

EJERCICIOS DE ENERO 2026 RESUELTOS

La saga familiar Gil, que desgraciadamente ahora ha dejado de existir, fue fundada por Blas Gil y sus tres hijos varones. Todos los hombres de esta familia tenían 3 hijos, a excepción de 7 que no dejaron descendencia. En total hubo 2026 mujeres en esta saga. Cuántas personas hubo en la saga Gil? Considera que los fundadores pertenecían a la saga, así como aquellos y solo aquellos hijos cuyo padre (y no su madre) pertenecía a la saga.

1**



Solución:

Sean x todos los hombres de la familia, incluidos los fundadores.

Calculamos el número de personas de esta saga de dos maneras.

Por un lado, sumando hombres y mujeres: $x + 2026$

Por otro lado, cada persona de esta familia, excepto el patriarca Blas Gil, es hijo de uno de los hombres de esta familia. Según la condición, cada hombre, excepto 7, tenía tres hijos. Por lo tanto, excepto Blas, todos los hijos que tuvieron (de ambos sexos), son $3(x-7)$, y con si lo contamos, el total de personas sería $3(x-7)+1$.

Por lo tanto, el número x de hombres de la familia es:

$$x + 2026 = 3(x - 7) + 1$$

$$2026 + 21 - 1 = 3x - x$$

$$2046 = 2x$$

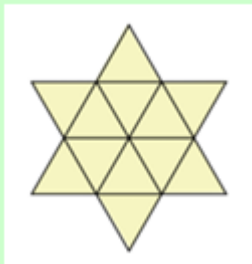
$$x = 1023$$

En total la saga familiar es de $2026 + 1023 = 3049$ personas.

2*

3

¿Cuántos triángulos equiláteros puedes contar en esta figura?



Solución:

Hay 20 triángulos equiláteros en total:

12 de lado uno, 6 de lado dos y 2 más de lado tres.

5*

6

Completa la multiplicación adjunta.

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \times \square 3 \\
 \hline
 \square 0 \square \\
 \square 4 \square \\
 \hline
 \square \square 1 \square 5
 \end{array}$$

Solución:

Asignaremos una letra a cada uno de los números que nos faltan tal y como se ve en la imagen adjunta.

1. Debe cumplirse que $F=5$.
2. De la misma forma, $J=1$.
3. Para que $F=5$, es necesario que $3 \cdot C$ acabe en 5, por lo que $C=5$.
4. De $3 \cdot 5=15$ llevaremos 1, por lo que $3 \cdot B$ debe acabar en 9. De aquí deducimos que $B=3$.
5. Como $ABC \cdot 3$ tiene tres cifras, A sólo puede tomar valores menores que 3, si fuera un 3 o superior, tendríamos más cifras en E0F. De aquí, podemos deducir que E sería un 4 si $A=1$, o un 7 si $A=2$.
6. Al sumar $E+4$ debemos obtener un número acabado en 1, por lo que la única opción posible es la de que $A=2$ y $E=7$.
7. Como al sumar $E+4$ obtenemos 11, llevaremos 1, que al sumarlo a G da un número de dos cifras. Esto solo es posible si $G=9$ y $K=0$.
8. Siendo $A=2$, y $G=9$, la única opción para D es que sea un 4 y llevemos 1 del producto anterior. $D=4$.
9. $D \cdot C=4 \cdot 5=20$, de donde $H=0$.

$$\begin{array}{r}
 \boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \\
 \times \boxed{D} 3 \\
 \hline
 \boxed{E} 0 \boxed{F} \\
 \boxed{G} 4 \boxed{H} \\
 \hline
 \boxed{J} \boxed{K} 1 \boxed{L} 5
 \end{array}$$

10. De esto deducimos que $L=0$.

La multiplicación quedará:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{5} \end{array} \\
 \times \begin{array}{cc} \boxed{4} & \boxed{3} \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} \boxed{7} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \boxed{9} & \boxed{4} & \boxed{0} \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array}
 \end{array}$$

7***

Si a, b, c y d son cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, comprueba que los números $a \cdot d$, $2 \cdot b \cdot c$ y $b^2 + c^2$ forman una terna pitagórica.

8

Solución:

El que sean términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, nos dice que cada uno es el resultado de sumar los dos anteriores, es decir:

$$c = a + b \quad \text{y} \quad d = b + c = b + a + b = a + 2b$$

Los cuatro términos podremos entonces escribirlos como $a, b, a + b, a + 2b$.

