\cdot\cos\frac{A}{2}} = \frac{b}{c} \quad\rightarrow\quad 3b^2c + 4c\cdot\overline{AD}^2 = 2bc^2 + 4b\cdot\overline{AD}^2 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad 4(c-b)\overline{AD}^2 = 3bc(c-b) \quad\rightarrow\quad \overline{AD}^2 = \frac{3}{4}bc \quad\rightarrow\quad \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot bc$$

5** **6**

Un quadrat de paper d'1 dm de costat es doblega pels seus cantons com es veu a la figura. Calculeu la longitud de x perquè la suma de les àrees dels triangles blaus coincidisca amb la de la creu blanca.



SOLUCIÓ:

ÀREA BLAVA:

Equival a la de dos quadrats de costat x:

$$A_{blau} = 2x^2$$

ÀREA BLANCA:

Serà la del quadrat inicial menys la de quatre quadrats de costat x:

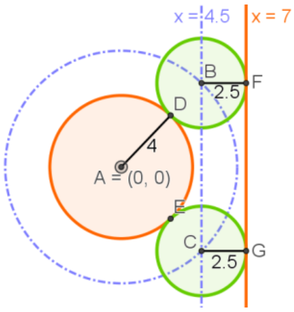
$$A_{blanca} = 1 - 4x^2$$

Perquè siguen iguals:

$$2x^2 = 1 - 4x^2 \quad\rightarrow\quad 6x^2 = 1 \quad\rightarrow\quad x = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ \text{dm}$$

8 ggb 9

Donada una circumferència de radi 4 cm i amb centre a $A(0,0)$, traça totes les circumferències de radi 2.5 cm que siguen tangents a ella i a la recta $x = 7$.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Passos a seguir:

1. Dibuixem la circumferència centrada a $A(0,0)$ de radi 4 i la recta $x = 7$.
2. Si les circumferències tangents que busquem han de tindre radi 2.5, el centre ha d'estar en una circumferència centrada a A de radi $4 + 2.5 = 6.5$. La dibuixem.
3. Perquè també siga tangent a la recta, el centre ha d'estar en una recta paral·lela a $x = 7$ i a 2.5 cm d'ella. En dibuixar la de l'esquerra ($x = 4.5$), és evident que la de la dreta ($x = 9.5$) no seria vàlida perquè una circumferència centrada en ella amb radi 2.5 no podria ser tangent a la circumferència de radi 4 inicial.
4. Trobem els punts d'intersecció de la circumferència de radi 6.5 i la recta $x = 4.5$. Aquests punts seran els centres de les circumferències que busquem.

10** 11

Aitana va escriure el número 2026! en el sistema decimal. Després va esborrar les últimes 500 xifres del número escrit. Amb quina xifra acaba finalment el número d'Aitana?
Nota: n!=n·(n-1)(n-2)·...·3·2·1

SOLUCIÓ:

És evident que les últimes xifres de 2026! són iguals a 0, ja que el producte $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2026$ conté els factors 10, 100 i 1000.

Un nombre és divisible per 10N si i sols si és divisible per 2N i 5N.

Com el factor 5 apareix menys vegades que el factor 2, calculem quantes vegades apareix el factor 5 en 2026!.

Els nombres divisibles per 5 són $[\frac{2026}{5}] = 405$, on $[a]$ és la part entera del nombre a.

Els nombres divisibles per 25 aporten un 5 més i són $[\frac{2026}{25}] = 81$

Els nombres divisibles per 5^3 aporten un 5 més i són $[\frac{2026}{125}] = 16$

Els nombres divisibles per 5^4 aporten un 5 més i són $[\frac{2026}{625}] = 3$

Si $n \geq 5$, aleshores $[\frac{2026}{5^n}] < 1$ i no s'afegeixen més 5.

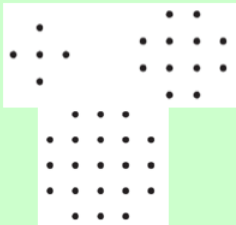
Així, en la descomposició del nombre 2026! en factors primers, el factor 5 apareix $405 + 81 + 16 + 3 = 505$ vegades.

El factor 2 apareix almenys $[\frac{2026}{2}] = 1013 > 505$ vegades.

Aleshores 2026! és divisible per 10^{505} i, per tant, els últims 505 dígits són iguals a 0. Així que el nombre final d'Aitana, després d'esborrar els últims 500 dígits, també acabarà en 0.

