

SOLUCIONES – ABRIL 2026

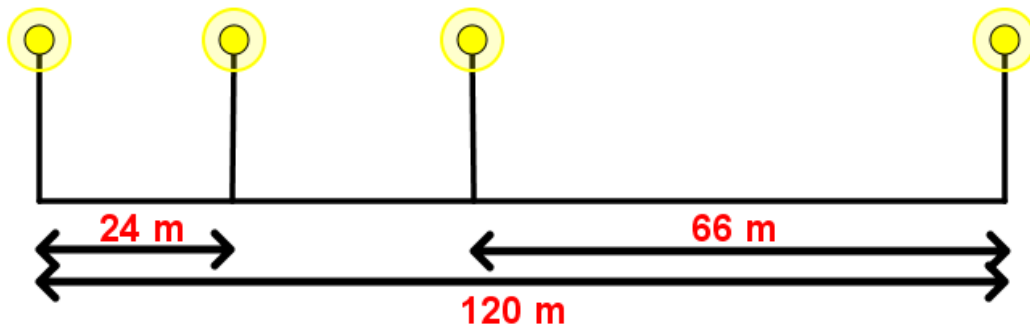
1*

2

En una calle de 120 m de largo hay cuatro farolas: una al principio, otra al final y dos más, una a 24 m de la del principio y otra a 66 m de la del final. ¿Cuántas farolas como mínimo habrá que instalar para que la distancia entre dos consecutivas sea siempre la misma?



Solución:



El hueco que queda entre la segunda y la tercera medirá $120 - (24 + 66) = 30$ m

Todos los números que tenemos son múltiplos de 6:

$$24 = 6 \cdot 4$$

$$30 = 6 \cdot 5$$

$$66 = 6 \cdot 11$$

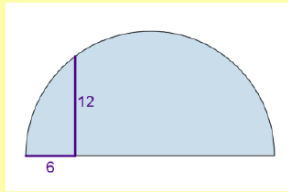
Si ponemos una farola cada 6 metros, tendremos que añadir:

1. En el primer tramo 3 farolas para que queden cuatro huecos de 6 m cada uno.
2. En el segundo tramo deben quedar cinco huecos, por lo que necesitaremos 4 farolas.
3. En el tercer tramo, para once huecos necesitamos 10 farolas.

En total, tendremos que añadir $3+4+10=17$ farolas a las cuatro que ya tenemos.

3****4**

Calcula el área del semicírculo de la figura.

**Solución:**

Considerando la propiedad de que el triángulo ABC también es rectángulo, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras a los tres triángulos que se observan para calcular los segmentos AB, AC y BC, siendo este último el diámetro del semicírculo.

Si AB mide x cm, AC mide y cm y BC mide $6+z$ cm, resulta:

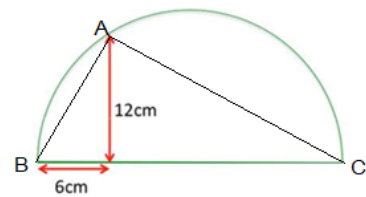
$$\begin{cases} x^2 = 6^2 + 12^2 \\ y^2 = z^2 + 12^2 \\ (6+z)^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \rightarrow (6+z)^2 = 6^2 + 12^2 + z^2 + 12^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6^2 + 12z + z^2 = 6^2 + z^2 + 2 \cdot 12^2 \rightarrow 12z = 2 \cdot 12^2 \rightarrow z = 24 \text{ cm}$$

Como el diámetro del semicírculo mide $6+z = 6+24 = 30$ cm, el radio medirá 15 cm.

El área del semicírculo será:

$$A = \frac{1}{2} \pi \cdot 15^2 = \frac{225}{2} \pi \text{ cm}^2$$

**6******7**

Calcula de forma razonada el mcd de todos los números naturales que se pueden obtener mediante la fórmula $n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ para todos los valores de $n \geq 3$.

**Solución:**

Si factorizamos tendremos:

$$\begin{aligned} n(n^2 - 1)(n^2 - 4) &= n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2) = \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Con lo que tenemos cinco números naturales consecutivos, por lo que uno debe ser múltiplo de 5.

Al menos hay un múltiplo de 3 (podrían ser dos, pero no podemos asegurarlo).

También hay al menos dos números pares consecutivos, por lo que podemos asegurar que uno será múltiplo de 4 y el otro de 2.

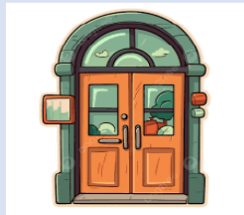
De todo esto podemos deducir que todos los números obtenidos tienen en su factorización los números 2, 3, 4 y 5, por lo que todos son múltiplos de $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

El mcd será 120.