Para que $a \cdot d$, $2 \cdot b \cdot c$ y $b^2 + c^2$ formen una terna pitagórica, el cuadrado de uno de ellos debe coincidir con la suma de los cuadrados de los otros dos, así que empezaremos por hacer los cuadrados:

$$\begin{aligned}
 1) \quad (a \cdot d)^2 &= (a \cdot (a + 2b))^2 = a^2(a^2 + 4ab + 4b^2) = a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2 \\
 2) \quad (2bc)^2 &= (2b(a + b))^2 = 4b^2(a^2 + 2ab + b^2) = 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\
 3) \quad (b^2 + c^2)^2 &= (b^2 + (a + b)^2)^2 = (b^2 + a^2 + 2ab + b^2)^2 = (2b^2 + a^2 + 2ab)^2 = \\
 &= a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4
 \end{aligned}$$

Si sumamos los dos primeros:

$$\begin{aligned}
 (a \cdot d)^2 + (2bc)^2 &= (a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2) + (4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4) = \\
 &= a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 = (b^2 + c^2)^2
 \end{aligned}$$

Obtenemos el tercero, por lo que podemos afirmar que forman una terna pitagórica.

Ordenamos los números en orden ascendente

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{2026} \leq x_{2027}$$

De la condición inicial, el número $x_{2026} + x_{2027}$ también está escrito en la pizarra, así que

$$x_{2026} + x_{2027} \leq x_{2027} \Rightarrow x_{2026} \leq 0$$

El número $x_1 + x_2$ también está escrito en la pizarra, así que

$$x_1 \leq x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 \geq 0$$

Entonces, tenemos la serie de desigualdades:

$$0 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{2025} \leq x_{2026} \leq 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = \dots = x_{2025} = x_{2026} = 0$$

Hay 2025 números iguales a 0: del x_2 al x_{2026}

Un ejemplo de un conjunto de 2027 números escritos en la pizarra, donde hay 2025 ceros, y la suma de dos cualquiera también está escrito en la pizarra, es:

$$-1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1$$

Por lo tanto, la respuesta a la pregunta es **2**

14*

En una reunión 2/3 de los asistentes eran hombres. De las mujeres 2/3 partes no necesitaba gafas, y otras seis si las llevaban.

¿Qué fracción del total de participantes son las mujeres con gafas? ¿Cuántos hombres había?

15



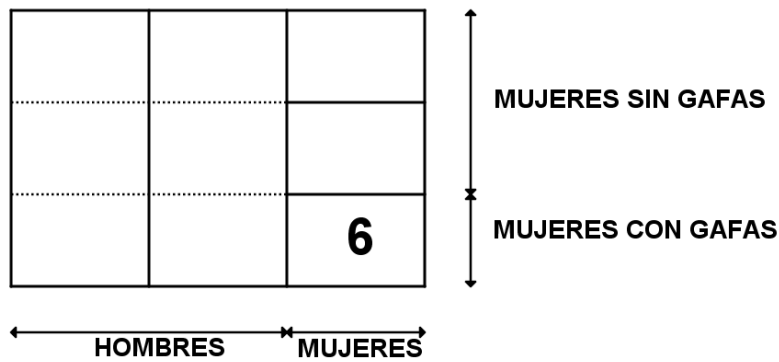
Solución:

En el rectángulo de la imagen las dos primeras columnas representan los 2/3 del total, es decir, los hombres.

La última sería el tercio correspondiente a las mujeres. La partimos en tres trozos iguales, un tercio corresponderá a las mujeres con gafas, que sabemos que son seis.

La fracción del total que son las mujeres con gafas será 1/9, ya que son un rectángulo de los nueve que tenemos.

Cada uno de los nueve rectángulos en que queda dividido el rectángulo original, representará 6 personas, por lo que podemos saber que el número de hombres es $6 \cdot 6 = 36$.



16**

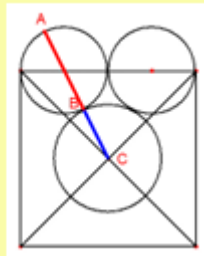
17

La figura está formada por un cuadrado y tres circunferencias tangentes.

Prueba que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

NOTA: Φ es el número de oro.



