SOLUCIONS – MARÇ 2026

2* **3**

En quina plaça està aparcat el cotxe blau?

SOLUCIÓ:

En la 87. Estem veient els números cap per avall. Les places són 86, 87, 88, 89, 90 i 91.

4*** **5**

Al meu poble hi viuen diversos anglesos. Cadascú és soci de exactament tres clubs. Cada club té exactament tres socis.
Donats dos anglesos qualssevol, comparteixen exactament dos clubs.
Quants anglesos hi ha al meu poble?

SOLUCIÓ:

Hi ha quatre anglesos i quatre clubs.

Imaginem un cub. En els vèrtexs superiors podem col·locar els quatre anglesos. Els anomenarem A, B, C i D.

En els quatre vèrtexs inferiors els quatre clubs. Els anomenarem 1, 2, 3 i 4. Els col·loquem de manera que A estiga sobre 1, B sobre 2, C sobre 3 i D sobre 4.

Cada anglés pertany al club que té davall i als dos que estan als dos costats.

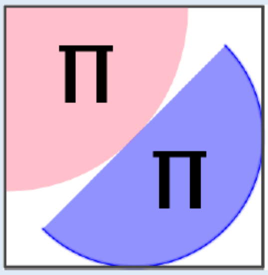
Amb això tindrem:

	Pertany al club		
A	1	2	4
B	2	1	3
C	3	2	4
D	4	3	1

I es pot vore que cada parella d'anglesos coincideix exactament en dos dels clubs.

6 ggb **7**

La figura està formada per un quadrat que conté un quadrant de cercle i un semicercle, tots dos amb la mateixa àrea π.
Calculeu l'àrea i el costat del quadrat.

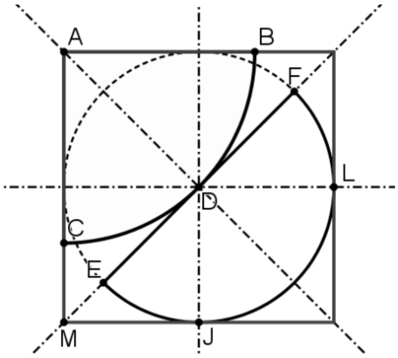


SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Com l'àrea del quadrant és π, l'àrea del cercle complet serà $4\pi = 2^2\pi$, d'on el radi serà 2.

Fent el mateix amb el semicercle, l'àrea del cercle corresponent serà $2\pi = \left(\sqrt{2}\right)^2\pi$, per la qual cosa el radi serà $\sqrt{2}$.

Vegem els passos per fer el dibuix:

