

PROBLEMAS DEL MES DE MAYO RESUELTOS

1*

Coloca en los círculos de la figura adjunta los números del 1 al 9 de forma que tanto los números que estén sobre la línea horizontal, como los de la línea vertical sumen 27.

2



SOLUCIÓN:

Si sumamos todos los números desde el 1 hasta el 9 obtenemos 45.

Al sumar los números de la línea vertical y los de la horizontal, contaremos dos veces el número que está en el centro de la cruz:

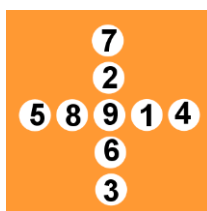
$$27+27=54.$$

De esto deducimos que el número central es $54-45=9$.

A partir de aquí, hay muchas soluciones. Cada línea debe sumar 27 y como ya tenemos un 9, con conseguir dos parejas que sumen 9 tendríamos una solución.

Las parejas que suman 9 son: 1-8, 2-7, 3-6, 4-5.

Por ejemplo:



También podríamos buscar para cada línea una suma de 10 y otra de 8, por ejemplo 5-3 con 6-4 y para la otra 7-1 con 2-8.

4*

Si cinco gatos cazan cinco ratones en cinco minutos, ¿cuántos gatos necesitaremos para cazar cien ratones en cien minutos?

5**SOLUCIÓN:**

El que cinco gatos cacen cinco ratones, nos dice que cada gato caza un ratón en 5 minutos.

En 100 minutos, un gato puede cazar $100:5=20$ ratones.

Para tener 100 ratones, a 20 por gato, necesitaremos $100:20=5$ gatos.

6****7**

Un número natural es *curioso* si no hay otro más pequeño cuyas cifras sumen lo mismo que las suyas. Por ejemplo: 29 es *curioso*, porque es el número más pequeño cuya suma de cifras es 11.
Calcula la suma de todos los números *curiosos* de tres cifras.

**SOLUCIÓN:**

La suma más pequeña que se puede obtener con números de tres cifras es el 1 con el 100, y la mayor el 27 con el 999.

Pero con los números de dos cifras podemos llegar a obtener hasta el 18 con el 99.

Por lo tanto, el número curioso de tres cifras más pequeño será el más pequeño entre los que tengan 19 como suma de sus cifras, es decir, el 199, y el mayor el 999.

En total tendremos:

19 → 199, 20 → 299, 21 → 399, 22 → 499, 23 → 599, 24 → 699, 25 → 799,
26 → 899, 27 → 999

Sumamos $199 + 299 + 399 + \dots + 899 + 999 = \frac{9}{2} \cdot (199 + 999) = \frac{9 \cdot 1998}{2} = 8991$

8 ggb

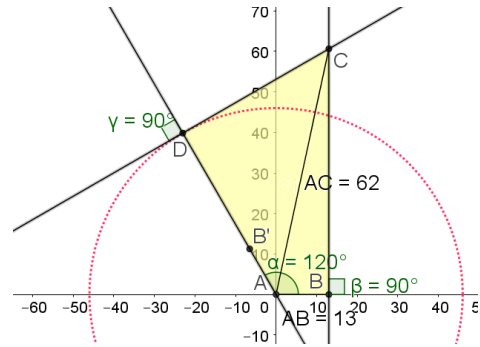
Del cuadrilátero ABCD sabemos que el ángulo en A es de 120° , los ángulos B y D son rectos, AB mide 13 cm y AD 46 cm. ¿Cuánto mide la diagonal AC?

9



SOLUCIÓN:

1. Trazamos el segmento entre $A(0,0)$ y $B(13,0)$.
2. Con ángulo dada su amplitud y los puntos B y A, trazamos el ángulo de 120° en A. Nos da el punto B' . Trazamos la recta por A y B' .
3. Dibujamos la circunferencia centrada en A con radio 46. La intersección con la recta anterior nos da la posición de D.
4. Como los ángulos en B y D son rectos, trazamos las perpendiculares en ambos puntos a los lados AB y AD, que se cortarán en el punto C.
5. Ya podemos dibujar tanto el cuadrilátero como el segmento AC, que medirá 62 cm.