Solución:

Sea $\overline{JK} = 4$

$\overline{AB} = 2$

Sea $\overline{CB} = r$

$\overline{CM} = 2, \overline{MN} = 1, \overline{CN} = 1 + r$

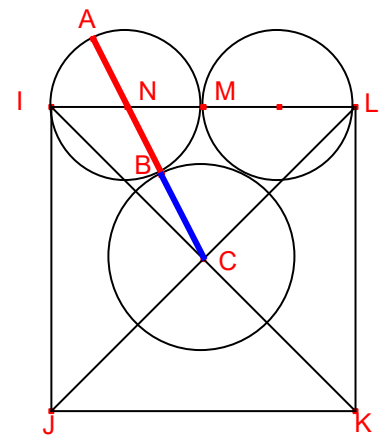
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle CMN$:

$$(1 + r)^2 = 1 + 4 = 5$$

Resolviendo la ecuación:

$$r = -1 + \sqrt{5}$$

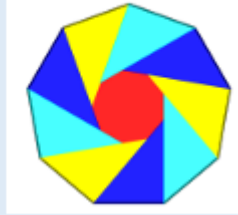
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{r} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$



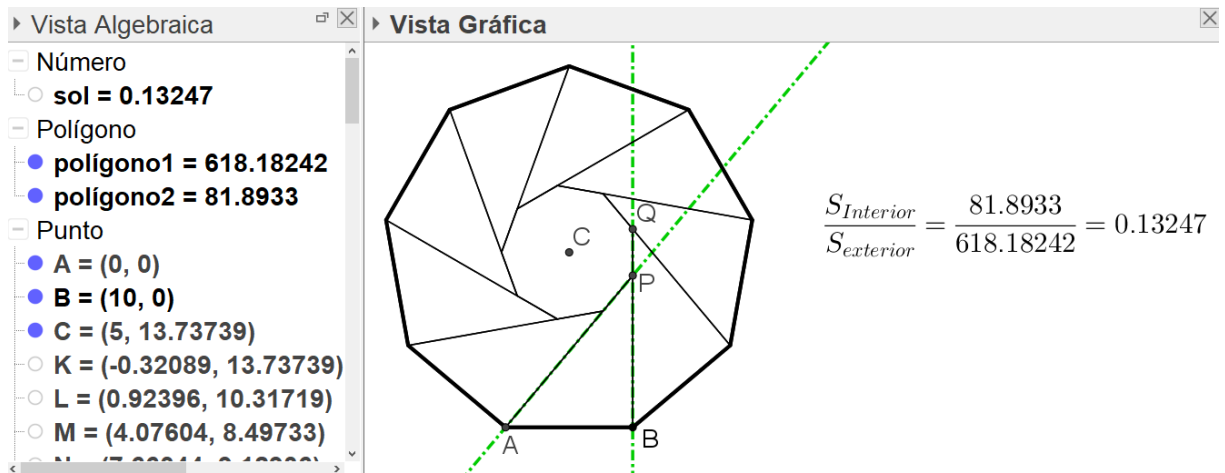
19 ggb

20

La figura está formada por un polígono regular de 9 lados, 9 triángulos rectángulos iguales y un polígono regular de 9 lados interior. Calcula la proporción entre las áreas de los dos polígonos regulares.



Solución con geogebra:



1. Empezaremos por dibujar el polígono exterior con polígono regular desde los puntos A(0,0) y B(10,0).
2. Desde los dos vértices A y B trazamos respectivamente perpendiculares al lado que tienen a su izquierda, y con la intersección de esas dos rectas obtenemos el punto P, que es el vértice que faltaba para uno de los triángulos.
3. Para dibujar el resto de los triángulos, tenemos dos opciones: repetir lo que hemos hecho en el punto2, o lo que es más cómodo, rotar el triángulo que ya tenemos 40° alrededor del centro C del polígono inicial.
4. Hallamos el punto Q con intersección para conseguir dos vértices consecutivos del polígono interior. Lo dibujamos con polígono regular de 9 vértices.
5. Las superficies de ambos nos aparecen en la vista algebraica. Para conseguir el relación pedida, introducimos en la barra de entrada:

$sol = \text{polígono2} / \text{polígono1}$

La relación pedida será

$$\frac{S_{interior}}{S_{exterior}} = sol = 0.13247$$

Solución analítica:

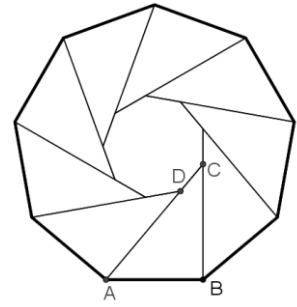
Sea $\overline{AB} = 1$, lado del polígono regular exterior.

