

SOLUCIONES – FEBRERO 2026

2**

3

Encuentra la cifra de las unidades de los números siguientes:

- a) 3^{2059}
- b) 2057^{2057}
- c) 2059^{2059}



Solución:

Hay que tener en cuenta que la última cifra de un producto de dos números es la misma que la última cifra del producto de las últimas cifras de estos dos números.

a) Utilizando esta regla escribimos la secuencia de las últimas cifras de las potencias de 3: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... Se repiten en un ciclo de 4, así la última cifra de 3^{2059} depende del resto de la división de 2059 entre 4:

$$2059 = 514 \times 4 + 3$$

Por tanto, acaba con la misma cifra que 3^3 , que es el 7.

b) 2057^{2057}

Explorando las últimas cifras de las potencias de 7: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ...

Se repiten en un ciclo de 4, así que la última cifra de 2057^{2057} depende del resto de la división de 2057 entre 4:

$$2057 = 514 \times 4 + 1$$

Por lo tanto, acaba con la misma cifra que 7^1 , que es 7.

c) 2059^{2059}

Las potencias de 9 acaban sucesivamente en 9, 1, 9, 1, ... Así:

$$\begin{cases} 2059^{\text{impar}} & \text{acaba en 9} \\ 2059^{\text{par}} & \text{acaba en 1} \end{cases} \rightarrow 2059^{2059} \text{ acaba en 9.}$$

4*****5**

Si $n + \frac{1}{n} = 6$, ¿cuánto vale $n^3 + \frac{1}{n^3}$?

**Solución:**

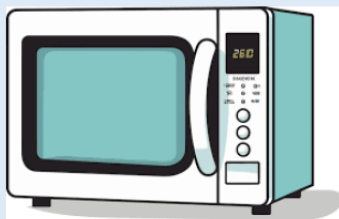
Desarrollando $\left(n + \frac{1}{n}\right)^3 = n^3 + 3n^2 \frac{1}{n} + 3n \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = n^3 + 3n + 3\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$

Obtenemos que $n^3 + \frac{1}{n^3} = \left(n + \frac{1}{n}\right)^3 - 3\left(n + \frac{1}{n}\right)$ y, por lo tanto:

$$n^3 + \frac{1}{n^3} = 6^3 - 3 \cdot 6 = \mathbf{208}$$

6 ggb**7**

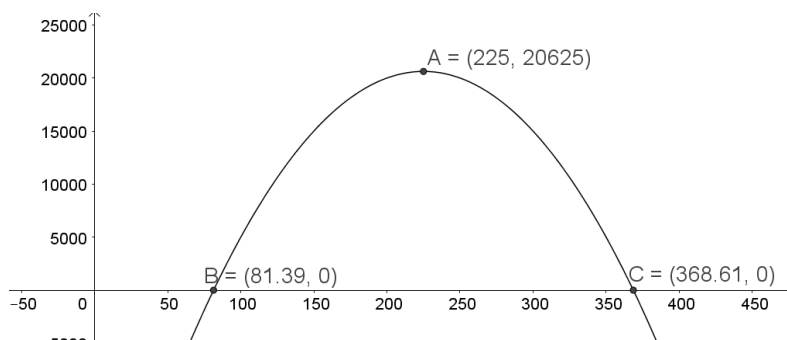
El coste de fabricación de una serie de microondas viene dado por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$, donde x representa el número de microondas fabricados. Cada horno se venderá por 490 €. ¿Cuántos se deben fabricar y vender para que los beneficios sean máximos? ¿A cuánto ascenderán?

**Solución con geogebra:**

Los beneficios obtenidos por fabricar x microondas serán la diferencia entre los ingresos obtenidos al venderlos y el coste de fabricación:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 490x - (x^2 + 40x + 30\,000)$$

Introducimos esta función en la barra de entrada y con extremos relativos obtenemos el máximo de la función:



Los máximos beneficios se obtienen cuando $x = 225$, que será la cantidad de microondas que se deban fabricar.

Los beneficios serán de 20 625 €.

