

## SOLUCIONS – ABRIL 2026

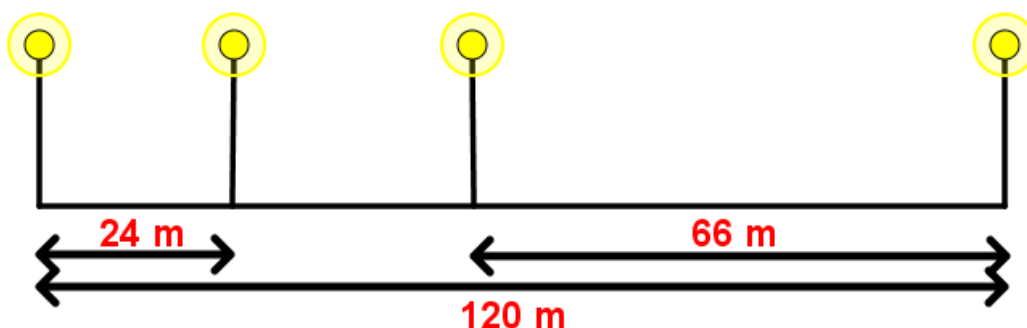
1\*

2

En un carrer de 120 m de llarg hi ha quatre fanals: un al principi, un altre al final i dos més, un a 24 m del principi i un altre a 66 m del final. Quants fanals com a mínim caldrà instal·lar perquè la distància entre dos consecutius siga sempre la mateixa?



Solució:



El buit que queda entre la segona i la tercera mesurarà  $120 - (24 + 66) = 30$  m

Tots els números que tenim són múltiples de 6:

$$24 = 6 \cdot 4$$

$$30 = 6 \cdot 5$$

$$66 = 6 \cdot 11$$

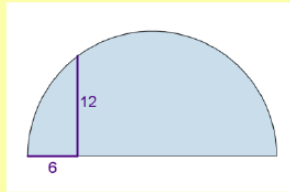
Si posem un fanal cada 6 metres, haurem d'afegir:

- Al primer tram 3 fanals perquè queden quatre buits de 6 m cadascun.
- Al segon tram han de quedar cinc buits, per la qual cosa necessitarem 4 fanals.
- Al tercer tram, per a onze buits necessitem 10 fanals.

En total, haurem d'afegir  $3 + 4 + 10 = 17$  fanals als quatre que ja tenim.

**3\*\*****4**

Calculeu l'àrea del semicercle de la figura.

**Solució:**

Considerant la propietat que el triangle ABC també és rectangle, podem aplicar el Teorema de Pitàgores als tres triangles que s'observen per calcular els segments AB, AC i BC, i aquest darrer és el diàmetre del semicercle.

Si AB mesura  $x$  cm, AC mesura  $y$  cm i BC mesura  $6 + z$  cm, resulta:

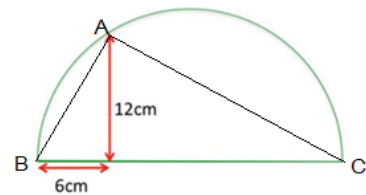
$$\begin{cases} x^2 = 6^2 + 12^2 \\ y^2 = z^2 + 12^2 \\ (6 + z)^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \rightarrow (6 + z)^2 = 6^2 + 12^2 + z^2 + 12^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6^2 + 12z + z^2 = 6^2 + z^2 + 2 \cdot 12^2 \rightarrow 12z = 2 \cdot 12^2 \rightarrow z = 24 \text{ cm}$$

Com el diàmetre del semicercle mesura  $6 + z = 6 + 24 = 30$  cm, el radi mesurarà 15 cm.

L'àrea del semicercle serà:

$$A = \frac{1}{2} \pi \cdot 15^2 = \frac{225}{2} \pi \text{ cm}^2$$

**6\*\*****7**

Calcula de forma raonada el mcd de tots els números naturals que es poden obtenir mitjançant la fórmula

$$n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$$

per a tots els valors de  $n \geq 3$ .