Sea $\overline{CD} = c$, lado del polígono regular interior.

Teniendo en cuenta que el ángulo interior de un polígono con 9 vértices mide $\frac{(9-2) \cdot 180}{9} = 140^\circ$,

podemos ver que $\angle CAB = 50^\circ$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC} = \tan 50^\circ, \overline{AC} = \frac{1}{\cos 50^\circ}$$



Como $\overline{AD} = \overline{BC}$:

$$\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{BC} = \frac{1}{\cos 50^\circ} - \tan 50^\circ = \frac{1 - \sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}$$

La proporción de áreas es:

$$\frac{S_{interior}}{S_{exterior}} = \frac{9\overline{CD} \cdot Ap_{int}}{9\overline{AB} \cdot Ap_{ext}}$$

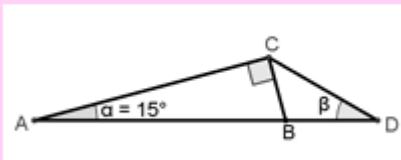
La relación entre ambas apotemas es la misma que la que hay entre los lados de los dos polígonos, ya que los ángulos coinciden, por lo que:

$$\frac{S_{interior}}{S_{exterior}} = \frac{9\overline{CD} \cdot Ap_{int}}{9\overline{AB} \cdot Ap_{ext}} = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{CD}}{1}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}\right)^2 \approx 0.1325$$

21***

En el triángulo adjunto conocemos que $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ y dos ángulos del triángulo ABC, de 15° y 90° .
Calcula la amplitud del ángulo β .

22



Solución:

MÉTODO 1:

En el triángulo ABC, el ángulo en B mide $180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

En el triángulo BCD, el ángulo en B mide $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Si trazamos una circunferencia con diámetro AB, podemos asegurar que el punto C está sobre ella al ser recto el ángulo en C.

Si llamamos M al punto medio del segmento AB, será el centro de la circunferencia, por lo que los segmentos MA y MC, serán dos de sus radios. De aquí deducimos que el triángulo AMC es isósceles.

En el triángulo MCD también tenemos dos lados iguales, MC y CD, por lo que también es isósceles.

En el triángulo AMC, el ángulo en C mide 15° . El ángulo en M mide 150° .

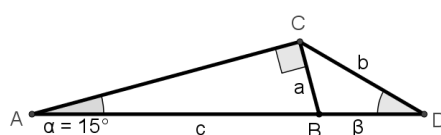
Si ahora consideramos el triángulo MCD, el ángulo en M mide $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, que es lo mismo que mide el ángulo en D por ser triángulo isósceles.

MÉTODO 2 (con trigonometría):

Al ser el triángulo ABC rectángulo, se cumple que

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{a}{c}$$

También sabemos que el ángulo en B mide 75° .



Aplicando el teorema del seno en BCD, tendremos que $\frac{\operatorname{sen} 105^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{a}$.

Reuniendo toda la información de que disponemos:

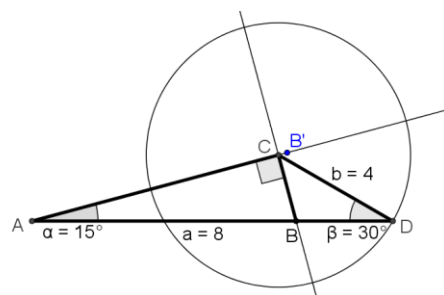
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{a}{c} \\ c = 2b \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 2 \cdot \operatorname{sen} 15^\circ \\ \operatorname{sen} \beta = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{sen} 105^\circ \end{array} \right. \rightarrow \operatorname{sen} \beta = 2 \cdot \operatorname{sen} 15^\circ \cdot \operatorname{sen} 105^\circ$$

Por lo que $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (2 \cdot \operatorname{sen} 15^\circ \cdot \operatorname{sen} 105^\circ) = 30^\circ$

MÉTODO 3 (con geogebra):

Pasos a seguir:

1. Empezaremos por dibujar el segmento $a = \overline{AB} = 8$.
2. Desde el punto A, en sentido antihorario marcamos un ángulo de 15° . Esto nos da el punto B'. Trazamos una recta uniendo A y B'.
3. Trazamos desde B la recta perpendicular a la anterior y hallamos el punto C, intersección de ambas.
4. Con centro en C y radio la mitad del segmento entre A y B (4 en nuestro caso), trazamos una circunferencia.
5. Prolongando el segmento AB y haciendo la intersección con la circunferencia, hallamos el punto D.
6. Trazamos el segmento CD y medimos el ángulo β que buscábamos. Obtenemos $\beta = 30^\circ$.



