

SOLUCIONS – GENER 2026

La saga familiar Gil, ja desapareguda, va ser fundada per Blas Gil i els seus tres fills homes. Tots els homes de la família Gil van tindre 3 fills (homes o dones), tret de 7 que no van deixar descendència.

Els fundadors pertanyien a la saga, així com tots aquells homes o dones que eren fills o filles d'un home de la saga.

Si hi va haver 2026 dones en aquesta saga, quantes persones en total hi va haver en la saga Gil?

1**



Solució:

Siga x la quantitat d'homes de la família, inclosos els fundadors.

Calculem la quantitat de persones d'esta saga de dues maneres.

Per una banda, sumant homes i dones: $x + 2026$

Per una altra banda, cada persona d'esta família, excepte el patriarca Blas Gil, és fill d'un dels homes d'esta família. Segons l'enunciat, cada home, excepte 7, va tindre tres fills. El total de fills (homes o dones) que van tindre tots els homes és $3(x - 7)$. Si afegim Blas Gil, el total de persones de la saga seria $3(x - 7) + 1$.

Igualant ambdues expressions:

$$x + 2026 = 3(x - 7) + 1$$

$$2026 + 21 - 1 = 3x - x$$

$$2046 = 2x$$

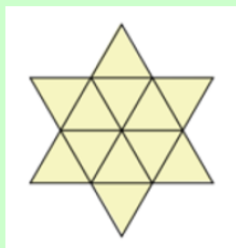
$$x = 1023$$

En total, la saga familiar és de $2026 + 1023 = 3049$ persones.

2*

3

Quants triangles equilàters pots comptar en aquesta figura?



Solució:

Hi ha 20 triangles equilàters en total:

12 de costat u, 6 de costat dos i 2 més de costat tres.

5*

Completa la multiplicació adjunta.

6

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \times \square 3 \\
 \hline
 \square 0 \square \\
 \square 4 \square \\
 \hline
 \square \square 1 \square 5
 \end{array}$$

Solució:

Assignarem una lletra a cadascun dels números que ens falten tal com es veu a la imatge adjunta.

1. S'ha de complir que $F=5$.
2. De la mateixa manera, $J=1$.
3. Perquè $F=5$, cal que $3 \cdot C$ acabe en 5, per la qual cosa $C=5$.

$$\begin{array}{r}
 \boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \\
 \times \boxed{D} 3 \\
 \hline
 \boxed{E} 0 \boxed{F} \\
 \boxed{G} 4 \boxed{H} \\
 \hline
 \boxed{J} \boxed{K} 1 \boxed{L} 5
 \end{array}$$

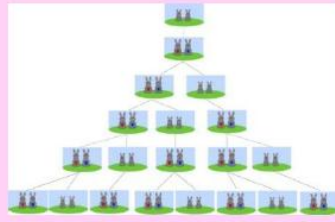
4. De $3 \cdot 5 = 15$ en portarem 1, per la qual cosa $3 \cdot B$ ha d'acabar en 9. D'ací deduïm que $B=3$.
5. Com que $ABC \cdot 3$ té tres xifres, A només pot prendre valors menors que 3. Si fora un 3 o superior, tindríem més xifres a E0F. D'ací podem deduir que E seria un 4 si $A=1$ o un 7 si $A=2$.
6. En sumar $E+4$ hem d'obtenir un número acabat en 1, per la qual cosa l'única opció possible és que $A=2$ i $E=7$.
7. Com que en sumar $E+4$ obtenim 11, en portarem 1, que en sumar-lo a G dona un nombre de dues xifres. Això només és possible si $G=9$ i $K=0$.
8. Sent $A=2$, i $G=9$, l'única opció per a D és que siga un 4 i portem 1 del producte anterior. $D=4$.
9. $D \cdot C = 4 \cdot 5 = 20$, d'on $H=0$.
10. D'això deduïm que $L=0$.

La multiplicació quedarà:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{2} \boxed{3} \boxed{5} \\
 \times \boxed{4} 3 \\
 \hline
 \boxed{7} 0 \boxed{5} \\
 \boxed{9} 4 \boxed{0} \\
 \hline
 \boxed{1} \boxed{0} 1 \boxed{0} 5
 \end{array}$$

7***

Si a, b, c, d són quatre termes consecutius de la successió de Fibonacci, comprova que els nombres $a \cdot d$, $2 \cdot b \cdot c$, $b^2 + c^2$ formen una terna pitagòrica.