8 ggb

Una puerta está formada por un rectángulo y un semicírculo. Sabemos que tiene perímetro mínimo y 2 m^2 de superficie. Halla sus dimensiones.

9



Solución con geogebra:

Llamaremos x al radio de la semicircunferencia y a a la altura del rectángulo. La superficie de la puerta será:

$$S = \frac{\pi x^2}{2} + 2x \cdot a = 2 \rightarrow 4xa = 4 - \pi x^2 \rightarrow a = \frac{4 - \pi x^2}{4x}$$

El perímetro de la puerta:

$$P = \frac{2\pi x}{2} + 2a + 2x \rightarrow$$
$$\rightarrow P(x) = \pi x + 2 \cdot \frac{4 - \pi x^2}{4x} + 2x = \pi x + \frac{2}{x} - \frac{\pi}{2} x + 2x = \frac{2}{x} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x$$

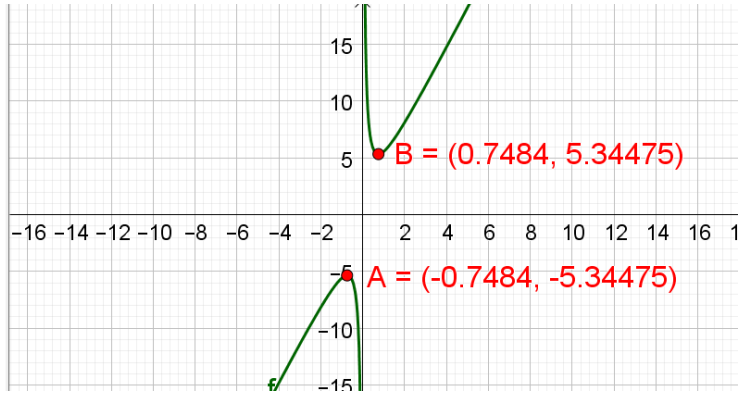
Buscamos el valor de x para el que la función alcanza el valor mínimo. Para hallarlo, introducimos la función en la barra de entrada y buscamos sus extremos relativos.

Función

$f : y = \frac{2}{x} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) x$

Punto

$A = (-0.7484, -5.34475)$



Obtenemos el máximo en A y el mínimo en B.

El valor de x para el que obtenemos el mínimo es $x=0.7484$.

Para obtener las dimensiones de la puerta x es el radio de la semicircunferencia, las medidas del rectángulo tendremos que calcularlas:

Para hallar la base del rectángulo introducimos en la barra de entrada

$$b = 2 * x(B)$$

Para la altura:

$$a = f(x(B))$$

Y obtenemos los resultados como números en la vista algebraica.

$f : y = \frac{2}{x} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) x$

Número

$a = 5.34475$

$b = 1.4968$

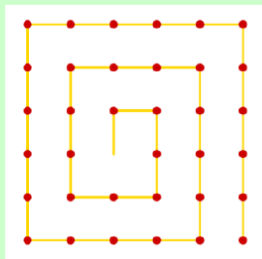
Punto

$A = (-0.7484, -5.34475)$

10*

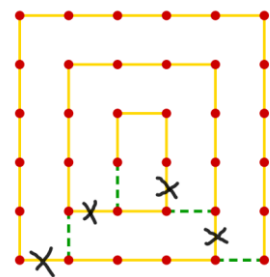
11

Moviendo solo cuatro cerillas, consigue que la espiral gire en sentido contrario.

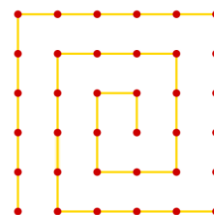


Solución:

Quitaremos las cerillas tachadas y las colocaremos donde están las líneas punteadas verdes.



Y obtenemos:



13*

14

He dibujado en una hoja de papel un cuadrado de 1 dm de lado.

Ahora quiero marcar todos los puntos de la hoja que cumplan que están a 1 dm de distancia de dos de los vértices del cuadrado exactamente. ¿Cuántos puedo marcar?

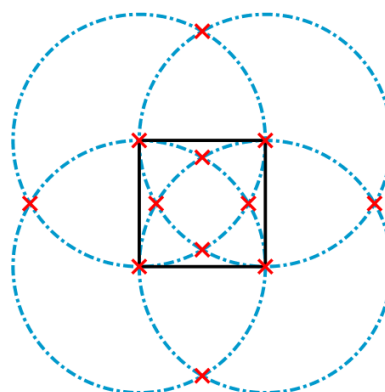


Solución:

Todos los puntos que están a una distancia de 1 dm de uno cualquiera de los vértices está sobre la circunferencia centrada en el vértice correspondiente y con radio 1 dm.