23*

De la lista de números naturales desde el 1 hasta el millón, ambos incluidos, selecciono los que se escriben usando sólo ceros y/o unos.

¿Cuántos he seleccionado?

24**Solución:**

De una cifra: sólo hay uno, el 1

De dos cifras: habrá dos, ya que debe empezar por 1 y para la otra cifra tenemos dos opciones, 0 y 1, con lo que tendríamos el 10 y el 11.

De tres cifras: igual que antes, la primera cifra debe ser un 1. Para las otras dos, hay dos opciones en cada caso, es decir, tendremos $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ números, que serían 100, 101, 110 y 111.

De cuatro cifras, con el mismo razonamiento, tendríamos $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

De cinco cifras tendríamos $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

De seis cifras $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

De siete cifras sólo uno, ya que paramos en el millón, que es el más pequeño que podemos elegir con siete cifras.

En total tendremos: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 1 = 64$ números

26*

El 22 de febrero de 2022 tenemos una fecha capicúa, 22/02/2022, se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuál fue la anterior fecha capicúa? ¿Cuál será la siguiente fecha capicúa?

27**Solución:**

Hay que tener en cuenta que el número correspondiente a día sólo puede ser uno que empiece por 0, 1 o 2. Los años, sólo podrán acabar con una de esas tres cifras.

El mes, mientras estemos en un año que empieza por 2, deberá ser siempre febrero, 02.

Por tanto:

La anterior fue 12/02/2021.

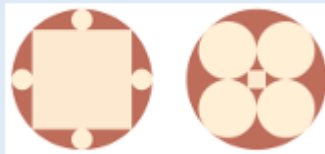
La siguiente 03/02/2030.

Después de esta, vendría el 13/02/2031.

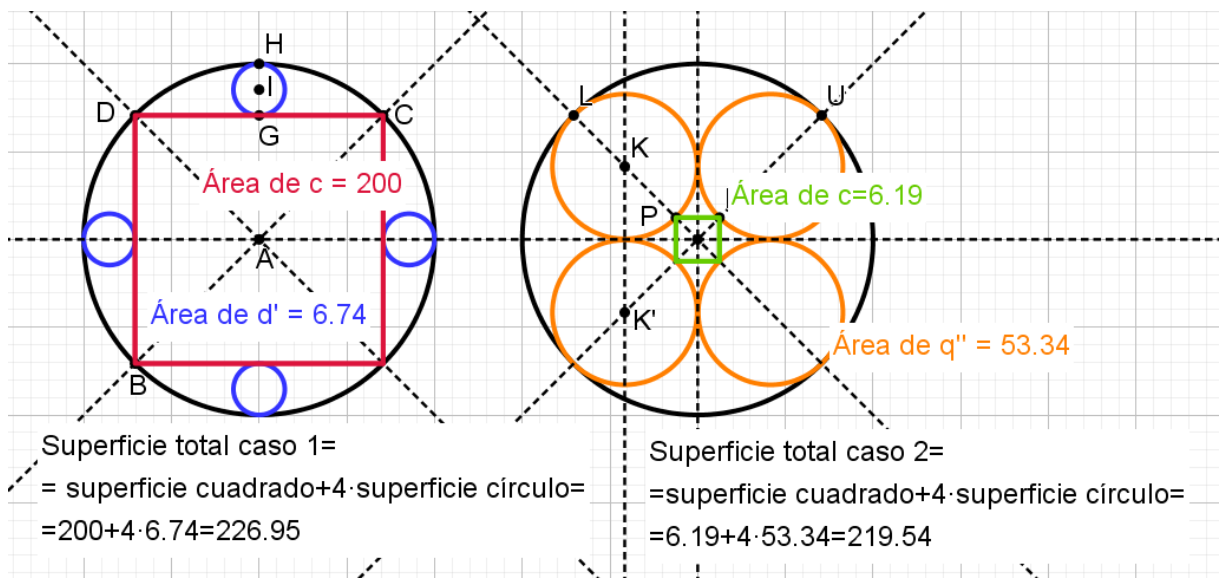
28 ggb

Un fabricante de turrón quiere empaquetar en cajas redondas de 10 cm de radio, una pieza de turrón cuadrada y cuatro redondas, tal y como se ve en el dibujo.
¿Cuál de las dos opciones contendrá más turrón?