**Solució:**

Si factoritzem tindrem:

$$\begin{aligned} n(n^2 - 1)(n^2 - 4) &= n(n + 1)(n - 1)(n + 2)(n - 2) = \\ &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) \end{aligned}$$

Amb la qual cosa tenim cinc nombres naturals consecutius, de manera que un ha de ser múltiple de 5.

Almenys hi ha un múltiple de 3 (podrien ser dos, però no ho podem assegurar).

També hi ha almenys dos nombres parells consecutius, per la qual cosa podem assegurar que un serà múltiple de 4 i l'altre de 2.

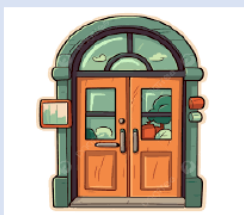
De tot això podem deduir que tots els números obtinguts tenen en la seva factorització els números 2, 3, 4 i 5, per la qual cosa tots són múltiples de  $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ .

El mcd serà 120.

## 8 ggb

Una porta està formada per un rectangle i un semicercle. Sabem que té perímetre mínim i  $2 \text{ m}^2$  de superfície. Calcula les dimensions.

9



### Solució amb geogebra:

Anomenarem  $x$  al radi de la semicircumferència i  $a$  a l'altura del rectangle. La superfície de la porta serà:

$$S = \frac{\pi x^2}{2} + 2x \cdot a = 2 \rightarrow 4xa = 4 - \pi x^2 \rightarrow a = \frac{4 - \pi x^2}{4x}$$

El perímetre de la porta:

$$P = \frac{2\pi x}{2} + 2a + 2x \rightarrow$$
$$\rightarrow P(x) = \pi x + 2 \cdot \frac{4 - \pi x^2}{4x} + 2x = \pi x + \frac{2}{x} - \frac{\pi}{2} x + 2x = \frac{2}{x} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) x$$

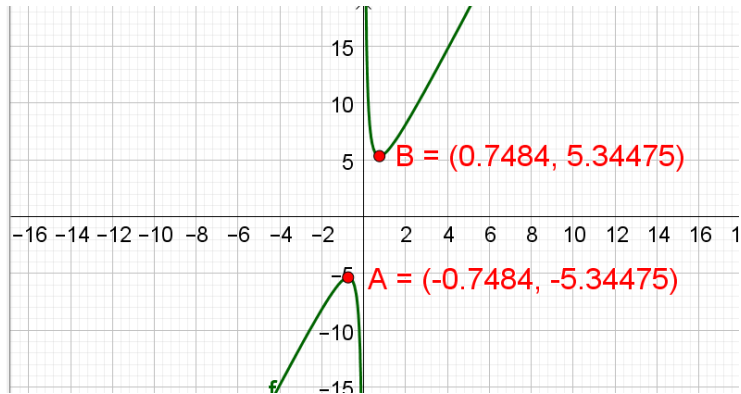
Busquem el valor de  $x$  per al qual la funció aconseguix el valor mínim. Per calcular-lo, introduïm la funció en la barra d'entrada i busquem els extrems relatius.

- Funció

●  $f : y = \frac{2}{x} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) x$

- Punt

●  $A = (-0.7484, -5.34475)$



Obtenim el màxim a A i el mínim a B.

El valor de  $x$  per al qual obtenim el mínim és  $x=0.7484$ .

Per obtenir les dimensions de la porta,  $x$  és el radi de la semicircumferència. Les dimensions del rectangle les haurem de calcular:

Per calcular la base del rectangle introduïm a la barra d'entrada:

$$b = 2 * x(B)$$

Per a l'altura:

$$a = f(x(B))$$

I obtenim els resultats com a números en la vista algebraica.

