SOLUCIONS – FEBRER 2026

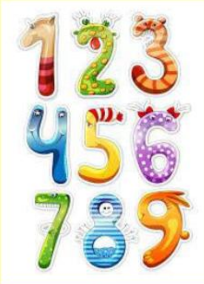
2** **3**

Calcula la xifra de les unitats dels nombres següents:

a) 3^{2059}

b) 2057^{2057}

c) 2059^{2059}



Solució:

Cal tenir en compte que l'última xifra d'un producte de dos números és la mateixa que l'última xifra del producte de les últimes xifres d'aquests dos números.

a) Utilitzant aquesta regla escrivim la seqüència de les últimes xifres de les potències de 3: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... Es repeteixen en un cicle de 4, així la darrera xifra de 3^{2059} depén del residu de la divisió de 2059 entre 4:

$2059 = 514 \times 4 + 3$

Per tant, acaba amb la mateixa xifra que 3^3, que és el **7.**

b) 2057^{2057}

Explorant les últimes xifres de les potències de 7: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ...

Es repeteixen en un cicle de 4, així que l'última xifra de 2057^{2057} depén del residu de la divisió de 2057 entre 4:

$2057=514\times4+1$

Per tant, acaba amb la mateixa xifra que 7^1, que és **7**.

c) 2059^{2059}

Les potències de 9 acaben successivament en 9, 1, 9, 1, ... Així:

$$\begin{cases} 2059^{imparell} & \text{acaba en } 9 \\ 2059^{parell} & \text{acaba en } 1 \end{cases} \rightarrow \quad 2059^{2059} \text{ acaba en } \mathbf{9}.$$

4*** **5**

Si $n+\frac{1}{n}=6$, quin és el valor de $n^3+\frac{1}{n^3}$?

Solució:

Desenvolupant $\left(n+\frac{1}{n}\right)^3 = n^3+3n^2\frac{1}{n}+3n\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3} = n^3+3n+3\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}$

Obtenim que $n^3+\frac{1}{n^3} = \left(n+\frac{1}{n}\right)^3 - 3\left(n+\frac{1}{n}\right)$ i, per tant:

$$n^3+\frac{1}{n^3} = 6^3 - 3\cdot 6 = \mathbf{208}$$

6 ggb **7**

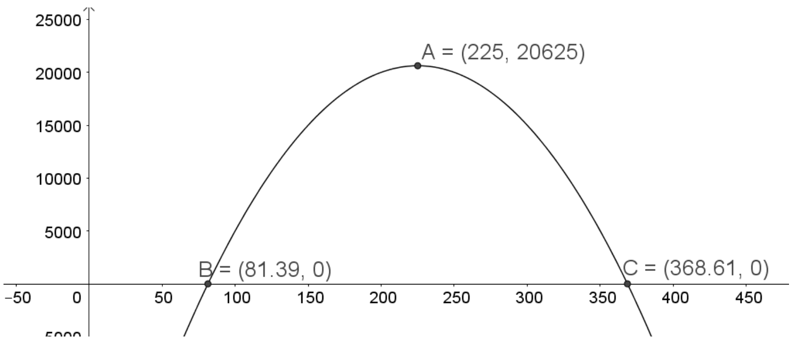
El cost de fabricació d'una sèrie de microones ve donat per la funció $C(x)=x^2+40x+30000$, on x representa la quantitat de microones fabricats. Cada forn es vendrà per 490 €. Quants cal fabricar-ne i vendre perquè els beneficis siguin màxims? A quant pujaran?

Solució amb geogebra:

Els beneficis obtinguts per fabricar x microones seran la diferència entre els ingressos obtinguts en vendre'ls i el cost de fabricació:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 490x - (x^2+40x+30\,000)$$

Introduïm aquesta funció a la barra d'entrada i amb extrems relatius obtenim el màxim de la funció:



Els màxims beneficis s'obtenen quan $x=225$, que serà la quantitat de microones que s'han de fabricar.

Els beneficis seran de 20 625 €.