29



Solución con geogebra:



Dado que en los dos casos estamos usando cajas similares, la altura de todas las piezas de turrón será la misma, por lo que basta que comprobemos en que caso la superficie ocupada es mayor para saber en cuál habrá más turrón.

Construcción del caso 1: cuadrado grande y círculos pequeños.

1. Dibujamos una circunferencia centrada en A(0,0) con radio 10.
2. Dibujamos las bisectrices de los cuadrantes: $y = x$, $y = -x$.
3. Los puntos de intersección de la circunferencia con estas rectas, nos da los cuatro vértices del cuadrado. Con polígono regular de 4 vértices y dos vértices consecutivos dibujamos el cuadrado. En la vista algebraica obtenemos su área: 200.

4. Para las circunferencias, hallamos los puntos de intersección de eje de ordenadas con la circunferencia H y con el cuadrado G. El punto medio del segmento que los une será el centro de una de las circunferencias. La trazamos.
5. Las otras podemos trazarlas por rotación alrededor de A y con 90° de amplitud.



6. Con  hallamos el área de uno de los círculos, obtenemos 6.74.
7. Calculamos el área total sumando la del cuadrado y la de 4 círculos. Obtenemos 226.95.

Construcción del caso 2: cuadrado pequeño y círculos grandes.

1. Dibujamos una circunferencia centrada en A(0,0) con radio 10.
2. Dibujamos las bisectrices de los cuadrantes: $y = x$, $y = -x$.
3. Los puntos de intersección de la circunferencia con estas rectas, nos da los cuatro puntos de tangencia de las circunferencias interiores con la exterior.
4. El centro de las circunferencias se encuentra en las bisectrices.
5. Con punto en objeto, introducimos un punto K que será el centro de una circunferencia que pase por el punto L.
6. Desplazamos el punto K hasta que la circunferencia sea tangente a los dos ejes.
7. Las otras circunferencias la dibujamos igual que antes rotando alrededor del centro de la circunferencia 90° .
8. Igual que antes, hallamos el área de uno de los círculos. Obtenemos 53.34.
9. Para dibujar el cuadrado, hallamos los puntos de intersección de las bisectrices con las circunferencias. Con dos consecutivos dibujamos el cuadrado. La superficie de este la vemos en la vista algebraica.
10. La superficie total, la obtenemos igual que antes y resulta ser 219.54.

Por lo tanto, en el primer caso habrá más turrón.

30****31**

La figura está formada por un hexágono regular y dos cuadrados iguales. Calcula el área total sombreada de color verde.

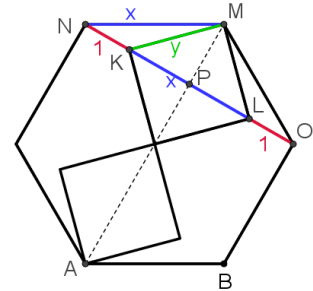
**Solución:**

Llamaremos x al lado del hexágono y y al lado del cuadrado.

La diagonal del cuadrado coincide con el lado del hexágono, con lo que se cumple que $y^2 + y^2 = x^2$

Por lo tanto, el área de los dos cuadrados coincide con x^2 .

Hallaremos el valor de x usando el triángulo rectángulo MNP:



$$\overline{MP}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{MN}^2 \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \rightarrow \frac{x^2}{4} + 1 + x + \frac{x^2}{4} = x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{2} - 1 - x = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Y como x es una longitud, el único resultado con sentido es $x = 1 + \sqrt{3}$

Con lo que ya podemos calcular las superficies:

$$S_{\text{cuadrados}} = x^2 = (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

Para el hexágono, tendremos en cuenta que la apotema coincide con $\frac{x}{2} + 1$:

$$S_{\text{hexágono}} = \frac{6x \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right)}{2} = \frac{3x^2 + 6x}{2} = \frac{3(1 + \sqrt{3})^2 + 6(1 + \sqrt{3})}{2} = 9 + 6\sqrt{3} \cong 19.3923 u^2$$

La superficie de la zona coloreada de verde será:

$$S_{\text{verde}} = S_{\text{hexágono}} - S_{\text{cuadrados}} = 9 + 6\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3}) = 5 + 4\sqrt{3} u^2$$