EJERCICIOS DE MARZO RESUELTOS

2* **3**

¿En qué plaza está aparcado el coche azul?

SOLUCIÓN:

En la 87. Estamos viendo los números boca abajo. Las plazas son 86, 87, 88, 89, 90 y 91.

4*** **5**

En mi pueblo viven varios ingleses. Cada uno es socio de exactamente tres clubes. Cada club tiene exactamente tres socios.
Dados dos ingleses cualesquiera, comparten exactamente dos clubes.
¿Cuántos ingleses hay en mi pueblo?

SOLUCIÓN:

Hay cuatro ingleses y cuatro clubes.

Imaginemos un cubo. En los vértices superiores podremos colocar a los cuatro ingleses. Los llamaremos A, B, C y D.

En los cuatro vértices inferiores los cuatro clubes. Los llamaremos 1, 2, 3 y 4. Los colocamos de forma que A esté sobre 1, B sobre 2, C sobre 3 y D sobre 4.

Cada inglés pertenece al club que tiene debajo y a los dos que están a los dos lados de ese.

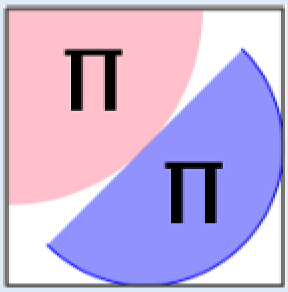
Con esto tendremos:

	Pertenece al club		
A	1	2	4
B	2	1	3
C	3	2	4
D	4	3	1

Y se puede ver que cada pareja de ingleses coincide exactamente en dos de los clubes.

6 ggb 7

La figura está formada por un cuadrado que contiene un cuadrante de círculo y un semicírculo, ambos con igual área π. Calcula el área y el lado del cuadrado.

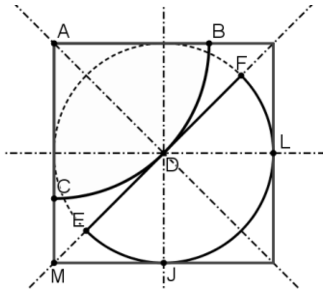


SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Al ser el área del cuadrante π, el área del círculo completo será $4\pi = 2^2\pi$ de donde el radio será 2.

Haciendo lo mismo con el semicírculo, el área del círculo correspondiente será $2\pi = \sqrt{2}^2\pi$, por lo que el radio será $\sqrt{2}$.

Veamos los pasos para hacer el dibujo:



1. Dibujamos el sector circular correspondiente al cuadrante del círculo con centro en A(0,0) pasando por B(2,0) y C(0,-2).
2. Dibujamos la bisectriz del cuadrante. El punto D en que corte al arco será el de tangencia con el semicírculo.
3. Trazamos la recta tangente en ese punto D.
4. Con centro en D y radio $\sqrt{2}$ dibujamos una circunferencia.
5. Los puntos de corte E y F con la recta tangente serán los extremos del diámetro de la semicircunferencia. La dibujamos.
6. Trazamos las paralelas a los ejes por D para obtener los puntos J y L. Trazamos las rectas tangentes en los dos puntos y ya tenemos los lados del cuadrado.
7. Con intersecciones hallamos los extremos de uno de los lados del cuadrado y con polígono regular lo dibujamos.
8. En la vista algebraica vemos que la superficie que ocupa el cuadrado es de 8 unidades cuadradas. El lado del cuadrado será $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ unidades.