●  $f : y = \frac{2}{x} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) x$

- Número

○  $a = 5.34475$

○  $b = 1.4968$

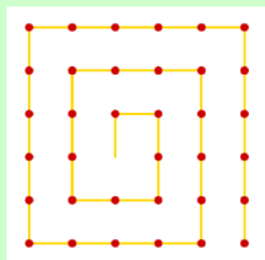
- Punt

●  $A = (-0.7484, -5.34475)$

10\*

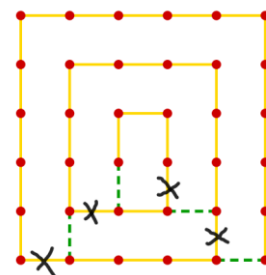
11

Movent només quatre mistos, aconseguim que l'espiral gire en sentit contrari.

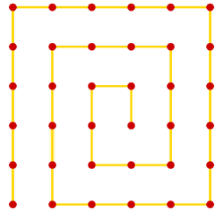


Solució:

Llevem els mistos ratllats i els col·loquem on estan les línies puntejades verdes.



I obtenim:



**13\***

**14**

He dibuixat en un full de paper un quadrat d'1 dm de costat.  
Ara vull marcar tots els punts del full que complisquen que estan a 1 dm de distància de dos dels vèrtexs del quadrat exactament. Quants en puc marcar?

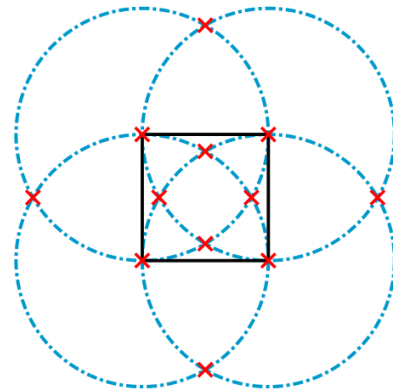


**Solució:**

Tots els punts que estan a una distància d'1 dm d'un dels vèrtexs estan sobre la circumferència centrada en el vèrtex corresponent i amb radi 1 dm.

Si les dibuixem totes, podrem veure on coincideixen dues de les circumferències. Els punts en què es tallen estaran a la distància d'1 dm de dos dels vèrtexs.

Hi ha en total 12 punts.



**15\*\*\***

**16**

Sabent que  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$   
convergeix a un límit finit, calcula'l.



**Solució:**

$$\text{Siga } x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} \rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2 + x$$

Resolem l'equació de segon grau:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Per la qual cosa  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$

## 17 ggb

## 18

Per anar des de la porta de la granja (al punt  $A(0,0)$ ) fins a la del graner (al punt  $B(12,16)$ ), he de rodejar el molí de base circular, l'equació del qual és

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Troba el camí més curt i la longitud.

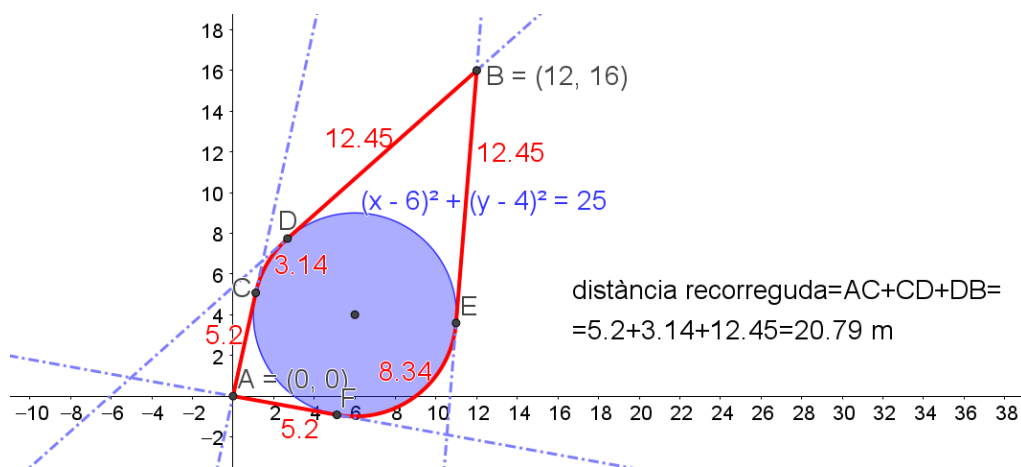


### Solució amb geogebra:

Per començar, introduïrem els punts  $A$  i  $B$  i l'equació de la circumferència.