Solució analítica:

Els beneficis obtinguts per fabricar x microones seran la diferència entre els ingressos obtinguts en vendre'ls i el cost de fabricació:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 490x - (x^2 + 40x + 30\,000)$$

Derivem per obtenir el màxim:

$$B'(x) = 490 - 2x - 40 = 450 - 2x$$

Igualem a zero:

$$450 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 225$$

Per comprovar si és màxim o mínim calculem la segona derivada:

$$B''(x) = -2 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{MÀXIM}$$

Per trobar els beneficis obtinguts substituïm $x = 225$ en la funció:

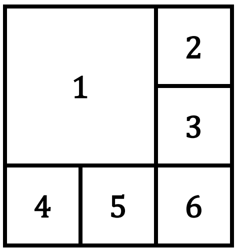
$$B(225) = 490 \cdot 225 - (225^2 + 40 \cdot 225 + 30\,000) = 20\,625\ €.$$

9* 10

Talla un quadrat de paper en sis quadrats, sense que sobre ni falte paper.

(Els sis quadrats no han de ser necessàriament de la mateixa mida).

Solució:



11**

Cadascun dels tres números centrals de la llista següent és la mitjana geomètrica del que té a l'esquerra i el que té a la dreta.

Calcula els que falten.

12

6			48	

Solució:

Anomenarem x, y, z als tres números que hem de trobar:

6	x	y	48	z

La mitjana geomètrica de dos números s'obté fent l'arrel quadrada del producte dels dos, per la qual cosa s'ha de complir que:

$$\begin{cases} x = \sqrt{6y} \\ y = \sqrt{48x} \\ 48 = \sqrt{yz} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 6y \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{x^2}{6} \\ y^2 = 48x \\ 48^2 = yz \end{cases}$$

De les dues primeres equacions obtenim x i y:

$$\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 = 48x \quad \rightarrow \quad x^4 = 36 \cdot 48x \quad \rightarrow \quad x^3 = 1728 = 2^6 \cdot 3^3 \quad \rightarrow \quad x = 12$$

(Descartem la solució $x = 0$ perquè faria que $x = y = 0$, cosa que no faria possible obtenir el 48).

$$y = \frac{x^2}{6} \quad \rightarrow \quad y = \frac{12^2}{6} = 24$$

$$48^2 = yz \quad \rightarrow \quad 48^2 = 24z \quad \rightarrow \quad z = 96$$

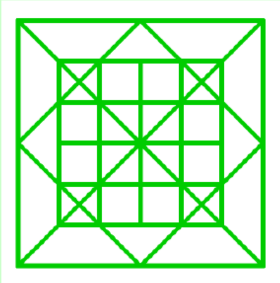
Amb la qual cosa tindríem:

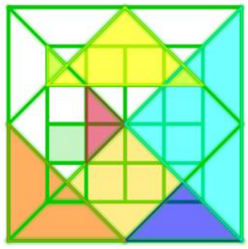
6	12	24	48	96

13* **14**

Quants quadrats hi ha a la figura adjunta?

I quants triangles?





Solució:

a) QUADRATS

1. De la grandària més menuda (verd clar al dibuix) n'hi ha 4·4=16.
2. La grandària següent seria el resultat d'unir 4 d'aquests quadrats menuts. En tindríem 3·3=9.
3. Si unim 9 quadrats menuts, en tindríem 2·2=4.
4. Unint els 16 menuts, en tindríem 1.
5. El marc exterior seria un altre quadrat.
6. Inclinats en tenim 5 (un gran partit en 4 trossos com el taronja clar).

En total tenim 16+9+4+1+1+5=36 quadrats.

b) TRIANGLES

1. De la grandària menor (verd llima al dibuix) en tenim 4·4=16.
2. De la grandària resultant d'unir dos d'aquests triangles menuts en tenim 4·4=16 a les cantonades i 8 més al centre del dibuix, 24 en total.
3. De la grandària del granat del dibuix en tenim 4 al centre i altres 4 als vèrtexs del quadrat gran inclinat, total 8.
4. De la grandària del blau n'hi ha dos a cada cantonada, 8 en total.
5. De la grandària del groc n'hi ha 4.
6. Com el taronja en tenim 4.
7. Com el blau turquesa, uns altres 4.