8**Solució:**

El que siguen termes consecutius de la successió de Fibonacci ens diu que cadascun d'ells és el resultat de sumar els dos anteriors, és a dir:

$$c = a + b \quad \text{i} \quad d = b + c = b + a + b = a + 2b$$

Podem escriure els quatre termes així: $a, b, a + b, a + 2b$.

Perquè $a \cdot d$, $2 \cdot b \cdot c$ i $b^2 + c^2$ formen una terna pitagòrica, el quadrat d'un ha de coincidir amb la suma dels quadrats dels altres dos, així que començarem per calcular els quadrats:

$$1) (a \cdot d)^2 = (a \cdot (a + 2b))^2 = a^2(a^2 + 4ab + 4b^2) = a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2$$

$$2) (2bc)^2 = (2b(a + b))^2 = 4b^2(a^2 + 2ab + b^2) = 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4$$

$$3) (b^2 + c^2)^2 = (b^2 + (a + b)^2)^2 = (b^2 + a^2 + 2ab + b^2)^2 = (2b^2 + a^2 + 2ab)^2 = a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4$$

Si sumem els dos primers:

$$(a \cdot d)^2 + (2bc)^2 = (a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2) + (4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4) = a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 = (b^2 + c^2)^2$$

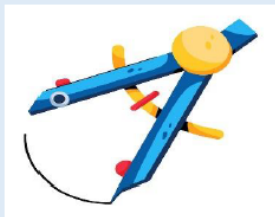
Obtenim el tercer, per la qual cosa podem afirmar que formen una terna pitagòrica.

9 ggb

10

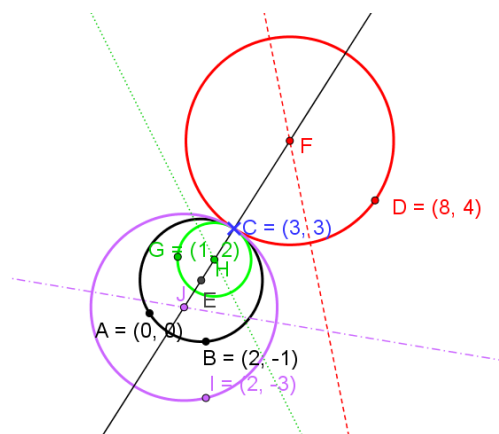
Donada la circumferència que passa per $A(0,0)$, $B(2,-1)$ i $C(3,3)$, traça una altra que siga tangent a la circumferència donada en C i que passe:

- pel punt $D(8,4)$
- pel punt $E(1,2)$
- pel punt $F(2,-3)$



Solució amb geogebra:

- Comencem per introduir els tres punts A , B i C pels quals ha de passar la circumferència i la tracem amb circumferència per tres punts (la negra a la imatge).
- Trobem el centre de la circumferència E , ja que qualsevol circumferència tangent a ella en C ha de tindre el centre en la recta que uneix E amb C . Tracem aquesta recta.



Circumferència per $D(8,4)$ (color roig)

Introduïm el punt D .

Com tenim dos punts de la circumferència que busquem, C i D , el centre ha d'estar en la mediatriu del segment que els uneix. La tracem.

Trobem el punt F , centre de la circumferència que busquem, com la intersecció de la mediatriu amb la recta per E i C .

Ja podem traçar la circumferència amb el centre i un dels dos punts que tenim.

El procediment per a les altres dues circumferències és el mateix.

12**

Hi ha 2027 nombres escrits a la pissarra. Resulta que la suma de dos nombres qualssevol dels escrits a la pissarra també està escrita a la pissarra. Quina és la quantitat més gran de nombres diferents de zero que es poden escriure?