9 ggb **10**

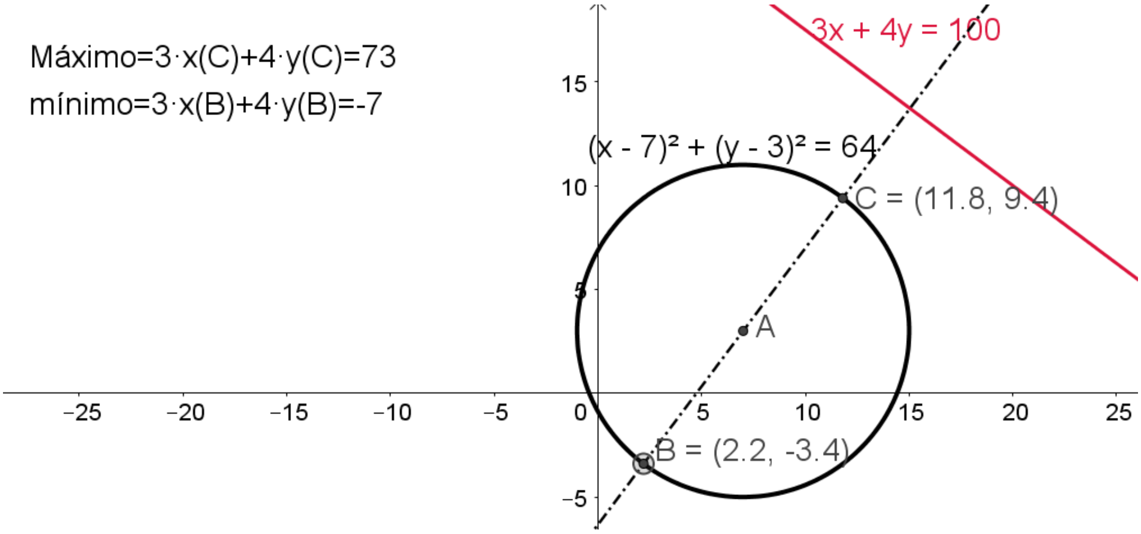
Entre todos los puntos que cumplen

$x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$

Halla el mayor y el menor valor posible para

$3x + 4y.$

SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:



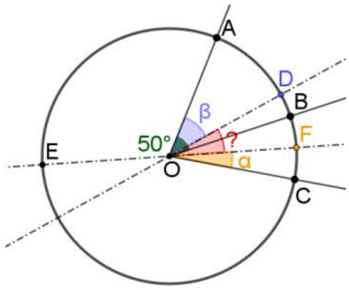
1. Introduciendo en la barra de entrada $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$ obtenemos una circunferencia en la vista gráfica. Si miramos la vista algebraica veremos que está escrita en otro formato: $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 64$. (El punto (7,3) es el centro de la circunferencia y 64 el cuadrado del radio).
2. La relación $3x + 4y = a$ nos da rectas paralelas distintas según el valor que demos al parámetro a.
   Dibujaremos una cualquiera, por ejemplo $3x + 4y = 100$.
3. Como nos interesan los puntos de la circunferencia, tendríamos que desplazar la recta hasta tocarla. El primer punto de contacto será el que nos dé el máximo y el último el mínimo. Para hallarlos, buscamos el centro A de la circunferencia y trazamos la perpendicular a la recta que tenemos que pase por el punto A. Hallamos los puntos de corte B (para el mínimo) y C (para el máximo).
4. Para hallar el valor máximo introducimos en la barra de entrada :
   M=3*x(C)+4*y(C)
   Para el valor mínimo:
   M=3*x(B)+4*y(B)
   Los valores aparecerán en la vista algebraica.

   NOTA: El asterisco corresponde a la multiplicación.

11** **12**

Sean A, B y C tres puntos de una circunferencia centrada en O(0,0). Sabemos que $\widehat{AOB} = 50°$. Trazamos las bisectrices de los ángulos $\widehat{AOC}$ y $\widehat{BOC}$.
¿Cuánto mide el ángulo que abarcan ambas bisectrices?

SOLUCIÓN:



Al trazar las dos bisectrices partimos cada uno de los ángulos en dos iguales:

$$\widehat{AOC} = 2\beta$$
$$\widehat{BOC} = 2\alpha$$

Llamaremos δ al ángulo $\widehat{DOF}$ que queremos hallar. (D y F son los puntos de corte de las bisectrices con la circunferencia).

Se cumple que $\widehat{AOC} = 50° + \widehat{BOC}$ o lo que es lo mismo: $2\beta = 50° + 2\alpha \quad \rightarrow \quad \beta = 25° + \alpha$

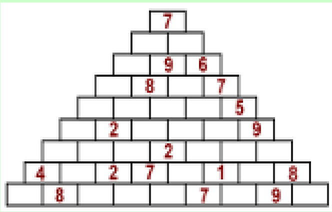
También que $\beta = \alpha + \delta$

De ambas deducimos que $25° + \alpha = \alpha + \delta$

Por lo tanto $25° = \delta$

13* **14**

Completa las casillas vacías de la pirámide adjunta con las siguientes reglas:
Sólo puedes poner números naturales de una cifra. En ninguna fila se repiten números. Cada número se obtiene sumando o restando los dos que tiene abajo.



SOLUCIÓN:

Antes de empezar a rellenar, unas cuantas consideraciones:

1. Si la suma de dos números supera el 9, sólo podremos restarlos.
2. Si en la casilla superior hay un numero menor que uno de los dos que tiene debajo, debe ser el resultado de una resta.