El camí que caldrà recórrer serà un tram recte des d' $A$  fins a la circumferència, un tros d'arc envoltant la circumferència del molí i un altre tram recte fins a la porta del graner  $B$ .

1. Tracem les rectes tangents a la circumferència que passen per  $A$  i  $B$ .
2. Trobem els punts d'intersecció de les rectes tangents amb la circumferència:  $C, D, E$  i  $F$ .
3. Tracem els segments que uneixen  $A$  i  $B$  amb els quatre punts que acabem de trobar.
4. Trobem el centre de la circumferència.
5. Amb arc de circumferència tracem els arcs que van de  $C$  a  $D$  i d' $E$  a  $F$ .
6. És evident que el camí és més curt per  $CD$ . Calculem la seva longitud sumant els tres trams:  $AC + CD + DB = 20.79$  m.



**20\*\*\*****21**

Calcula el valor de

$$\omega(2026^2) + \omega(-2026^2) + 2026,$$

on  $\omega$  és la funció

$$\omega(\alpha) = \sin \alpha + \alpha^{2029} + \alpha^{2027} - \alpha^{2025}$$

**Solució:**Observem que  $\omega(\alpha)$  és una funció imparella, ja que:

$$\begin{aligned} \omega(-\alpha) &= \sin(-\alpha) + (-\alpha)^{2029} + (-\alpha)^{2027} - (-\alpha)^{2025} = \\ &= -\sin(\alpha) - \alpha^{2029} - \alpha^{2027} + \alpha^{2025} = -\omega(\alpha) \end{aligned}$$

Per tant:

$$\omega(2026^2) + \omega(-2026^2) + 2026 = \omega(2026^2) - \omega(2026^2) + 2026 = 2026$$

**22\*****23**

Acabe de formar un triangle equilàter amb moltes boles de billar. Si en cada costat compta 30 boles, quants punts de contacte hi haurà entre totes les boles que he fet servir?

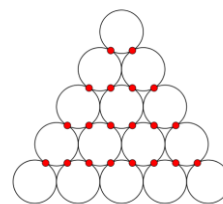
**Solució:**

Tenim un triangle amb 30 files de boles. Excepte les 30 boles de la base, cadascuna de les boles té 2 punts de contacte amb la fila immediatament inferior. Si els comptem fila a fila, tindrem:

Fila número	Número de boles	Punts de contacte amb la fila inferior
1	1	$1 \cdot 2 = 2$
2	2	$2 \cdot 2 = 4$
3	3	$3 \cdot 2 = 6$
.....	.....	...
28	28	$28 \cdot 2 = 56$
29	29	$29 \cdot 2 = 58$

Amb la qual cosa en total serien  $60 \cdot \frac{29}{2} = 870$  punts de contacte.

Tenim comptats els punts que es troben en la mateixa posició que els marcats en roig al dibuix:

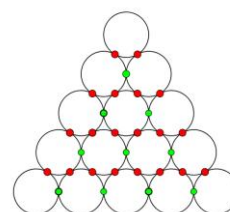


Falta comptar en cada fila els punts de contacte amb les boles de la mateixa fila. Ara és la primera fila la que no té cap punt de contacte.

Fila número	Número de boles	Punts de contacte en la fila
2	2	1
3	3	2
4	4	3
.....	.....	...
28	28	27
29	29	28
30	30	29

Tindrem  $30 \cdot \frac{29}{2} = 435$  punts de contacte.

Ara hem comptat els punts de contacte que són en les posicions verdes:



Finalment, sumem les dues quantitats:

$870 + 435 = 1305$  punts de contacte en total.