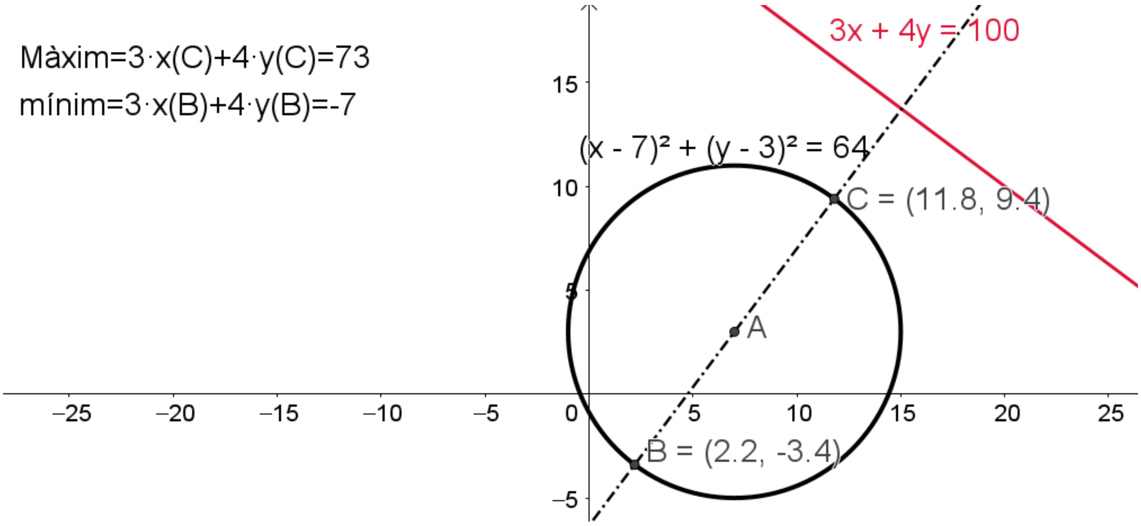


1. Dibuixem el sector circular corresponent al quadrant del cercle amb centre a $A(0,0)$ que passa per $B(2,0)$ i $C(0,-2)$.
2. Dibuixem la bisectriu del quadrant. El punt D en què talla l'arc serà el de tangència amb el semicercle.
3. Tracem la recta tangent en aquest punt D.
4. Amb centre en D i radi $\sqrt{2}$ dibuixem una circumferència.
5. Els punts de tall E i F amb la recta tangent seran els extrems del diàmetre de la semicircumferència. La dibuixem.
6. Tracem les paral·leles als eixos per D per obtenir els punts J i L. Tracem les rectes tangents als dos punts i ja tenim els costats del quadrat.
7. Amb interseccions trobem els extrems d'un dels costats del quadrat i amb polígon regular el dibuixem.
8. A la vista algebraica veiem que la superfície que ocupa el quadrat és de 8 unitats quadrades. El costat del quadrat serà $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ unitats.

9 ggb **10**

Entre tots els punts que compleixen la condició $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, trobeu el major i el menor valor possible per a $3x + 4y$.

SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:



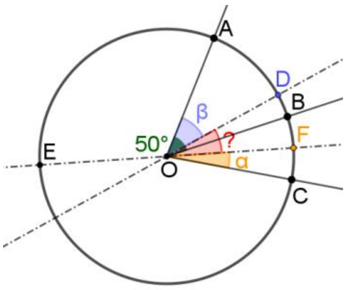
1. Introduint en la barra d'entrada $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$ obtenim una circumferència en la vista gràfica. Si mirem la vista algebraica vorem que està escrita en un altre format: $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 64$. (El punt (7,3) és el centre de la circumferència i 64 el quadrat del radi).
2. La relació $3x + 4y = a$ ens dona rectes paral·leles diferents segons el valor que donem al paràmetre a.
   Dibuixarem una qualsevol, per exemple $3x + 4y = 100$.
3. Com que ens interessen els punts de la circumferència, hauríem de desplaçar la recta fins a tocar-la. El primer punt de contacte serà el que ens done el màxim; i, l'últim, el mínim. Per trobar-los, busquem el centre A de la circumferència i tracem la perpendicular a la recta que passe pel punt A. Trobem els punts de tall B (per al mínim) i C (per al màxim).
4. Per calcular el valor màxim introduïm a la barra d'entrada:
   M=3*x(C)+4*y(C)
   Per al valor mínim:
   M=3*x(B)+4*y(B)
   Els valors apareixeran en la vista algebraica.

   NOTA: L'asterisc correspon a la multiplicació.

11** 12

Siguen A, B i C tres punts d'una circumferència centrada a $O(0,0)$. Sabem que $\widehat{AOB} = 50°$. Tracem les bisectrius dels angles $\widehat{AOC}$ i $\widehat{BOC}$. Quina és la mesura de l'angle que formen les dues bisectrius?

SOLUCIÓ:



Quan tracem les dues bisectrius partim cadascun dels angles en dos iguals:

$$\widehat{AOC} = 2\beta$$
$$\widehat{BOC} = 2\alpha$$

Anomenarem δ a l'angle $\widehat{DOF}$ que volem calcular. (D i F són els punts de tall de les bisectrius amb la circumferència).

Es compleix que $\widehat{AOC} = 50° + \widehat{BOC}$ o, el que és el mateix: $2\beta = 50° + 2\alpha \quad \rightarrow \quad \beta = 25° + \alpha$

També que $\beta = \alpha + \delta$

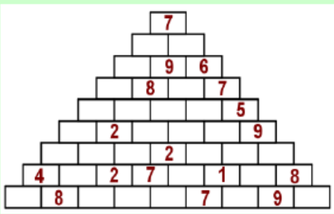
D'ambdues deduïm que $25° + \alpha = \alpha + \delta$

Per tant: $\delta = 25°$

13* 14

Completeu les caselles buides de la piràmide adjunta amb les regles següents:

- Només podeu posar nombres naturals d'una xifra.
- En cap fila no es repeteixen nombres.
- Cada nombre s'obté sumant o restant els dos que té davall.



SOLUCIÓ:

Abans de començar a emplenar, unes quantes consideracions:

1. Si la suma de dos números supera el 9, només podrem restar-los.
2. Si a la casella superior hi ha un nombre menor que un dels dos que té davall, ha de ser el resultat d'una resta.

Comencem a omplir per la fila inferior:
El primer número de l'esquerra ha de ser un 4, i el de la dreta un 1.

Entre el 7 i el 9, com dalt hi ha un 1, hi ha d'haver un 8 o un 6, però el 8 ja apareix en aquesta fila, així que va el 6.