Empezamos a llenar por la fila inferior:
El primer número de la izquierda debe ser un 4, y el de la derecha un 1.
Entre el 7 y el 9, como arriba hay un 1, debe haber un 8 o un 6, pero el 8 ya aparece en esta fila, así que va el 6.

Quedan por colocar el 2, 3 y 5. El 7 de la fila superior sólo podemos obtenerlo sumando el 2 y el 5, mientras que el 2 lo podemos obtener restando el 5 y el 3.

La primera fila quedará:

4	8	3	5	2	7	6	9	1

Llenamos la segunda fila:

El primer hueco de la izquierda, al tener debajo un 8 y un 3, sólo puede ser el resultado de restarlos, ya que la suma tendría dos cifras.

Sobre el 2 y el 7 la suma da 9 y la resta 5, pero en esta fila ya hay un 5, así que el número es un 9.

Sobre el 6 y el 9, la resta de ambos, 3.

La segunda fila quedará:

4	5	2	7	9	1	3	8

Llenamos la tercera fila:

Sobre el 7 y el 9 debe ir la resta: 2.

Lo mismo sobre el 9 y el 1: 8.

Y sobre el 3 y el 8: 5.

Sobre el 1 y el 3, podrían ir el 2 o el 4, pero en esta fila ya hay un 2, así que será el 4.

Sobre el 5 y el 2 debe ir un 7 para que en la fila siguiente podamos obtener el 2 que hay.

Sobre el 2 y el 7 serían el 9 o el 5, pero ya tenemos un 5, así que nos quedamos con el 9.

De esto, sobre el 4 y el 5 ya no queda más opción que poner el 1.

Y así la tercera fila queda:

1	7	9	2	8	4	5

Llenamos la cuarta fila:

Sobre el 9 y el 2 la resta: 7.

Sobre el 2 y el 8 la resta: 6.

Sobre el 8 y el 4 la resta: 4.

Sobre el 1 y el 7 podrían ir el 8 o el 6, pero como ya hay un 6 en esta fila, nos quedamos con el 8.

La fila queda:

8	2	7	6	4	9

Llenamos la quinta fila:

Sobre el 8 y el 2 la resta: 6.

Sobre el 2 y el 7 no puede ir el 5 porque ya hay uno, así que será un 9.

Sobre el 7 y el 6, el 1.
Sobre el 6 y el 4, el 2.
La fila queda:

6	9	1	2	5

La pirámide completa:

7
4 3
5 9 6
3 8 1 7
6 9 1 2 5
8 2 7 6 4 9
1 7 9 2 8 4 5
4 5 2 7 9 1 3 8
4 8 3 5 2 7 6 9 1

16** **17**

En las casillas adjuntas colocamos las cifras del 1 al 6, sin que se repita ninguna, y calculamos el resultado de la suma. Consigue:
a) La mayor suma posible.
b) La menor suma posible.

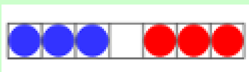
SOLUCIÓN:

La mayor suma se obtiene colocando los números más grandes en los exponentes, salvo el 1 que no interesa colocarlo como base. Se obtiene $5^6 + 3^4 + 2^1 = 15708$

Para la menor lo contrario, los números más pequeños como exponente, nuevamente salvo el 1 al que le podemos poner el 6 como exponente. Resulta: $1^6 + 5^2 + 4^3 = 90$.

18* **19**

Debes intercambiar las fichas azules de la izquierda con las rojas de la derecha. Para moverlas, sólo puedes hacerlo si la casilla siguiente está vacía, o saltando sobre una única ficha al hueco siguiente. No puedes retroceder.



SOLUCIÓN:

Como sólo hay una casilla libre, para anotar los movimientos que debemos hacer, basta con indicar la casilla donde está la ficha que vamos a mover. Las numeraremos de izquierda a derecha

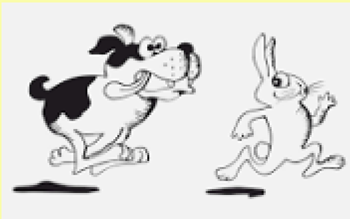
1	2	3	4	5	6	7

Debemos mover las fichas situadas en las casillas indicadas:

3	5	6	4	2	1	3	7	5	6	4	2	3	5	4

20** 21

Un conejo lleva una ventaja a un perro que lo persigue equivalente a 50 saltos de conejo. Si un salto del perro equivale a 3 saltos del conejo y el conejo da 8 saltos en el tiempo que el perro da 3, ¿en cuantos saltos alcanzará el perro al conejo?



SOLUCIÓN:

Sean: P=distancia recorrida por el perro en un salto.