13**Solució:**

Ordenem els nombres en ordre ascendent

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{2026} \leq x_{2027}$$

De la condició inicial, el nombre $x_{2026} + x_{2027}$ també està escrit a la pissarra, així que

$$x_{2026} + x_{2027} \leq x_{2027} \Rightarrow x_{2026} \leq 0$$

El nombre $x_1 + x_2$ també està escrit a la pissarra, així que

$$x_1 \leq x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 \geq 0$$

Aleshores, tenim la sèrie de desigualtats:

$$0 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{2025} \leq x_{2026} \leq 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = \dots = x_{2025} = x_{2026} = 0$$

Hi ha 2025 números iguals a 0: del x_2 al x_{2026}

Un exemple d'un conjunt de 2027 números escrits a la pissarra, on hi ha 2025 zeros, i la suma de dos qualsevol també està escrita a la pissarra, és:

$$-1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1$$

Per tant, la resposta a la pregunta és **2**.

14*

En una reunió, $\frac{2}{3}$ dels assistents eren homes. De les dones, $\frac{2}{3}$ parts no necessitava ulleres, i unes altres sis sí que en portaven.

Quina fracció del total de participants són les dones amb ulleres? Quants homes hi havia?

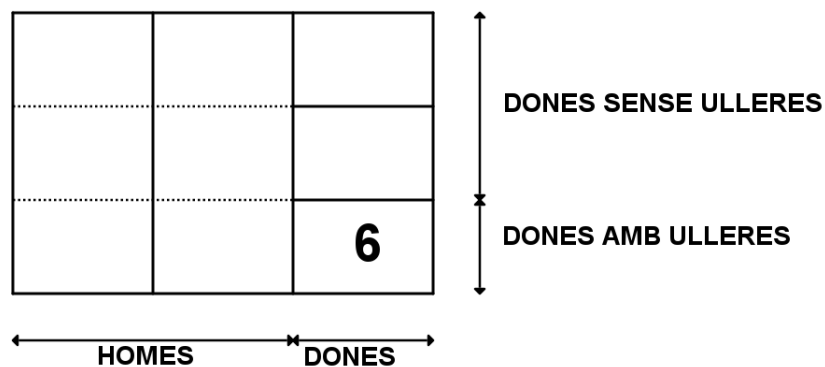
15**Solució:**

Al rectangle de la imatge les dues primeres columnes representen els $\frac{2}{3}$ del total, és a dir, els homes.

L'última seria el terç corresponent a les dones. La partim en tres trossos iguals. Un terç correspondrà a les dones amb ulleres, que sabem que són sis.

La fracció del total que són les dones amb ulleres serà $\frac{1}{9}$, ja que són un rectangle dels nou que tenim.

Cadascun dels nou rectangles en què queda dividit el rectangle original representarà 6 persones, per la qual cosa podem saber que el nombre d'homes és $6 \cdot 6 = 36$.



16**

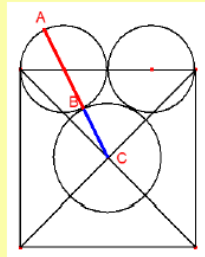
17

La figura està formada per un quadrat i tres circumferències tangents.

Prova que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

NOTA: Φ és el nombre d'or.



Solució:

Siga $\overline{JK} = 4$

$\overline{AB} = 2$

Siga $\overline{CB} = r$

$\overline{CM} = 2, \overline{MN} = 1, \overline{CN} = 1 + r$

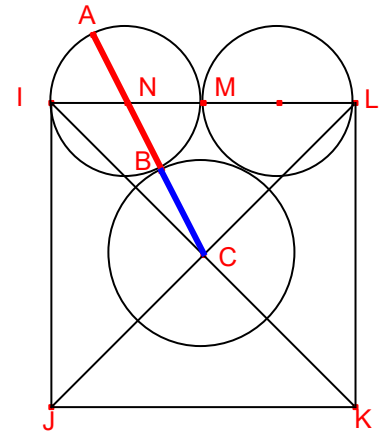
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle CMN$:

$$(1 + r)^2 = 1 + 4 = 5$$

Resolent l'equació:

$$r = -1 + \sqrt{5}$$

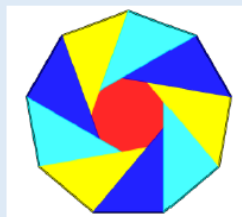
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{r} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$