12* **13**

M'ha pegat per dibuixar una seqüència de conjunts de punts seguint un cert patró. Ací hi ha els tres primers. Quants punts tindrà el vuité conjunt que dibuixaré?



SOLUCIÓ:

Tindrà 96 punts.

Hi ha diverses maneres de pensar-ho.

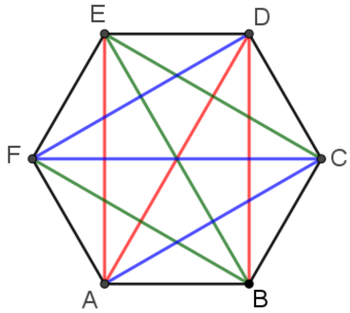
Podem considerar que les figures són quadrats amb costat dos punts més del pas en què estem, als quals se'ls han llevat els quatre punts dels vèrtexs. Així resulta: $(8 + 2)^2 - 4 = 96$

També es pot veure un quadrat central, amb costat els punts del pas on estic, amb 4 línies d'aquests punts al voltant. En aquest cas: $8^2 + 4 \cdot 8 = 96$.

15* **16**

Pintem cada diagonal d´un hexàgon regular d´algun color, de manera que si dues diagonals es tallen no poden ser del mateix color.

Quants colors necessitarem com a mínim?



SOLUCIÓ:

Necessitaríem almenys tres colors, com es veu al dibuix.

17 ggb **18**

Tenim una taula de billar americà de 3 x 5 metres. Colpegem una bola des d'un cantó amb un angle de 45° i la força suficient perquè no pare fins a entrar en un forat. Quantes vegades rebotarà abans d'entrar al forat del vèrtex oposat?

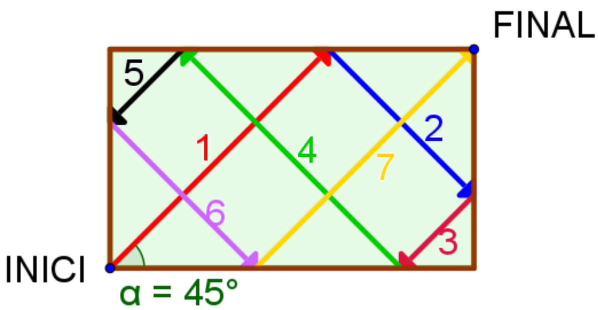
SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Per dibuixar-ho, començarem per dibuixar el rectangle de costats 3 i 5.

Des d'un vèrtex tracem un angle de 45° sentit antihorari. Tracem la recta amb aquesta inclinació i trobem el punt en què xocaria amb la vora amb la intersecció de la recta i el costat corresponent del rectangle.

A partir d'aquest punt repetim el procés fins arribar al forat de l'angle oposat al del principi.

Tal com es veu al dibuix, colpejaria sis vegades abans d'entrar al forat.



19**   **20**

Amb els números 21, 22, ..., 28, 29 forma un quadrat màgic additiu d'ordre tres (els nou números en una taula 3 x 3, de manera que els tres números de cada fila, columna i diagonal sumen el mateix).

SOLUCIÓ:

22	27	26
29	25	21
24	23	28

Mètode 1

Si els números que hem de col·locar van del 21 al 29, per saber quant han de sumar els de cada línia, els sumem tots i dividim per 3:

21+22+...+29=225

225/3=75

Podem resoldre-ho buscant tots els grups de tres d'aquests números que sumen 75. Com que el 25 apareix en quatre de les opcions possibles (més que cap), el col·loquem al centre.

Després és fàcil encaixar la resta.

Mètode 2

Serveix per a qualsevol quadrat màgic d'ordre 3.

Es col·loquen els nou números ordenats tal com es veu a la imatge:

		23		
	22		26	
21		25		29
	24		28	
		27		

Després, els quatre números que han quedat fora del quadrat es col·loquen al buit oposat de la línia en què es troben, tal com es veu al dibuix.

		~~23~~		
	22	27	26	
~~21~~	29	25	21	~~29~~
	24	23	28	
		~~27~~		

22 ** **23**

Carlos s'ha ajuntat aquestes vacances amb els cosins de Saragossa, Oviedo i Santander. Sabem que 9 no viuen a Cantàbria, 6 no viuen a Aragó i 13 no viuen a Astúries. Quants cosins té Carlos i quants viuen a cada lloc?