En total tenim 16+24+8+4+4+4=60 triangles.

16** 17

Una cabra lligada a un pal amb una corda de 3 m tarda 3 dies a menjar-se tota l'herba que té al seu abast.

Quants dies tardarà si dupliquem la longitud de la corda?

Solució:

La superfície que té a l'abast amb una corda de 3 m és

$$S_3 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \ \ m^2.$$

Si tarda 3 dies a menjar-se-la tota, cada dia menjarà $\frac{9\pi}{3} = 3\pi \ m^2$

Si la corda és de 6 m: $S_6 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \ \ m^2$.

Per saber quants dies tardarà amb la corda de 6 m:

$$\frac{36\pi}{3\pi} = 12 \text{ dies}$$

18* 19

Troba tots els nombres de quatre xifres $abcd$ que complisquen que els cinc nombres a, b, c, d i $abcd$ siguen tots quadrats perfectes.

Solució:

Els únics números d'una xifra que ens servirien són els que són quadrats perfectes, és a dir, 0, 1, 4 i 9, per la qual cosa els números de quatre xifres que busquem només poden estar formats per aquestes quatre, amb l'afegit que no pot ser 0, ja que el nombre seria de tres xifres i no de quatre.

Només hi ha tres números: 1444 $(= 38^2)$, 4900 $(= 70^2)$ i 9409 $(= 97^2)$.

Justificació:

El número $abcd$ ha de ser un quadrat perfecte, per la qual cosa hi ha un nombre de dues xifres xy que en elevar—lo al quadrat dóna com a resultat$abcd$.

El quadrat de y ha d'acabar en d, que sols pot prendre els valors 0, 1, 4 o 9.

Per tant, xy no pot acabar en 5, perquè el quadrat també ho faria, ni en 4 o 6, perquè el quadrat acabaria en 6.

El número xy ha de ser major que 31, perquè $\sqrt{1000} = 31{,}62 \ldots$

El número a sols pot prendre els valors 1, 4 i 9. Estudiem què passa per a cada un d'ells:

1. $a = 1$
   Com $\sqrt{1999} = 44{,}71 \ldots$, el número xy ha d'estar entre 32 i 44, i a més no pot acabar en 4, 5 o 6. Vegem els casos possibles:

xy	$(xy)^2$	Vàlid?
32	1024	N
33	1089	N
37	1369	N
38	1444	S
39	1521	N
40	1600	N
41	1681	N
42	1764	N
43	1849	N

2. $a = 4$

Calculem $\sqrt{4000} = 63{,}24 \ldots$ $\sqrt{4999} = 70{,}70 \ldots$, per la qual cosa xy ha d'estar entre 64 i 70 (a més de la condició de no acabar en 4, 5 o 6):

xy	$(xy)^2$	Vàlid?
67	4489	N
68	4624	N
69	4761	N
70	4900	S

3. $a = 9$

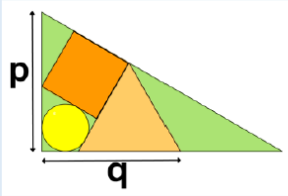
Calculem $\sqrt{9000} = 94{,}86 \ldots$ $\sqrt{9999} = 99{,}99 \ldots$, por la qual cosa xy ha d'estar entre 95 i 99 (a més de la condició de no acabar en 4, 5 o 6):

xy	$(xy)^2$	Vàlid?
97	9409	S
98	9604	N
99	9801	N

20ggb 21

La figura està formada per un triangle rectangle que conté un quadrat, un triangle equilàter i una circumferència tangent als catets, a un costat del quadrat i a un costat del triangle equilàter. Prova que p=q.