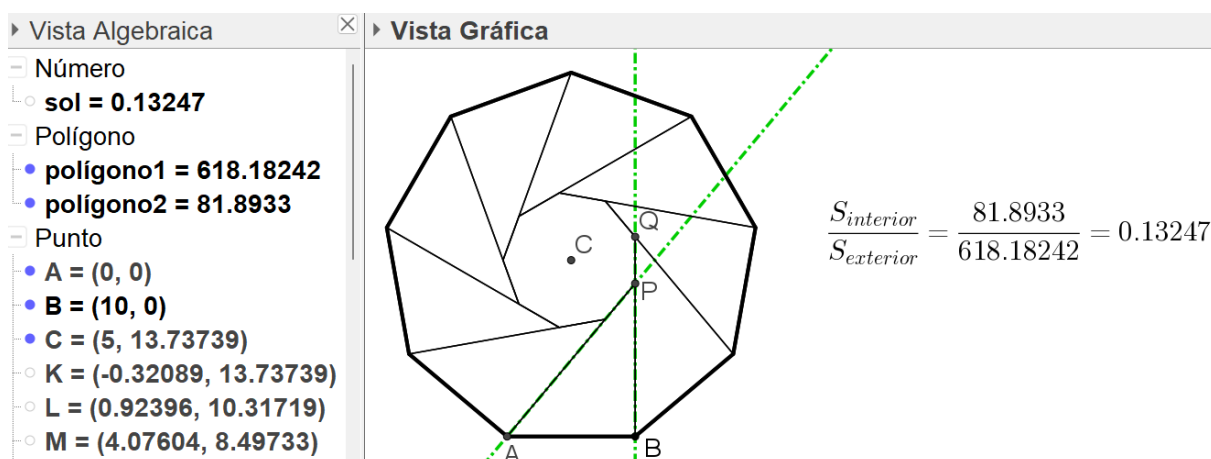
19 ggb

20

La figura està formada per un polígon regular de 9 costats, 9 triangles rectangles iguals i un polígon regular de 9 costats interior. Calculeu la proporció entre les àrees dels dos polígons regulars.



Solució amb geogebra:



1. Començarem per dibuixar el polígon exterior amb polígon regular des dels punts $A(0,0)$ i $B(10,0)$.
2. Des dels dos vèrtexs A i B tracem respectivament perpendiculars al costat que tenen a la seua esquerra, i amb la intersecció d'aquestes dues rectes obtenim el punt P , que és el vèrtex que faltava per a un dels triangles.
3. Per dibuixar la resta dels triangles, tenim dues opcions: repetir el que hem fet al punt 2 o, el que és més còmode, rotar el triangle que ja tenim 40° al voltant del centre C del polígon inicial.
4. Trobem el punt Q amb intersecció per aconseguir dos vèrtexs consecutius del polígon interior. Ho dibuixem amb polígon regular de 9 vèrtexs.
5. Les superfícies de tots dos ens apareixen a la vista algebraica. Per aconseguir la relació demanada, introduïm a la barra d'entrada:

$sol = polígono2 / polígono1$

La relació demanada serà $\frac{S_{interior}}{S_{exterior}} = sol = 0.13247$

Solució analítica:

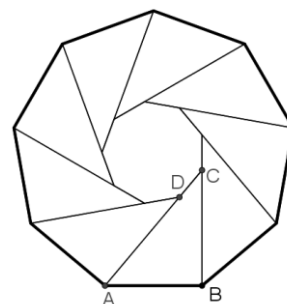
Siga $\overline{AB} = 1$, costat del polígon regular exterior.

Siga $\overline{CD} = c$, costat del polígon regular interior.

Tenint en compte que l'angle interior d'un polígon amb 9 vèrtexs mesura $\frac{(9-2) \cdot 180}{9} = 140^\circ$,

podem vore que $\angle CAB = 50^\circ$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC} = \operatorname{tg} 50^\circ, \overline{AC} = \frac{1}{\cos 50^\circ}$$



Com $\overline{AD} = \overline{BC}$:

$$\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{BC} = \frac{1}{\cos 50^\circ} - \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{1 - \sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{\text{interior}}}{S_{\text{exterior}}} = \frac{9\overline{CD} \cdot Ap_{\text{int}}}{9\overline{AB} \cdot Ap_{\text{ext}}}$$