Si las dibujamos todas, podremos ver dónde coinciden dos de las circunferencias. Los puntos en que se corten estarán a la distancia de 1 dm de dos de los vértices.

Hay en total 12 puntos.



15***

16

Sabiendo que

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

converge a un límite finito, hállalo.



Solución:

$$\text{Sea } x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} \rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2 + x$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Por lo que $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$

17 ggb

18

Para ir desde la puerta de la granja (en el punto $A(0,0)$) hasta la del granero (en el punto $B(12,16)$), debo rodear el molino de base circular, cuya ecuación es $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
Halla el camino más corto y su longitud.

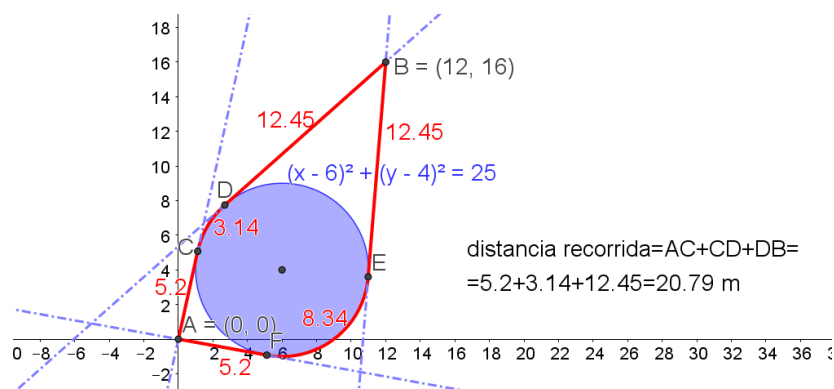


Solución con geogebra:

Para empezar, introduciremos los puntos A y B y la ecuación de la circunferencia.

El camino que deberemos recorrer será un tramo recto desde A hasta la circunferencia, un trozo de arco rodeando la circunferencia del molino y otro tramo recto hasta la puerta del granero B.

1. Trazamos las rectas tangentes a la circunferencia que pasen por A y B.
2. Hallamos los puntos de intersección de las rectas tangentes con la circunferencia: C, D, E y F.
3. Trazamos los segmentos que unen A y B con los cuatro puntos que acabamos de hallar.
4. Hallamos el centro de la circunferencia.
5. Con arco de circunferencia trazamos los arcos que van de C a D y de E a F.
6. Es evidente que el camino es más corto por CD. Calculamos su longitud sumando los tres tramos: $AC + CD + DB = 20.79 \text{ m}$.



20*****21**

Calcula el valor de

$$\omega(2026^2) + \omega(-2026^2) + 2026,$$

donde ω es la función

$$\omega(\alpha) = \operatorname{sen} \alpha + \alpha^{2029} + \alpha^{2027} - \alpha^{2025}$$

**Solución:**Observamos que $\omega(\alpha)$ es una función impar, ya que:

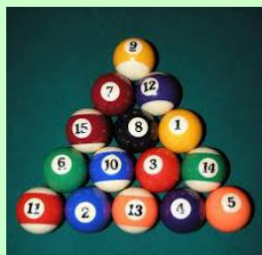
$$\begin{aligned} \omega(-\alpha) &= \operatorname{sen}(-\alpha) + (-\alpha)^{2029} + (-\alpha)^{2027} - (-\alpha)^{2025} = \\ &= -\operatorname{sen}(\alpha) - \alpha^{2029} - \alpha^{2027} + \alpha^{2025} = -\omega(\alpha) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\omega(2026^2) + \omega(-2026^2) + 2026 = \omega(2026^2) - \omega(2026^2) + 2026 = 2026$$

22***23**

Acabo de formar un triángulo equilátero con muchas bolas de billar. Si en cada lado cuento 30 bolas, ¿cuántos puntos de contacto habrá entre todas las bolas que he usado?

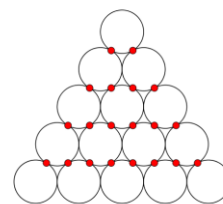
**Solución:**

Tenemos un triángulo con 30 filas de bolas. Menos las 30 bolas de la base, cada una de las bolas tiene 2 puntos de contacto con la fila inmediatamente inferior. Si los contamos fila a fila, tendremos:

Fila número	Número de bolas	Puntos de contacto con la fila inferior
1	1	$1 \cdot 2 = 2$
2	2	$2 \cdot 2 = 4$
3	3	$3 \cdot 2 = 6$
.....
28	28	$28 \cdot 2 = 56$
29	29	$29 \cdot 2 = 58$

Con lo que en total serían $60 \cdot \frac{29}{2} = 870$ puntos de contacto.