**24\*\***

La mitjana de set nombres naturals diferents és 25 i la mediana és 20. Quin és el màxim valor que pot prendre algun dels nombres?

**25**



**Solució:**

El fet que la mediana siga 20 ens indica que, una vegada ordenats els nombres de menor a major, el nombre central és un 20.

El fet que la mitjana siga 25 ens indica que la suma dels set nombres és  $25 \cdot 7 = 175$ .

Perquè un dels nombres siga el més gran possible, cal que els altres siguin el més menuts possible, de manera que els set nombres naturals serien:

1, 2, 3, 20, 21, 22,  $n$

Calculem  $n$  amb la suma de tots:

$$1 + 2 + 3 + 20 + 21 + 22 + n = 175 \rightarrow 69 + n = 175 \rightarrow n = 106$$

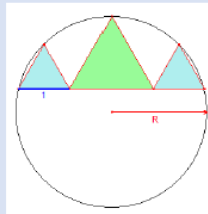
**27 ggb**

**28**

La figura està formada per una circumferència i tres triangles equilàters.

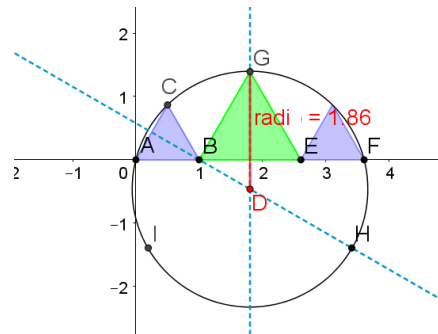
El costat dels dos equilàters menuts és 1 cm.

Calcula el radi de la circumferència.



**Solució amb geogebra:**

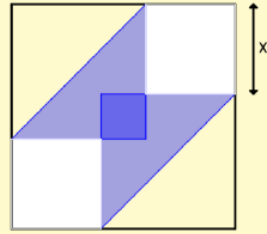
1. Dibuixem un triangle equilàter ABC de costat 1.
2. Tracem la mediatriu del costat AC.
3. El centre de la circumferència està sobre aquesta recta, així que marquem un punt D sobre aquesta.
4. Tracem la recta perpendicular a l'eix d'abscisses que passe per D.
5. Amb simetria sobre aquesta recta traslladem el triangle ABC. Ja tenim els dos triangles menuts.
6. Tracem la circumferència amb centre a D que passe per A.
7. Amb base el segment BE tracem un altre equilàter.
8. Desplacem el punt D fins que el vèrtex superior G del darrer triangle estiga sobre la circumferència.
9. Tracem el segment que uneix D amb G i obtenim que el radi de la circumferència és 1.86 cm.



**29\*\*****30**

Un quadrat de paper d'1 dm de costat es doblega per dos vèrtexs oposats com es veu a la figura, de manera que l'àrea de la zona blava coincideix amb la del tros que queda visible del quadrat inicial.

Calcula  $x$ .



**Solució:**

El tros que queda visible del quadrat inicial són els dos quadrats blancs de costat  $x$ :

$$S_B = 2x^2$$

La zona blava és la formada per dos triangles rectes isòscels amb catets de longitud  $1 - x$  (que junts formen un quadrat de costat  $1 - x$ ) en què hem de descomptar el quadrat que queda doble al centre. La longitud del costat d'aquest serà  $1 - 2x$ . Per tant:

$$S_A = (1 - x)^2 - (1 - 2x)^2$$

Volem calcular  $x$  perquè les dues superfícies coincidisquen:

$$2x^2 = (1 - x)^2 - (1 - 2x)^2 \rightarrow 2x^2 = 2x - 3x^2 \rightarrow 5x^2 - 2x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(5x - 2) = 0 \rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ dm} = 4 \text{ cm}$$

L'altra solució de l'equació,  $x = 0$ , no té sentit, ja que suposaria no haver doblegat el paper.