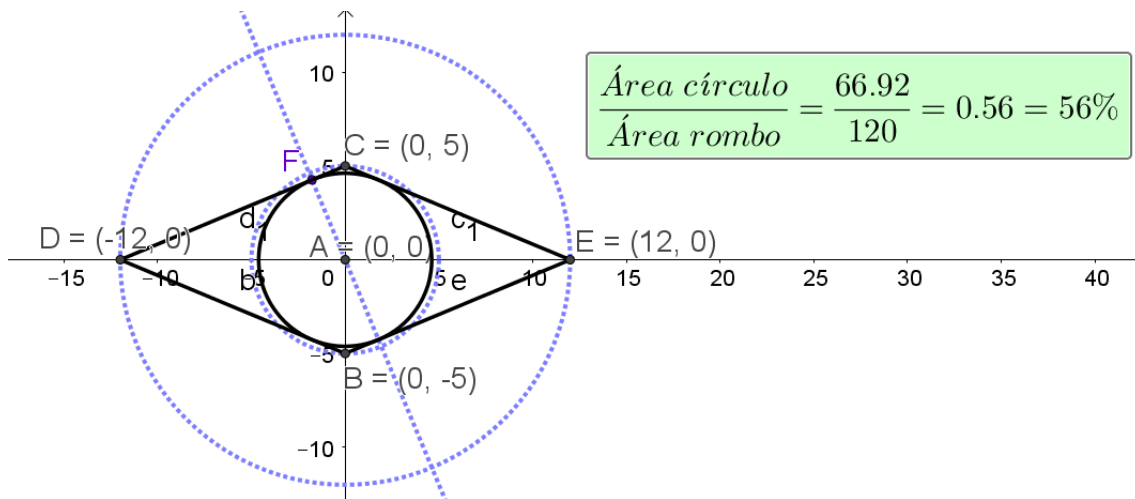
11 ggb**12**

Tenemos un rombo cuyas diagonales miden 10 y 24 cm respectivamente. Inscribimos un círculo en el rombo.

¿Qué parte de la superficie del rombo quedará cubierta por el círculo?



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:



Pasos a seguir:

1. Para trazar el rombo empezamos dibujando dos circunferencias centradas en el punto A(0,0), una con diámetro 10 y la otra 24. Los puntos de intersección de estas circunferencias con los ejes nos darán las coordenadas de los vértices del rombo.
2. Trazamos el rombo con polígono y los cuatro vértices obtenidos. En la vista algebraica ya tenemos la superficie del rombo (c1).
3. La circunferencia estará centrada en A, y dado que los lados del rombo son tangentes a la misma, podemos encontrar un punto de la circunferencia trazando la recta perpendicular a uno de los lados (En la imagen el punto F).
4. Trazamos la circunferencia con centro en A que pase por F.
5. Con área hallamos la superficie que cubre el círculo (a).
6. En la barra de entrada calculamos la relación entre las dos superficies introduciendo $s=a/c1$.
7. Obtenemos que $s=0.56=56\%$.

13*****14**

He cambiado una moneda de 1 € en monedas más pequeñas y me han dado un total de seis monedas. Camino de mi casa me ha caído una en la alcantarilla.
¿Cuál es la probabilidad de que sea de 10 céntimos?

**SOLUCIÓN:**

Veamos primero las posibles formas de sumar 1 € con seis monedas:

- a) 1 € = 50 cts + 10 cts + 10 cts + 10 cts + 10 cts + 10 cts
- b) 1 € = 50 cts + 20 cts + 10 cts + 10 cts + 5 cts + 5 cts
- c) 1 € = 20 cts + 20 cts + 20 cts + 20 cts + 10 cts + 10 cts

En la primera distribución de monedas (la llamaremos A), la probabilidad de elegir una de 10 cts es $P(10/A) = \frac{5}{6}$.

En la segunda (será B) tendremos $P(10/B) = \frac{2}{6}$.

En la tercera y última (C) tendremos $P(10/C) = \frac{2}{6}$.