SOLUCIÓ:

Els que no viuen a Cantàbria viuen a Saragossa o Oviedo.

Els que no viuen a Aragó viuen a Oviedo o Santander.

Els que no viuen a Astúries viuen a Aragó o Santander.

Després, si sumem les quantitats que ens donen com a dades, haurem sumat dues vegades tots els cosins. Com $9 + 6 + 13 = 28$, Carlos té en total 14 cosins, dels quals 8 viuen a Saragossa $(14 - 6 = 8)$, 5 a Santander $(14 - 9 = 5)$ i 1 a Oviedo $(14 - 13 = 1)$.

24* **25**

Olga va escriure 2025 signes "-" i 2026 signes "+" a la pissarra. De tant en tant, Claudia esborra dos signes qualssevol i n'escriu un al seu lloc: si ha esborrat dos signes iguals, aleshores escriu un signe "+", i si ha esborrat dos signes diferents, llavors un signe "--". Després de diverses accions d'aquest tipus, només queda un signe al tauler. Quin és?

SOLUCIÓ:

Després de cada operació, la quantitat de signes ''$-$'' no canvia o disminueix en 2:

Si esborra ''$++$'' escriurà un ''$+$'' i la quantitat de signes ''$-$'' en la pissarra serà la mateixa.

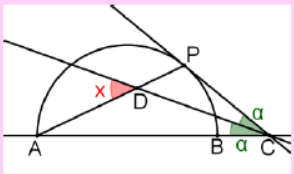
Si esborra ''$-\ -$'' escriurà un ''$+$'' i la quantitat de signes ''$-$'' disminueix en 2.

Si esborra ''$+\ -$'' escriurà un ''$-$'' i la quantitat de signes ''$-$'' no canvia.

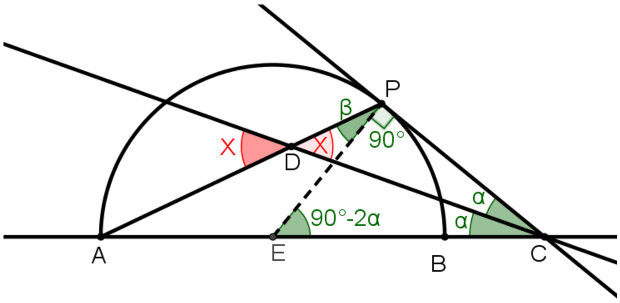
Per tant, la paritat de la quantitat de signes ''$-$'' no canvia y, com inicialment és un nombre imparell, al final quedarà un ''$-$''.

26*** 27

A la semicircumferència de diàmetre AB tracem la recta tangent a la mateixa en el punt P. Anomenem C al punt de tall de la tangent amb la recta per AB. Tracem la bisectriu de l'angle a C. Calcula l'amplitud de l'angle x.



SOLUCIÓ:



Com que la recta per P és tangent a la circumferència, és perpendicular al radi EP

Si considerem el triangle ECP, l'angle a E serà:

$\hat{E} = 180° - 2\alpha - 90° = 90° - 2\alpha$

L'angle $\widehat{X}$ que volem calcular coincideix amb l'angle D del triangle DCP. Si trobem el valor de l'angle β, podrem calcular-ho. Per això ens fixarem en el triangle AEP:

És isòsceles, ja que $\overline{AE} = \overline{EP}$ en ser dos radis de la circumferència.

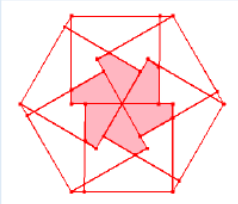
L'angle AEP és el suplementari de $90° - 2\alpha$, és a dir, $90° + 2\alpha$.

Els angles del triangle AEP sumen $90° + 2\alpha + \beta + \beta = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha + \beta = 45°$

Per trobar l'amplitud de l'angle $\widehat{X}$, tindrem en compte el triangle CDP, els angles del qual sumen $\widehat{X} + \alpha + \beta + 90° = 180°$ i, com $\alpha + \beta = 45°$, tindrem que $\widehat{X} = 45°$.

29 ggb 30

La figura està formada per un hexàgon regular i sis quadrats iguals. Cadascun dels quadrats té un vèrtex a l'hexàgon i els sis passen pel centre de l'hexàgon. Calcula la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.