Solución analítica:

Los beneficios obtenidos por fabricar x microondas serán la diferencia entre los ingresos obtenidos al venderlos y el coste de fabricación:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 490x - (x^2 + 40x + 30\,000)$$

Derivamos para obtener el máximo:

$$B'(x) = 490 - 2x - 40 = 450 - 2x$$

Igualamos a cero:

$$450 - 2x = 0 \rightarrow x = 225$$

Para comprobar si es máximo o mínimo calculamos la segunda derivada:

$$B''(x) = -2 < 0 \rightarrow \text{MÁXIMO}$$

Para hallar los beneficios obtenidos sustituimos $x = 225$ en la función:

$$B(225) = 490 \cdot 225 - (225^2 + 40 \cdot 225 + 30\,000) = 20\,625 \text{ €.}$$

9*

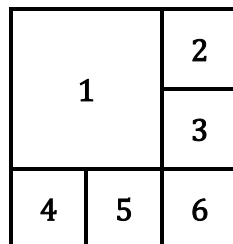
10

Corta un cuadrado de papel en seis cuadrados, sin que sobre ni falte papel.

(Los seis cuadrados no tienen por qué ser del mismo tamaño).



Solución:



11****12**

Cada uno de los tres números centrales de la siguiente lista es la media geométrica del que tiene a la izquierda y el que tiene a la derecha.

6			48	
---	--	--	----	--

Halla los que faltan.

Solución:

Llamaremos x, y, z a los tres números que debemos hallar:

6	x	y	48	z
---	-----	-----	----	-----

La media geométrica de dos números se obtiene haciendo la raíz cuadrada del producto de ambos, por lo que debe cumplirse que:

$$\begin{cases} x = \sqrt{6y} \\ y = \sqrt{48x} \\ 48 = \sqrt{yz} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 6y \rightarrow y = \frac{x^2}{6} \\ y^2 = 48x \\ 48^2 = yz \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos x e y :

$$\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 = 48x \rightarrow x^4 = 36 \cdot 48x \rightarrow x^3 = 1728 = 2^6 \cdot 3^3 \rightarrow x = 12$$

(Descartamos la solución $x = 0$ porque haría que $x = y = 0$, lo que no haría posible obtener el 48).

$$y = \frac{x^2}{6} \rightarrow y = \frac{12^2}{6} = 24$$

$$48^2 = yz \rightarrow 48^2 = 24z \rightarrow z = 96$$

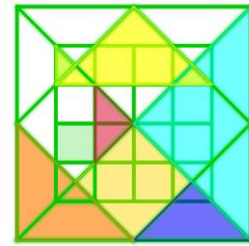
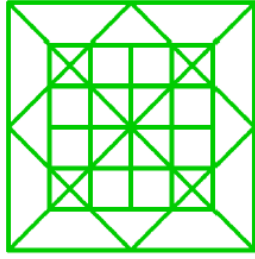
Con lo que tendríamos:

6	12	24	48	96
---	----	----	----	----

13***14**

¿Cuántos cuadrados hay en la figura adjunta?

¿Y cuántos triángulos?



Solución:

a) CUADRADOS

1. Del tamaño más pequeño (verde claro en el dibujo) hay $4 \cdot 4 = 16$.
2. El tamaño siguiente sería el resultado de unir 4 de estos cuadraditos. Tendríamos $3 \cdot 3 = 9$.
3. Si unimos 9 cuadraditos, tendríamos $2 \cdot 2 = 4$.
4. Uniendo los 16 pequeños, tendríamos 1.
5. El marco exterior sería otro cuadrado.
6. Inclinaos tenemos 5 (uno grande partido en 4 trozos como el naranja claro).

En total tenemos $16 + 9 + 4 + 1 + 1 + 5 = 36$ cuadrados.

b) TRIÁNGULOS

1. Del tamaño menor (verde limón en el dibujo) tenemos $4 \cdot 4 = 16$.
2. Del tamaño resultante de unir dos de estos triangulitos tenemos $4 \cdot 4 = 16$ en las esquinas, y 8 más en el centro del dibujo, 24 en total.
3. Del tamaño del granate del dibujo tenemos 4 en el centro y otros 4 en los vértices del cuadrado grande inclinado, total 8.
4. Del tamaño del azulón hay dos en cada esquina, 8 en total.
5. Del tamaño del amarillo hay 4.
6. Como el naranja tenemos 4.
7. Como el azul turquesa, otros 4.

En total tenemos $16 + 24 + 8 + 4 + 4 + 4 = 60$ triángulos.

16****17**

Una cabra atada a un poste con una cuerda de 3 m tarda 3 días en comerse toda la hierba que tiene a su alcance.

¿Cuántos días tardará si duplicamos la longitud de la cuerda?

**Solución:**

La superficie que tiene a su alcance con una cuerda de 3 m es

$$S_3 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ m}^2.$$

Si tarda 3 días en comérsela toda, cada día comerá $\frac{9\pi}{3} = 3\pi \text{ m}^2$

Si la cuerda es de 6 m: $S_6 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ m}^2$.