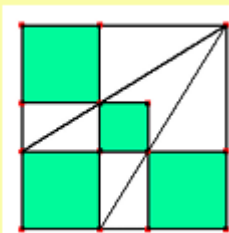
Se supone equiprobables las tres opciones de cambio (A, B y C), por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 P(10) &= P(A) \cdot P(10/A) + P(B) \cdot P(10/B) + P(C) \cdot P(10/C) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

15**

16

Calcula la proporción entre las áreas de la zona sombreada formada por cuatro cuadrados (tres de ellos iguales) y el área del cuadrado exterior.



SOLUCIÓN:

Llamaremos c a la longitud del lado del cuadrado exterior y x a la de los tres cuadrados iguales.

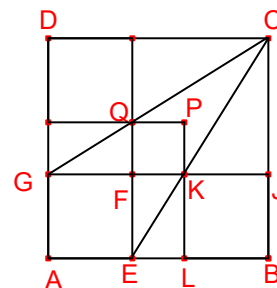
El lado del cuadrado pequeño medirá $c - 2x$.

El área del cuadrado exterior será $A_E = c^2$

El área sombreada será $A_S = 3x^2 + (c - 2x)^2$

Necesitamos relacionar c y x . Para hacerlo usaremos que hay triángulos semejantes.

Usaremos los triángulos GFQ y GJC:



$$\frac{\overline{GJ}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{FQ}} \rightarrow \frac{c}{x} = \frac{c-x}{c-2x} \rightarrow c(c-2x) = x(c-x) \rightarrow c^2 - 2cx = cx - x^2$$

$$x^2 - 3cx + c^2 = 0 \rightarrow x = \frac{3c \pm \sqrt{9c^2 - 4c^2}}{2} = \frac{3c \pm c\sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}c$$

Teniendo en cuenta que $x < c$, la única solución válida es $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}c$

Con esto, el área sombreada será

$$\begin{aligned} A_S &= 3x^2 + (c - 2x)^2 = 7x^2 - 4cx + c^2 = 7\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}c\right)^2 - 4c \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}c + c^2 = \\ &= c^2 \left(7\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) = c^2 \frac{39 - 17\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

La relación entre ambas áreas:

$$\frac{A_S}{A_E} = \frac{c^2 \frac{39 - 17\sqrt{5}}{2}}{c^2} = \frac{39 - 17\sqrt{5}}{2} \cong 0,4934$$

18****19**

Calcula:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2026}}$$

**SOLUCIÓN:**

Racionalizando todas las fracciones:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2026}} \cdot \frac{\sqrt{2026}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2026}-\sqrt{2025}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \dots + \frac{\sqrt{2026}-\sqrt{2025}}{2026-2025} = \\ &= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{2026}-\sqrt{2025} = \\ &= \sqrt{2026}-1 \end{aligned}$$

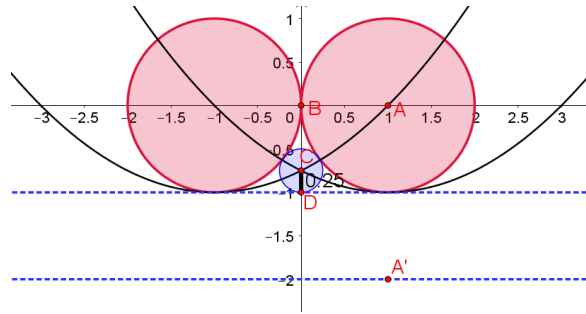
20 ggb

Sobre una mesa tenemos dos bolas de billar que se tocan. Calcula el radio de la bola más grande que pueda pasar entre ellas y la mesa en función del radio R de las bolas de billar.

21**SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:**

Para calcularlo, usaremos que los centros de todas las circunferencias tangentes a una dada que se apoyan sobre una misma recta (en nuestro caso la mesa) tienen sus centros en la parábola que tiene el foco en el centro de la circunferencia inicial y el vértice en el punto de intersección de la circunferencia con la recta sobre la que se apoya. Al ser tangente la circunferencia que buscamos a otras dos, su centro estará en el punto de intersección de las dos parábolas.