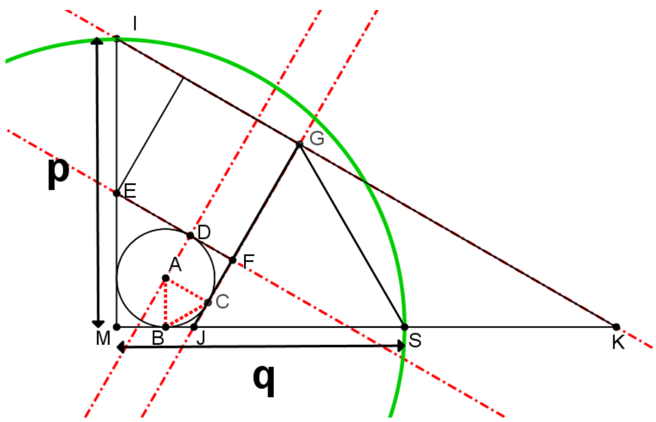
Pista: comença el dibuix per la circumferència.



Solució amb geogebra:

Passos a seguir:

1. Començarem dibuixant una circumferència centrada al punt $A(1,1)$ que passe per $B(1,0)$. D'aquesta manera, els dos catets del triangle rectangle estaran sobre els eixos.
2. El fet que la circumferència siga tangent als eixos, el quadrat i el triangle equilàter, ens diu que els radis als punts de contacte són perpendiculars a les rectes tangents en aquests punts.
3. L'angle $\widehat{BAC}$ ha de mesurar 60°, per la qual cosa un triangle equilàter amb base $\overline{AB}$ ens serveix per mesurar-lo.
4. Trobem la recta tangent a la circumferència a C. Contindrà un costat del triangle equilàter.

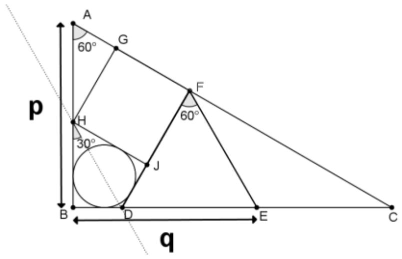


5. La recta per A i D és paral·lela a la que acabem de traçar. Amb això podem trobar D.
6. La base del quadrat la podem col·locar sobre la recta tangent a la circumferència per D.
7. Els extrems de la base E i F els trobem respectivament amb la intersecció de la tangent i l'eix d'ordenades E, i amb la intersecció de la tangent i el costat que tenim de l'equilàter F.
8. Tracem el quadrat amb polígon regular de base EF.
9. Trobem el punt G com a intersecció del quadrat i la recta per CF.
10. Amb la recta paral·lela per G a la base del quadrat podem dibuixar la hipotenusa del triangle rectangle.
11. Tracem el triangle equilàter amb polígon regular de base GJ.
12. Per comprovar que $p = q$, tracem una circumferència amb centre al punt $M(0,0)$ que passe pel punt I o pel S. Es pot vore que MI i MS en són radis. Per tant, mesuren el mateix.

Solución analítica:

Anomenarem:

$c =$ longitud del costat del triangle equilàter
$d =$longitud del costat del quadrat.



Volem comprovar que $p = q$ o, el que és el mateix, que $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Calculem les dues longituds:

1. $p = \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB}$

   En el triangle rectangle AHG es compleix que

   $sin\ 60° = \frac{\overline{HG}}{\overline{AH}} = \frac{d}{\overline{AH}} \quad \rightarrow \quad \overline{AH} = \frac{d}{sin\ 60°} = \frac{d \cdot 2\sqrt{3}}{3}$

   També es compleix que $\overline{HB} = \overline{HJ} = d$

   Per tant, $p = \frac{d \cdot 2\sqrt{3}}{3} + d = d\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)$

2. $q = \overline{BD} + \overline{DE} = \overline{BD} + c$

   En el triangle rectangle BDH es compleix que

   $\text{tg}\ 30° = \frac{\overline{BD}}{\overline{HB}} \quad \rightarrow \quad \overline{BD} = tg\ 30° \cdot \overline{HB} = tg\ 30° \cdot d = \frac{d\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad q = \frac{d\sqrt{3}}{3} + c$

3. Per poder comparar p i q, necessitem relacionar c i d:

   Usarem que $\overline{DF} = \overline{DJ} + \overline{JF} \quad \rightarrow \quad c = \overline{BD} + d = \frac{d\sqrt{3}}{3} + d = d\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)$

   Amb la qual cosa obtenim que

$$q = \frac{d\sqrt{3}}{3} + c = \frac{d\sqrt{3}}{3} + d\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) = d\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) = q$$

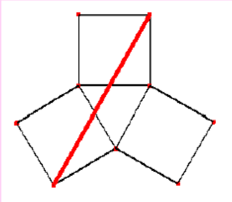
   Per tant, es compleix que $p = q$.