La relació entre ambdues apotemes és la mateixa que la que hi ha entre els costats dels dos polígons, ja que els angles coincideixen, per la qual cosa:

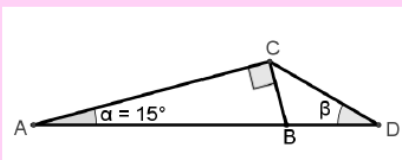
$$\frac{S_{\text{interior}}}{S_{\text{exterior}}} = \frac{9\overline{CD} \cdot Ap_{\text{int}}}{9\overline{AB} \cdot Ap_{\text{ext}}} = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{CD}}{1}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}\right)^2 \approx 0.1325$$

21***

En el triangle adjunt coneixem que $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ i dos angles del triangle ABC, de 15° i 90° .

Calcula l'amplitud de l'angle β .

22



Solució:

MÈTODE 1:

En el triangle ABC, l'angle en B mesura $180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

En el triangle BCD, l'angle en B mesura $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Si tracem una circumferència amb diàmetre AB, podem assegurar que el punt C està sobre ella per ser recte l'angle a C.

Si anomenem M al punt mitjà del segment AB, serà el centre de la circumferència, de manera que els segments MA i MC seran dos dels seus radis. D'ací deduïm que el triangle AMC és isòsceles.

Al triangle MCD també tenim dos costats iguals, MC i CD, per la qual cosa també és isòsceles.

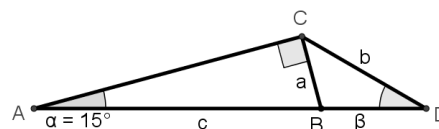
En el triangle AMC, l'angle a C mesura 15° . L'angle a M mesura 150° .

Si ara considerem el triangle MCD, l'angle a M mesura $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, que és el mateix que mesura l'angle a D per ser triangle isòsceles.

MÈTODE 2 (amb trigonometria):

Com que és el triangle ABC rectangle, es compleix que $\sin 15^\circ = \frac{a}{c}$

També sabem que l'angle a B mesura 75° .



Aplicant el teorema del sinus a BCD, tindrem: $\frac{\sin 105^\circ}{b} = \frac{\sin \beta}{a}$.

Reunint tota la informació de què disposem:

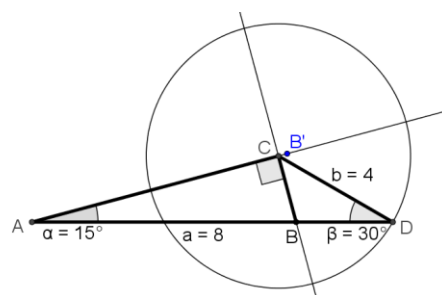
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 15^\circ = \frac{a}{c} \\ c = 2b \\ \frac{\sin 105^\circ}{b} = \frac{\sin \beta}{a} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 2 \cdot \sin 15^\circ \\ \sin \beta = \frac{a}{b} \cdot \sin 105^\circ \end{array} \right. \rightarrow \sin \beta = 2 \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 105^\circ$$

Per la qual cosa $\beta = \arcsin (2 \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 105^\circ) = 30^\circ$

MÈTODE 3 (amb geogebra):

Passos a seguir:

1. Començarem per dibuixar el segment $a = \overline{AB} = 8$.
2. Des del punt A, en sentit antihorari, marquem un angle de 15° . Això ens dona el punt B' . Tracem una recta unint A i B' .
3. Tracem des de B la recta perpendicular a l'anterior i trobem el punt C, intersecció de les dues.
4. Amb centre a C i radi la meitat del segment entre A i B (4 en el nostre cas), tracem una circumferència.
5. Prolongant el segment AB i fent la intersecció amb la circumferència, trobem el punt D.
6. Tracem el segment CD i mesurem l'angle β que buscàvem. Obtenim $\beta = 30^\circ$.



23*

De la llista de nombres naturals des de l'1 fins al milió, ambdós inclosos, seleccione els que s'escriuen usant només zeros i/o uns. Quants n'he seleccionat?

24**Solució:**

D'una xifra: només n'hi ha un, l'1.

De dues xifres: n'hi haurà dos, ja que ha de començar per 1 i per a l'altra xifra tenim dues opcions, 0 i 1, de manera que tindriem el 10 i l'11.