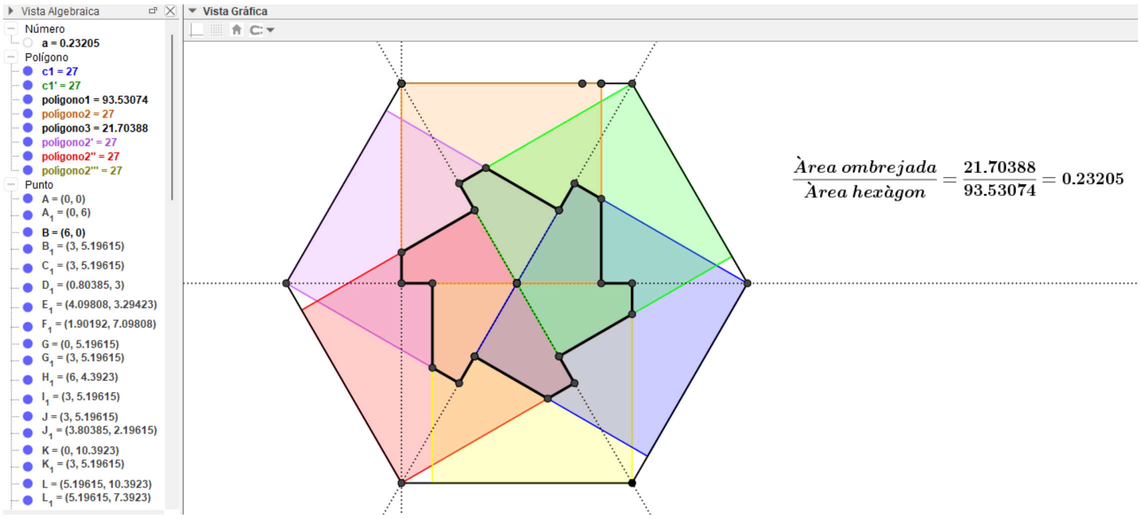


SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Passos a seguir:

1. Dibuixem l'hexàgon.
2. Dibuixem les diagonals que van d'un vèrtex a l'oposat i la vertical de l'esquerra.
3. Trobem el centre de l'hexàgon.
4. Per dibuixar el primer quadrat, trobem la intersecció entre la diagonal vertical i l'horitzontal. Ja tenim dos vèrtexs consecutius del quadrat i podem dibuixar-lo amb polígon regular de 4 vèrtexs.
5. Per als altres quadrats, anem rotant 60° al voltant del centre del quadrat fins a tindre els sis.
6. Trobem les interseccions que defineixen el polígon interior i el tracem.

NOTA: Com hi ha diversos quadrats amuntegats, és possible que coste trobar els punts d'intersecció marcant directament en el dibuix. És més fàcil si ho fem marcant els quadrats en la vista algebraica. Per no haver d'estar fixant-nos en els noms de cada quadrat, és més còmode pintar cadascun d'un color, ja que el nom en la vista algebraica apareix escrit en el color escollit.



SOLUCIÓ ANALÍTICA:

1. ÀREA DE L'HEXÀGON

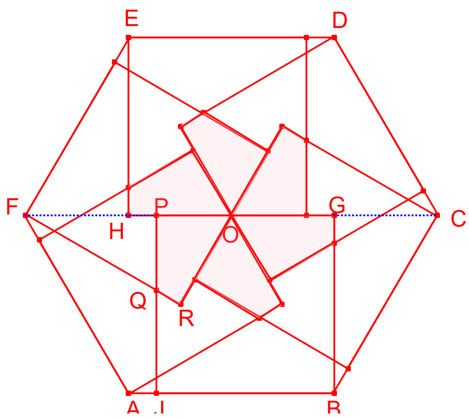
Començarem per considerar l'hexàgon de costat 1, és a dir, $\overline{AB} = 1$.

Per a l'àrea necessitem l'apotema: $a_p = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

L'àrea de l'hexàgon serà $S_{HEX} = \frac{perímetre \cdot apotema}{2} = \frac{6 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{4}$

2. ÀREA DEL POLÍGON

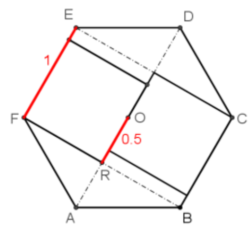
El polígon està format per sis quadrilàters iguals. Calcularem la superfície que n'ocupa un, en concret l'OPQR.