23***

La figura està formada per un triangle equilàter de costat c i tres quadrats sobre l'exterior dels costats.

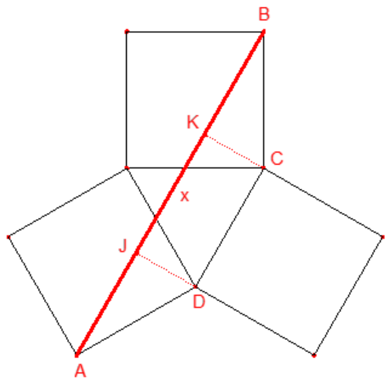
Calcula la longitud del segment roig.

24



Solució:

$$\overline{BC} = c$$
$$\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 30°$$
$$\cos 30° = \frac{\overline{AJ}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\overline{AJ} = \overline{BK} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$
$$\overline{JK} = c$$
$$\overline{AB} = \overline{AJ} + c + \overline{BK} =$$
$$= \frac{c\sqrt{3}}{2} + c + \frac{c\sqrt{3}}{2} = (1+\sqrt{3})c$$



25**

Fa dos anys, Cloe tenia el triple de l'edat de la seva germana Isa, i dos anys abans el quíntuple.

Dins de quants anys la proporció serà de 2 a 1?

26

Solució:

	Fa 4 anys	Fa 2 anys	Ara	Dins de n anys
Cloe	$x-4$	$x-2$	x	$x+n$
Isa	$y-4$	$y-2$	y	$y+n$
relació	$x-4=5(y-4)$	$x-2=3(y-2)$		$x+n=2(y+n)$

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} x-4=5(y-4) \\ x-2=3(y-2) \end{cases} \rightarrow \quad 5(y-4)+4-2=3(y-2) \quad \rightarrow \quad 5y-18=3y-6 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2y=12 \quad \rightarrow \quad y=6 \quad \rightarrow \quad x=5(y-4)+4=5(6-4)+4=14$$

Les edats actuals són 6 i 14 anys.

Per saber quants anys han de passar perquè l'edat de Cloe siga el doble que la d'Isa, substituïm les edat actuals:

$$x + n = 2(y + n) \quad \rightarrow \quad 14 + n = 2(6 + n) \quad \rightarrow \quad 14 - 12 = 2n - n \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow n = 2 \text{ són els anys que han de passar.}$$

27* **28**

Troba totes les multiplicacions que compleixen aquest model, on ***a***, ***b***, ***c*** i ***d*** són xifres diferents.

$$\begin{array}{r} a\,b \\ \times \quad c \\ \hline d\,d\,d \end{array}$$

Solució:

Si comencem pensant que *d = 1*, tindrem que *111= 3·37*, que no ens serveix. A partir d'aquesta expressió podem trobar totes les solucions possibles, que són tres:

ddd	$ab \cdot c$	Vàlid (S/N)	Motiu per rebutjar-lo
111	37·3	N	$a = \mathrm{c}$
222 =2·111=2·3·37=(2·37)·3	74·3	S	
222 =2·111=2·3·37=37·(2·3)	37·6	S	
333=3·111=3·3·37=37·(3·3)	37·9	N	$a = d$
444=4·111=4·3·37		N	No és possible obtindre $ab \cdot c$, sobren xifres
555=5·111=5·3·37		N	
666 =6·111=2·3·3·37=(2·37)·(3·3)	74·9	S	
666 =6·111=2·3·3·37=(3·37)·(2·3)	111·6	N	ab té 3 xifres
777=7·111=7·3·37		N	No és possible obtindre $ab \cdot c$, sobren xifres
888=8·111=8·3·37=4·2·3·37=(4·3)·(2·37)	12·74	N	
999=9·111=3·3·3·3·37		N	