Para saber cuántos días tardará con la cuerda de 6 m:

$$\frac{36\pi}{3\pi} = 12 \text{ días}$$

18***19**

Halla todos los números de cuatro cifras $abcd$ que cumplan que los cinco números a , b , c , d y $abcd$ sean todos cuadrados perfectos.

**Solución:**

Los únicos números de una cifra que nos servirían son los que son cuadrados perfectos, es decir, 0, 1, 4 y 9, por lo que los números de cuatro cifras que buscamos sólo pueden estar formados por estas cuatro, con el añadido de que a no puede ser 0, ya que el número sería de tres cifras y no de cuatro.

Solo hay tres números: 1444 (= 38^2), 4900 (= 70^2) y 9409 (= 97^2).

Justificación:

El número $abcd$ debe ser un cuadrado perfecto, por lo que hay un número de dos cifras xy que al elevarlo al cuadrado da como resultado $abcd$.

El cuadrado de y debe acabar en d , que solo puede tomar los valores 0, 1, 4 o 9.

Por tanto, xy no puede acabar en 5, porque su cuadrado también lo haría, ni en 4 o 6, porque su cuadrado acabaría en 6.

El número xy debe ser mayor que 31, porque $\sqrt{1000} = 31,62 \dots$

El número a solo puede tomar los valores 1, 4 y 9. Estudiamos que pasa para cada uno de ellos:

1. $a = 1$

Como $\sqrt{1999} = 44,71 \dots$, el número xy debe estar entre 32 y 44, y además no puede acabar en 4, 5 o 6. Veamos los casos posibles:

xy	$(xy)^2$	¿Válido?
32	1024	N
33	1089	N
37	1369	N
38	1444	S
39	1521	N
40	1600	N
41	1681	N
42	1764	N
43	1849	N

2. $a = 4$

Calculamos $\sqrt{4000} = 63,24 \dots$ $\sqrt{4999} = 70,70 \dots$, por lo que xy debe estar entre 64 y 70 (además de la condición de no acabar en 4, 5 o 6):

xy	$(xy)^2$	¿Válido?
67	4489	N
68	4624	N
69	4761	N
70	4900	S

3. $a = 9$

Calculamos $\sqrt{9000} = 94,86 \dots$ $\sqrt{9999} = 99,99 \dots$, por lo que xy debe estar entre 95 y 99 (además de la condición de no acabar en 4, 5 o 6):

xy	$(xy)^2$	¿Válido?
97	9409	S
98	9604	N
99	9801	N

Solución analítica:

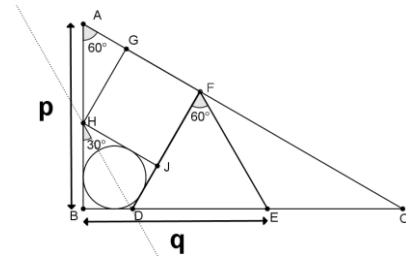
Llamaremos:

c = longitud del lado del triángulo equilátero

d = longitud del lado del cuadrado.

Queremos comprobar que $p=q$, o lo que es lo mismo, que $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Calculamos las dos longitudes:



$$1. \quad p = \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB}$$

En el triángulo rectángulo AHG se cumple que

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\overline{HG}}{\overline{AH}} = \frac{d}{\overline{AH}} \quad \rightarrow \quad \overline{AH} = \frac{d}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{d \cdot 2\sqrt{3}}{3}$$

También se cumple que $\overline{HB} = \overline{HJ} = d$

$$\text{Por lo tanto, } p = \frac{d \cdot 2\sqrt{3}}{3} + d = d \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 \right)$$

$$2. \quad q = \overline{BD} + \overline{DE} = \overline{BD} + c$$

En el triángulo rectángulo BDH se cumple que

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{HB}} \quad \rightarrow \quad \overline{BD} = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \overline{HB} = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot d = \frac{d\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad q = \frac{d\sqrt{3}}{3} + c$$

3. Para poder comparar p y q , necesitamos relacionar c y d :

$$\text{Usaremos que } \overline{DF} = \overline{DJ} + \overline{JF} \quad \rightarrow \quad c = \overline{BD} + d = \frac{d\sqrt{3}}{3} + d = d \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \right)$$

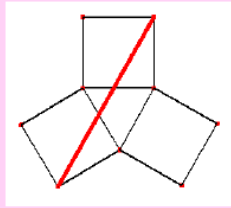
Con lo que obtenemos que

$$q = \frac{d\sqrt{3}}{3} + c = \frac{d\sqrt{3}}{3} + d \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \right) = d \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 \right) = p$$

Por lo tanto, se cumple que $p = q$.