Tenemos contados los puntos que se encuentran en la misma posición que los marcados en rojo en el dibujo



Falta contar en cada fila los puntos de contacto con las bolas de esa misma fila. Ahora en la primera fila la que no tiene ningún punto de contacto.

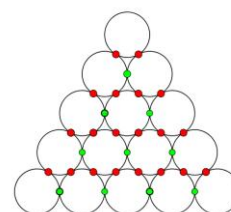
Fila número	Número de bolas	Puntos de contacto en la fila
2	2	1
3	3	2
4	4	3
.....
28	28	27
29	29	28
30	30	29

Tendremos $30 \cdot \frac{29}{2} = 435$ puntos de contacto.

Y ahora hemos contado los puntos de contacto que están en las posiciones verdes.

Sumamos las dos cantidades:

$870 + 435 = 1305$ puntos de contacto en total.



24**

La media de siete números naturales distintos es 25 y la mediana es 20. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar alguno de ellos?

25



Solución:

El que la mediana sea 20, nos indica que el número central una vez ordenados todos de menor a mayor es un 20.

El que la media sea 25, que la suma de los siete números es $25 \cdot 7 = 175$.

Para que uno de los números sea lo más grande posible, es necesario que los demás sean lo más pequeños posible, con lo que los siete números naturales serían:

1, 2, 3, 20, 21, 22, n

Calculamos n con la suma de todos:

$$1 + 2 + 3 + 20 + 21 + 22 + n = 175 \rightarrow 69 + n = 175 \rightarrow n = 106$$

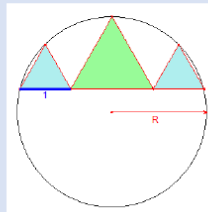
27 ggb

28

La figura está formada por una circunferencia y tres triángulos equiláteros.

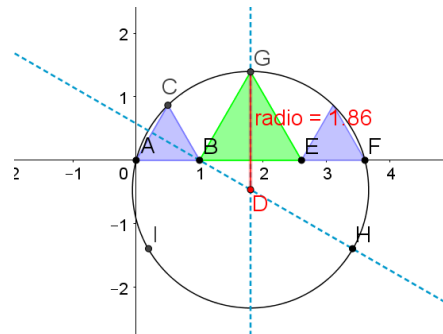
El lado de los dos equiláteros pequeños es 1 cm.

Calcula el radio de la circunferencia.



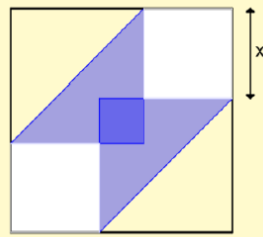
Solución con geogebra:

1. Dibujamos un triángulo equilátero ABC de lado 1.
2. Trazamos la mediatriz del lado AC.
3. El centro de la circunferencia está sobre esta recta, así que marcamos un punto D sobre la misma.
4. Trazamos la recta perpendicular al eje de abscisas que pase por D.
5. Con simetría sobre esta recta trasladamos el triángulo ABC. Ya tenemos los dos triángulos pequeños.
6. Trazamos la circunferencia con centro en D que pase por A.
7. Con base el segmento BE trazamos otro equilátero.
8. Desplazamos el punto D hasta que el vértice superior G del último triángulo esté sobre la circunferencia.
9. Trazamos el segmento que une D con G y obtenemos que el radio de la circunferencia mide 1.86 cm.



29****30**

Un cuadrado de papel de 1 dm de lado se dobla por dos vértices opuestos como se ve en la figura de manera que el área de la zona azul coincide con la del trozo que queda visible del cuadrado inicial. Halla x .

**Solución:**

El trozo que queda visible del cuadrado inicial son los dos cuadrados blancos de lado x :

$$S_B = 2x^2$$

La zona azul es la formada por dos triángulos rectángulos isósceles con catetos de longitud $1 - x$ (que juntos forman un cuadrado de lado $1 - x$) en la que debemos descontar el cuadrado que queda doble en el centro. La longitud del lado de este será $1 - 2x$. Por tanto:

$$S_A = (1 - x)^2 - (1 - 2x)^2$$

Queremos calcular x para que las dos superficies coincidan:

$$2x^2 = (1 - x)^2 - (1 - 2x)^2 \rightarrow 2x^2 = 2x - 3x^2 \rightarrow 5x^2 - 2x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(5x - 2) = 0 \rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ dm} = 4 \text{ cm}$$

La otra solución de la ecuación $x=0$ no tiene sentido, ya que supondría no haber doblado el papel.