Queden per col·locar el 2, 3 i 5. El 7 de la fila superior només el podem obtenir sumant el 2 i el 5, mentre que el 2 el podem obtenir restant el 5 i el 3.
La primera fila quedarà:

4	8	3	5	2	7	6	9	1

Omplim la segona fila:
El primer buit de l'esquerra, com té davall un 8 i un 3, només pot ser el resultat de restar-los, ja que la suma tindria dues xifres.
Sobre el 2 i el 7 la suma dona 9 i la resta 5, però en aquesta fila ja n'hi ha un 5, així que el número és un 9.
Sobre el 6 i el 9, la resta dels dos, 3.
La segona fila quedarà:

4	5	2	7	9	1	3	8

Omplim la tercera fila:
Sobre el 7 i el 9 hi ha d'anar la resta: 2.
El mateix sobre el 9 i l'1: 8.
I sobre el 3 i el 8: 5.
Sobre l'1 i el 3 podrien anar el 2 o el 4, però en aquesta fila ja hi ha un 2, així que serà el 4.
Sobre el 5 i el 2 ha d'anar un 7 perquè a la fila següent puguem obtenir el 2 que hi ha.
Sobre el 2 i el 7 serien el 9 o el 5, però ja tenim un 5, així que ens quedem amb el 9.
Sobre el 4 i el 5 ja no queda més opció que posar l'1.
I així la tercera fila queda:

1	7	9	2	8	4	5

Omplim la quarta fila:
Sobre el 9 i el 2 la resta: 7.
Sobre el 2 i el 8 la resta: 6.
Sobre el 8 i el 4 la resta: 4.
Sobre l'1 i el 7 podrien anar el 8 o el 6, però com que ja hi ha un 6 en aquesta fila, ens quedem amb el 8.
La fila queda:

8	2	7	6	4	9

Omplim la cinquena fila:

Sobre el 8 i el 2 la resta: 6.

Sobre el 2 i el 7 no pot anar el 5 perquè ja n'hi ha un, així que serà un 9.

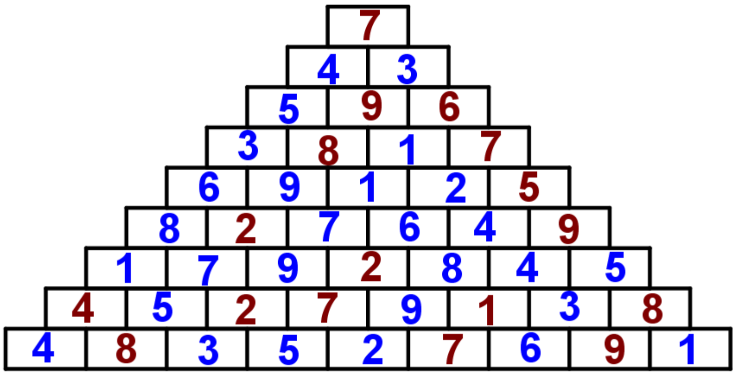
Sobre el 7 i el 6, l'1.

Sobre el 6 i el 4, el 2.

La fila queda:

6	9	1	2	5

La piràmide completa:



16**

A les caselles adjuntes col·loquem les xifres de l'1 al 6, sense que es repetisca cap, i calculem el resultat de la suma. Aconseguiu:

a) La major suma possible.

b) La menor suma possible.

17

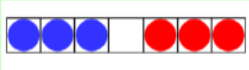
SOLUCIÓ:

La suma més gran s'obté col·locant els números més grans en els exponents, llevat de l'1, que no interessa col·locar-lo com a base. S'obté $5^6 + 3^4 + 2^1 = 15708$

Per a la menor el contrari: els números més menuts com a exponent, novament. Excepte l'1, al qual podem posar el 6 com a exponent. Resulta: $1^6 + 5^2 + 4^3 = 90$.

18* 19

Heu d'intercanviar les fitxes blaves de l'esquerra amb les roges de la dreta. Per moure-les, només ho podeu fer si la casella següent està buida, o saltant sobre una única fitxa al buit següent. No podeu recular.



SOLUCIÓ:

Com que només hi ha una casella lliure, per anotar els moviments que hem de fer només cal indicar la casella on està la fitxa que mourem. Les numerarem d'esquerra a dreta

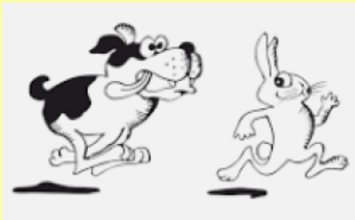
1	2	3	4	5	6	7

Hem de moure les fitxes situades en les caselles indicades:

3	5	6	4	2	1	3	7	5	6	4	2	3	5	4

20** 21

Un conill porta un avantatge a un gos que el persegueix equivalent a 50 salts de conill. Si un salt del gos equival a 3 salts del conill i el conill fa 8 salts en el temps que el gos en fa 3, en quants salts arribarà el gos al conill?