De tres xifres: igual que abans, la primera xifra ha de ser un 1. Per a les altres dues, hi ha dues opcions en cada cas, és a dir, tindrem $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ nombres, que serien 100, 101, 110 i 111.

De quatre xifres, amb el mateix raonament, tindriem $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

De cinc xifres tindriem $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

De sis xifres $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

De set xifres només un, ja que parem al milió, que és el més menut que podem triar amb set xifres.

En total tindrem: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 1 = 64$ nombres.

26*

El 22 de febrer de 2022 vam tindre una data capicua, 22/02/2022, perquè es llig igual d'esquerra a dreta que de dreta a esquerra. Quina va ser l'anterior data capicua? Quina serà la següent data capicua?

27**Solució:**

Cal tenir en compte que el número corresponent al dia només pot ser un que comence per 0, 1 o 2. Els anys només podran acabar amb una d'aquestes tres xifres.

El mes, mentre estiguem en un any que comença per 2, haurà de ser sempre febrer, 02.

Por tant:

L'anterior va ser: 12/02/2021.

La següent: 03/02/2030.

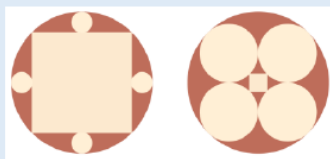
Després d'aquesta vindria: 13/02/2031.

28 ggb

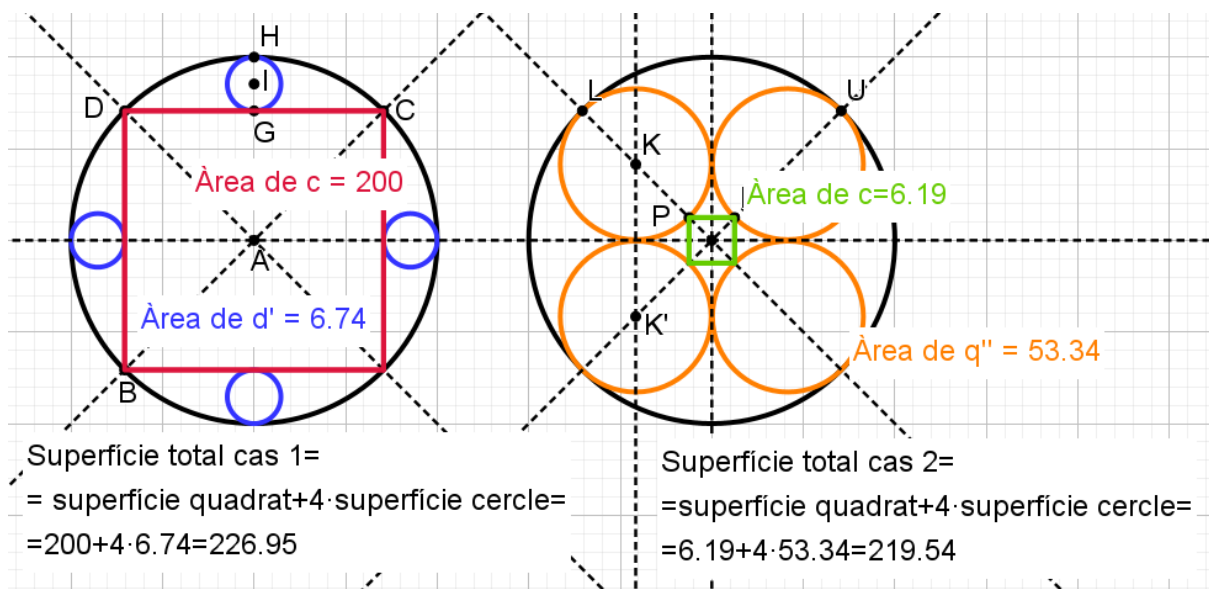
Un fabricant de torrons vol empaquetar, en caixes redones de 10 cm de radi, una peça de torró quadrada i quatre redones, tal com es veu al dibuix.

Quina de les dues opcions contindrà més torró?

29



Solució amb geogebra:



Atès que en els dos casos estem usant caixes similars, l'alçada de totes les peces de torró serà la mateixa, per la qual cosa n'hi ha prou que comprovem en quin cas la superfície ocupada és més gran per saber en quina hi haurà més torró.