1. Trazamos la circunferencia con centro en $A(1,0)$ y radio 1.
2. Hallamos la simétrica respecto al eje de ordenadas.
3. Trazamos las rectas tangentes a las dos circunferencias, ocultando las que no corresponden a la mesa.
4. Hallamos el punto simétrico de A respecto a la recta de la mesa. La recta que pase por el y sea paralela a la mesa será la directriz de la parábola.
5. Para la otra parábola, basta hacer una simetría respecto al eje de ordenadas de la que ya tenemos.
6. Hallamos C como el punto de intersección de las dos parábolas. Será el centro de la circunferencia pequeña.
7. D será la intersección del eje de ordenadas con la recta de la mesa.
8. Trazamos la circunferencia.
9. Para medir el radio, dibujamos el segmento CD. Obtenemos que mide 0.25.
10. Como hemos asignado un radio 1 a las bolas, el radio de la pequeña es la cuarta parte del de las grandes.



Si las bolas de billar tienen un radio R , la pequeña tendrá un radio $R/4$.

22*

- a) Calcula todos los números ab de dos cifras que cumplan que a , b y ab son primos.
- b) Calcula todos los números abc de tres cifras que cumplan que a , b , c , ab , bc y abc son primos.

23



SOLUCIÓN:

Los números primos de una cifra son 2, 3, 5 y 7. Serán las posibles opciones para a y b .

- a) Para los números de dos cifras, no podemos repetir valores, porque el número sería múltiplo de 11.

Al unir dos, los números que son primos son **23, 37, 53 y 73**.

El resto de las opciones no da un número primo: $25=5 \cdot 5$, $27=3 \cdot 9$, $32=4 \cdot 8$, $35=5 \cdot 7$, $52=2 \cdot 26$, $57=3 \cdot 19$, $72=8 \cdot 9$, $75=5 \cdot 15$.

b) Para los números de tres cifras unimos dos de dos cifras. Las opciones posibles son:

237, 537, 373 y 737. Comprobamos si son primos:

737=11·67 no lo es.

237=3·79 tampoco.

537=3·179 tampoco.

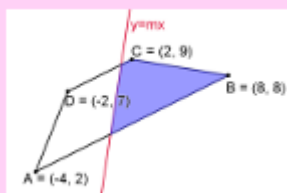
373 es el único primo.

25***

26

La figura está formada por un trapecio de vértices A(-4,2), B(8,8), C(2,9) y D(-2,7) y la recta $y=mx$ que lo divide en dos partes de igual área.

Calcula el valor de m.



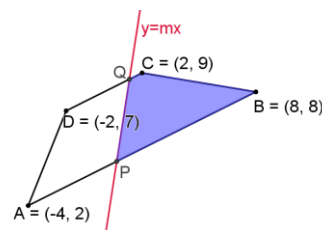
SOLUCIÓN:

1. Calculamos el área del trapecio:

$$S_{ABCD} = \frac{B + b}{2} \cdot a$$

$$B = d(A, B) = \sqrt{(8 + 4)^2 + (8 - 2)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$b = d(C, D) = \sqrt{(2 + 2)^2 + (9 - 7)^2} = 2\sqrt{5}$$



$$r_{AB} \equiv \frac{x - 8}{8 + 4} = \frac{y - 8}{8 - 2} \rightarrow r_{AB} \equiv x - 2y + 8 = 0$$

$$a = d(C, r_{AB}) = \frac{|2 - 2 \cdot 9 + 8|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{B + b}{2} \cdot a = \frac{6\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = 32 u^2$$

2. Calculamos el valor de m para que $S_{PBCQ} = \frac{S_{ABCD}}{2} = 16 u^2$

Al estar P y Q en la recta $y = mx$ sus coordenadas son (x, mx)

$$P \in r_{AB} \rightarrow x - 2mx + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{8}{2m - 1} \rightarrow P\left(\frac{8}{2m - 1}, \frac{8m}{2m - 1}\right)$$