23*****24**

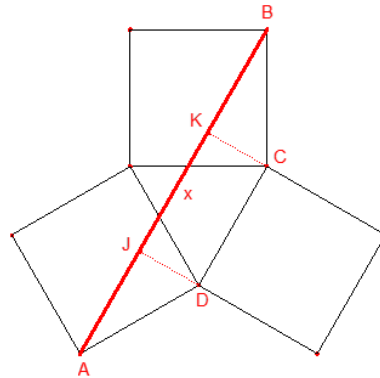
La figura está formada por un triángulo equilátero de lado c y tres cuadrados sobre el exterior de los lados.



Calcula la longitud del segmento rojo.

Solución:

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= c \\ \widehat{DAB} &= \widehat{ABC} = 30^\circ \\ \cos 30^\circ &= \frac{\overline{AJ}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{AJ} &= \overline{BK} = \frac{c\sqrt{3}}{2} \\ \overline{JK} &= c \\ \overline{AB} &= \overline{AJ} + c + \overline{BK} = \\ &= \frac{c\sqrt{3}}{2} + c + \frac{c\sqrt{3}}{2} = (1 + \sqrt{3})c \end{aligned}$$

**25******26**

Hace dos años Cloe tenía el triple de la edad de su hermana Isa, y dos años antes el quintuple.

¿En cuantos años la proporción será de 2 a 1?

**Solución:**

	Hace 4 años	Hace 2 años	Ahora	Dentro de n años
Cloe	$x - 4$	$x - 2$	x	$x + n$
Isa	$y - 4$	$y - 2$	y	$y + n$
relación	$x - 4 = 5(y - 4)$	$x - 2 = 3(y - 2)$		$x + n = 2(y + n)$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 4 = 5(y - 4) \\ x - 2 = 3(y - 2) \end{cases} \rightarrow 5(y - 4) + 4 - 2 = 3(y - 2) \rightarrow 5y - 18 = 3y - 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 5(y - 4) + 4 = 5(6 - 4) + 4 = 14$$

Sus edades actuales serán 6 y 14 años.

Para saber cuántos años deben pasar para que la edad de Cloe sea el doble que la de Isa sustituimos las edades actuales:

$$x + n = 2(y + n) \rightarrow 14 + n = 2(6 + n) \rightarrow 14 - 12 = 2n - n \rightarrow$$

$$\rightarrow n = 2 \text{ son los años que deben pasar.}$$

27*

28

Encuentra todas las multiplicaciones que cumplen este modelo, siendo a, b, c y d cifras diferentes.

$$\begin{array}{r} ab \\ \times \quad c \\ \hline ddd \end{array}$$

Solución:

Si comenzamos pensando que $d = 1$ tendremos que $111 = 3 \cdot 37$, que no nos sirve. A partir de esta expresión podemos encontrar todas las soluciones posibles, que son tres:

ddd	ab·c	Válido (S/N)	Motivo para rechazarlo
111	37·3	N	$a = c$
$222 = 2 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 37 = (2 \cdot 37) \cdot 3$	74·3	S	
$222 = 2 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 37 = 37 \cdot (2 \cdot 3)$	37·6	S	
$333 = 3 \cdot 111 = 3 \cdot 3 \cdot 37 = 37 \cdot (3 \cdot 3)$	37·9	N	$a = d$
$444 = 4 \cdot 111 = 4 \cdot 3 \cdot 37$		N	No es posible obtener $ab \cdot c$, sobran cifras
$555 = 5 \cdot 111 = 5 \cdot 3 \cdot 37$		N	
$666 = 6 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = (2 \cdot 37) \cdot (3 \cdot 3)$	74·9	S	
$666 = 6 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = (3 \cdot 37) \cdot (2 \cdot 3)$	111·6	N	ab tiene 3 cifras
$777 = 7 \cdot 111 = 7 \cdot 3 \cdot 37$		N	No es posible obtener $ab \cdot c$, sobran cifras
$888 = 8 \cdot 111 = 8 \cdot 3 \cdot 37 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37 = (4 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 37)$	12·74	N	
$999 = 9 \cdot 111 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$		N	