C=distancia recorrida por el conejo en un salto.

Si un salto de perro equivale a tres saltos de conejo, podremos representarlo como P=3C.

Por lo tanto, 3P=9C.

Como el conejo da 8 saltos en el tiempo que el perro da 3, que equivalen a 9 de conejo, tendremos que por cada 3 saltos que da el perro (3P) se acerca un salto de conejo (C) al conejo.

Al haber inicialmente una distancia equivalente a 50 saltos de conejo (50C) entre ambos, cuando el perro haya dado 50 veces 3 saltos, alcanzará al conejo. Es decir, el perro debe dar 150 saltos para alcanzar al conejo.

23*** 24

En una sala de cine extraña, los asientos forman un triángulo: en la primera fila hay un asiento, en la segunda fila dos asientos, ..., en la n-ésima n asientos. Se sabe que el número de butacas de la sala es divisible por 2027. ¿Cuál es el número más pequeño de butacas que puede haber en una sala así?

SOLUCIÓN:

$$1+2+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=k\cdot 2027; k\in N$$

Como 2027 es primo , uno de los factores, n o n+1 , tiene que ser divisible por 2027. Obviamente para que el número de butacas sea el mínimo posible es necesario y suficiente que n+1=2027 . El número de butacas en este caso es

$$\frac{2026\cdot 2027}{2}=2053351$$

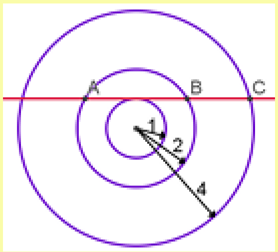
25** 26

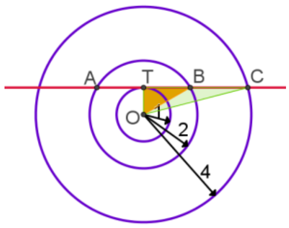
La figura está formada por tres circunferencias de radios 1, 2, 4.

Prueba que:

$$\overline{AC}:\overline{AB}=\Phi:1$$

Nota: el número de oro $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$





SOLUCIÓN:

Llamaremos O al centro de las circunferencias y T al punto de tangencia de la recta con la circunferencia de radio 1.

Se cumple que $\overline{OT}=1,\ \overline{OB}=2,\ \overline{OC}=4.$

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $O\overset{\Delta}{T}B, O\overset{\Delta}{T}C$:

$\overline{TB}=\sqrt{3}, \overline{TC}=\sqrt{15}$

$\overline{AC}=\overline{AT}+\overline{TC}=\overline{TB}+\overline{TC}=\sqrt{3}+\sqrt{15}=\sqrt{3}(1+\sqrt{5})$

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

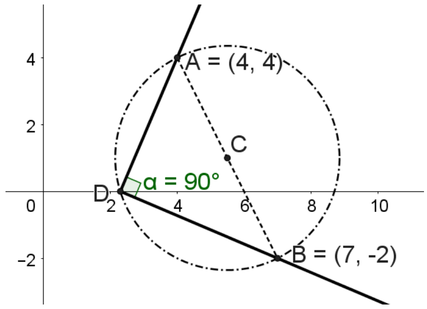
27 ggb 28

Traza un ángulo recto cuyos lados pasen por A(4,4) y B(7,−2), y cuyo vértice esté en el eje de abscisas.

SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

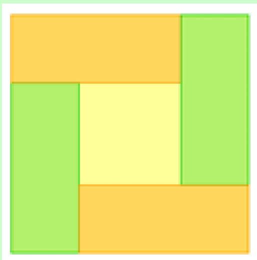
Usaremos que cualquier triángulo inscrito en una circunferencia con un lado en el diámetro de esta y el vértice opuesto sobre la circunferencia siempre es rectángulo.

1. Introducimos los puntos A(4,4) y B(7,-2)
2. Dibujamos el segmento que los une y hallamos el punto medio C.
3. Dibujamos la circunferencia centrada en C que pase por A (o B).
4. Hallamos el punto de intersección de la circunferencia con el eje de abscisas D.
5. Dibujamos las dos semirrectas DA y DB.



30* 31

Los cuatro rectángulos de la imagen son iguales y cada uno tiene 14 cm de perímetro.
Halla el área del cuadrado externo.



SOLUCIÓN:

El lado del cuadrado externo está formado por un lado corto y uno largo del rectángulo, es decir, mide la mitad del perímetro del rectángulo, 7 cm.

El área del cuadrado será $A = 7^2 = 49\ cm^2$.