SOLUCIÓ:

Siguen: G= distància recorreguda pel gos en un salt.

C= distància recorreguda pel conill en un salt.

Si un salt de gos equival a tres salts de conill, podrem representar-lo com a G=3C.

Per tant, 3G=9C.

Com que el conill fa 8 salts en el temps que el gos en fa 3, que equivalen a 9 de conill, tindrem que per cada 3 salts que fa el gos (3G) s'acosta un salt de conill (C) al conill.

En haver inicialment una distància equivalent a 50 salts de conill (50C) entre tots dos, quan el gos haja fet 50 vegades 3 salts, arribarà al conill. És a dir, el gos ha de fer 150 salts per aconseguir el conill.

23*** 24

En una sala de cinema estranya, els seients formen un triangle: a la primera fila hi ha un seient, a la segona fila dos seients, ..., a la n-èsima n seients. Se sap que el nombre de butaques de la sala és divisible per 2027. Quin és el nombre més menut de butaques que hi pot haver en una sala així?

SOLUCIÓ:

$$1 + 2 + \cdots\cdots\cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = k \cdot 2027; k \in N$$

Com 2027 és primer, un dels factors, n o $n+1$, ha de ser divisible per 2027. Òbviament, perquè la quantitat de butaques siga la mínima possible, cal que $n + 1 = 2027$. El nombre de butaques en aquest cas és:

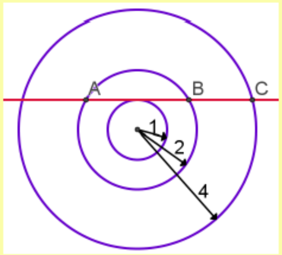
$$\frac{2026 \cdot 2027}{2} = 2053351$$

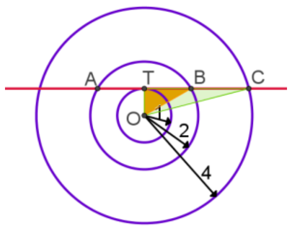
25** 26

La figura està formada per tres circumferències de radis 1, 2, 4. Proveu que:

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \Phi : 1$$

Nota: el nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$





SOLUCIÓ:

Anomenarem O al centre de les circumferències i T al punt de tangència de la recta amb la circumferència de radi 1.

Es compleix que $\overline{OT} = 1$, $\overline{OB} = 2$, $\overline{OC} = 4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $O\overset{\Delta}{T}B, O\overset{\Delta}{T}C$:

$\overline{TB} = \sqrt{3}, \overline{TC} = \sqrt{15}$

$\overline{AC} = \overline{AT} + \overline{TC} = \overline{TB} + \overline{TC} = \sqrt{3} + \sqrt{15} = \sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$

$\overline{AB} = 2\sqrt{3}$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

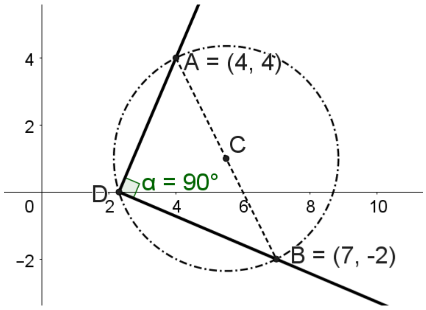
27 ggb   28

Traceu un angle recte els costats del qual passen per $A(4,4)$ i $B(7,-2)$, i el vèrtex del qual estiga a l'eix d'abscisses.

SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

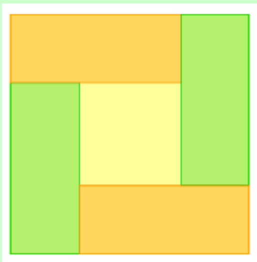
Usarem que qualsevol triangle inscrit en una circumferència amb un costat en el diàmetre d'aquesta i el vèrtex oposat sobre la circumferència sempre és rectangle.

1. Introduïm els punts $A(4,4)$ i $B(7,-2)$
2. Dibuixem el segment que els uneix i trobem el punt mitjà C.
3. Dibuixem la circumferència centrada a C que passa per A (o B).
4. Trobem el punt d'intersecció de la circumferència amb l'eix d'abscisses D.
5. Dibuixem les dues semirectes DA i DB.



30*   31

Els quatre rectangles de la imatge són iguals i cadascun té 14 cm de perímetre.
Calculeu l'àrea del quadrat extern.



SOLUCIÓ:

El costat del quadrat extern està format per un costat curt i un costat llarg del rectangle. És a dir, mesura la meitat del perímetre del rectangle, 7 cm.

L'àrea del quadrat serà $A = 7^2 = 49\ cm^2$.