Si ho observem, veurem que té dos angles oposats de 90° cadascun (els angles en P i en R). Per tant, si tracem un segment des d'O fins a Q, tindrem dos triangles rectangles i, per conèixer la seva superfície, només necessitem conèixer la longitud dels catets.

$\overline{OR}$:

Si observem el dibuix, tenint en compte que $\overline{EF}$ és el costat de l'hexàgon i O el seu centre, és clar que $\overline{OR} = \frac{1}{2}$



$\overline{OP}$:

Per calcular-ho, tindrem en compte que $\overline{OP} + \overline{OG}$ és el costat d'un dels quadrats, la longitud dels quals coincideix amb l'apotema de l'hexàgon que ja hem calculat; a més, $\overline{OG} = \overline{OR}$, per la qual cosa:

$$\overline{OP} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Per calcular els dos catets que ens falten farem servir el triangle FPQ, del qual coneixem els angles: 30° l'angle en F, 90° l'angle en P i 60° l'angle en R. Podem calcular el catet $\overline{FP} = \overline{FO} - \overline{OP} = 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

$\overline{PQ}$

En FPQ es compleix: $tg\ 30° = \frac{\overline{PQ}}{\overline{FP}} \quad \rightarrow \quad \overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\overline{QR}$

$\overline{QR} = \overline{FR} - \overline{FQ}$, on $\overline{FR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\overline{FQ}$ és la hipotenusa del triangle FPQ, on es compleix

$$sin\ 30° = \frac{\overline{PQ}}{\overline{FQ}} \quad \rightarrow \quad \overline{FQ} = \frac{\overline{PQ}}{sin\ 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 1$$

Per tant: $\overline{QR} = \overline{FR} - \overline{FQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3} - 1\ ) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

D'on obtenim:

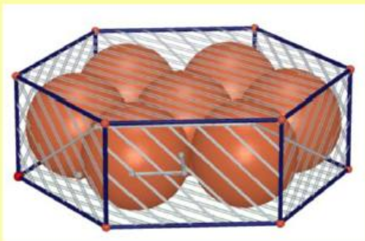
$$S_{OPQR} = S_{OPQ} + S_{OQR} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{PQ}}{2} + \frac{\overline{OR} \cdot \overline{QR}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{8}(2 - \sqrt{3})$$

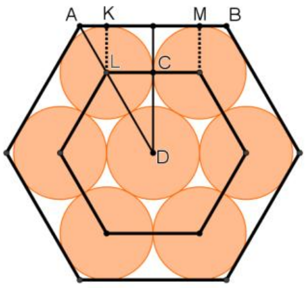
La proporció demanada serà:

$$\frac{S_{POL}}{S_{HEX}} = \frac{6 \cdot S_{OPQR}}{S_{HEX}} = \frac{6 \cdot \frac{3}{8}(2-\sqrt{3})}{\frac{6\sqrt{3}}{4}} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \cong 0.23205$$

31**

La figura està formada per set esferes de radi 1 en un prisma regular hexagonal.
Calcula el volum que hi ha entre el prisma i les set esferes.





SOLUCIÓ:

Volum de les esferes:

$$V_{7\ esferes} = 7 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{28\pi}{3}$$

Volum del prisma:

Necessitem: 1. L'altura, que serà 2 (diàmetre d'una esfera).

2. El perímetre ($6\overline{AB}$) i l'apotema de l'hexàgon ($\overline{CD} + 1$).

Calculem $\overline{CD}$:

El triangle LCD és rectangle i coneixem la hipotenusa, que mesura 2 i el catet $\overline{LC}$, que mesura 1.

$$\overline{CD} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Calculem $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = 2(\overline{AK} + \overline{LC})$$

El triangle AKL és semblant al LCD, per la qual cosa:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{CD}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{AK}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \overline{AK} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AB} = 2(\overline{AK} + \overline{LC}) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$

$$V_{prisma} = \frac{perímetre \cdot apotema}{2} \cdot altura = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \overline{AB} \cdot (\overline{CD} + 1) \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot 2 = 24 + 16\sqrt{3} \cong 51.7128$$

$$V_{buit} = V_{prisma} - V_{7\ esferes} = 24 + 16\sqrt{3} - \frac{28\pi}{3} \cong 22.3913$$