$Q \in r_{CD}$, calculamos la ecuación de la recta:

$$r_{CD} \equiv \frac{x - 2}{2 + 2} = \frac{y - 9}{9 - 7} \rightarrow r_{CD} \equiv x - 2y + 16 = 0$$

$$Q \in r_{CD} \rightarrow x - 2mx + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{16}{2m-1} \rightarrow Q\left(\frac{16}{2m-1}, \frac{16m}{2m-1}\right)$$

$$B = d(B, P) = \sqrt{\left(8 - \frac{8}{2m-1}\right)^2 + \left(8 - \frac{8m}{2m-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{(16m-16)^2 + (8m-8)^2}}{2m-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^2(8m-8)^2 + (8m-8)^2}}{2m-1} = \frac{8m-8}{2m-1}\sqrt{5}$$

$$b = d(C, Q) = \sqrt{\left(2 - \frac{16}{2m-1}\right)^2 + \left(9 - \frac{16m}{2m-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{(4m-18)^2 + (2m-9)^2}}{2m-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^2(2m-9)^2 + (2m-9)^2}}{2m-1} = \frac{2m-9}{2m-1}\sqrt{5}$$

$$S_{PBCQ} = \frac{1}{2} \cdot (B + b) \cdot a = \frac{1}{2} \left(\frac{8m-8}{2m-1}\sqrt{5} + \frac{2m-9}{2m-1}\sqrt{5} \right) \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{4}{2m-1} (10m-17)$$

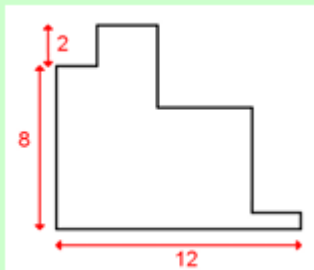
Buscamos m para que se cumpla que $S_{PBCQ} = 16$:

$$\frac{4}{2m-1} (10m-17) = 16 \rightarrow 40m-68 = 32m-16 \rightarrow m = \frac{52}{8} = \frac{13}{2}$$

27*

28

Calcula el perímetro del polígono de la imagen, del que conocemos las longitudes de tres de sus lados: 2 cm, 8 cm los verticales y 12 cm el horizontal.



SOLUCIÓN:

Si miramos desde arriba, los cuatro segmentos que veremos juntos deben sumar los mismos 12 cm que hay en la base.

De la misma forma, mirando desde la derecha, sumarán lo mismo que si miramos desde la izquierda, es decir, 8+2=10 cm.

El perímetro del polígono será:

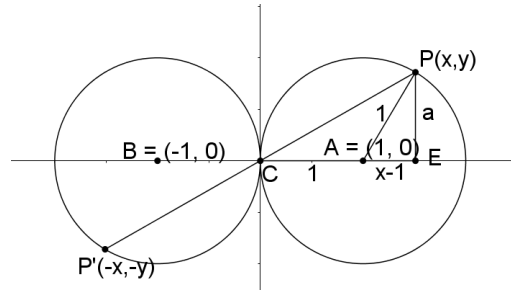
$$P = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 10 = 44 \text{ cm.}$$

29****30**

Se construyen las circunferencias de radio 1 cm centradas en $A(1,0)$ y $B(-1,0)$. Se escoge en la primera de ellas un punto $P(x,y)$ y se busca el punto P' simétrico respecto al origen de coordenadas. Construimos el segmento PP' . Halla su longitud en función de x .

**SOLUCIÓN:**

Al representar el dibujo vemos dos triángulos rectángulos uno con vértices AEP y el otro con vértices CEP. Aplicamos Pitágoras en ambos y obtenemos:



$$\begin{cases} \overline{CP}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{PE}^2 \\ \overline{AP}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{PE}^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overline{CP}^2 = x^2 + a^2 \\ 1^2 = (x-1)^2 + a^2 \end{cases} \rightarrow \overline{CP}^2 - 1 = x^2 - (x-1)^2$$

$$\overline{CP}^2 = x^2 - (x^2 - 2x + 1) + 1 \rightarrow \overline{CP}^2 = 2x \rightarrow \overline{CP} = \sqrt{2x}$$

La longitud del segmento $\overline{PP'} = 2 \cdot \overline{CP} = 2\sqrt{2x}$