Construcció del cas 1: quadrat gran i cercles menuts.

1. Dibuixem una circumferència centrada a $A(0,0)$ amb radi 10.
2. Dibuixem les bisectrius dels quadrants: $y = x$, $y = -x$.
3. Els punts d'intersecció de la circumferència amb aquestes rectes ens donen els quatre vèrtexs del quadrat. Amb polígon regular de 4 vèrtexs i dos vèrtexs consecutius dibuixem el quadrat. En la vista algebraica obtenim la seua àrea: 200.
4. Per a les circumferències, trobem els punts d'intersecció de l'eix d'ordenades amb la circumferència H i amb el quadrat G . El punt mitjà del segment que els uneix serà el centre d'una de les circumferències. La tracem.
5. Les altres les podem traçar per rotació al voltant d' A i amb 90° d'amplitud.



6. Amb  trobem l'àrea d'un dels cercles, i obtenim 6.74.
7. Calculem l'àrea total sumant la del quadrat i la de 4 cercles. Obtenim 226.95.

Construcció del cas 2: quadrat menut i cercles grans.

1. Dibuixem una circumferència centrada a $A(0,0)$ amb radi 10.
2. Dibuixem les bisectrius dels quadrants: $y = x$, $y = -x$.

3. Els punts d'intersecció de la circumferència amb aquestes rectes ens dona els quatre punts de tangència de les circumferències interiors amb l'exterior.
4. El centre de les circumferències es troba en les bisectrius.
5. Amb un punt en objecte, introduïm un punt K que serà el centre d'una circumferència que passe pel punt L .
6. Desplacem el punt K fins que la circumferència siga tangent als dos eixos.
7. Les altres circumferències les dibuixem, igual que abans, rotant al voltant del centre de la circumferència 90° .
8. Com abans, trobem l'àrea d'un dels cercles. Obtenim 53.34.
9. Per dibuixar el quadrat, trobem els punts d'intersecció de les bisectrius amb les circumferències. Amb dos consecutius dibuixem el quadrat. La superfície d'aquest la veiem en la vista algebraica.
10. La superfície total l'obtenim igual que abans i resulta ser 219.54.

Per tant, en el primer cas hi haurà més torró.

30**

La figura està formada per un hexàgon regular i dos quadrats iguals.
Calcula l'àrea total ombrejada de color verd.

31



Solució:

Anomenarem x al costat de l'hexàgon i y al costat del quadrat.

La diagonal del quadrat coincideix amb el costat de l'hexàgon, de manera que es compleix que $y^2 + y^2 = x^2$

Per tant, l'àrea dels dos quadrats coincideix amb x^2 .

Calcularem el valor de x usant el triangle rectangle MNP:

$$\overline{MP}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{MN}^2 \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \rightarrow \frac{x^2}{4} + 1 + x + \frac{x^2}{4} = x^2 \rightarrow$$

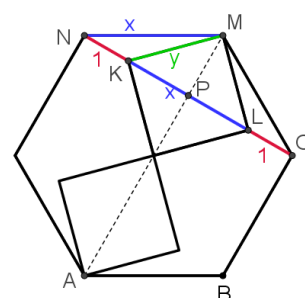
$$\rightarrow \frac{x^2}{2} - 1 - x = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm \sqrt{3}$$

I, com x és una longitud, l'únic resultat amb sentit és $x = 1 + \sqrt{3}$

Amb açò ja podem calcular les superfícies:

$$S_{\text{quadrats}} = x^2 = (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

Per a l'hexàgon, tindrem en compte que l'apotema coincideix amb $\frac{x}{2} + 1$:



$$S_{hexàgon} = \frac{6x \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right)}{2} = \frac{3x^2 + 6x}{2} = \frac{3(1 + \sqrt{3})^2 + 6(1 + \sqrt{3})}{2} = 9 + 6\sqrt{3} \cong \\ \cong 19.3923 \, u^2$$

La superfície de la zona acolorida de verd serà:

$$S_{verd} = S_{hexàgon} - S_{quadrats} = 9 + 6\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3}) = 5 + 4\sqrt{3} \, u^2$$