

SOLUCIONS – MAIG 2026

1*

Col·loqueu en els cercles de la figura adjunta els números de l'1 al 9, de manera que tant els números que estiguen sobre la línia horitzontal com els de la línia vertical sumen 27.

2



SOLUCIÓ:

Si sumem tots els números des de l'1 fins al 9 obtenim 45.

En sumar els números de la línia vertical i els de l'horitzontal, comptarem dues vegades el número que està en el centre de la creu:

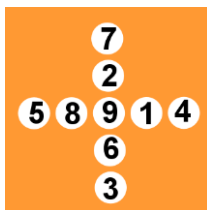
$$27 + 27 = 54.$$

D'això deduïm que el número central és $54 - 45 = 9$.

A partir d'ací hi ha moltes solucions. Cada línia ha de sumar 27 i, com ja tenim un 9, amb aconseguir dues parelles que sumen 9 tindriem una solució.

Les parelles que sumen 9 són: 1-8, 2-7, 3-6, 4-5.

Per exemple:



També podríem buscar per a cada línia una suma de 10 i una altra de 8, per exemple 5-3 amb 6-4 i, per a l'altra, 7-1 amb 2-8.

4*

Si cinc gats cacen cinc ratolins en cinc minuts, quants gats necessitarem per caçar cent ratolins en cent minuts?

5**SOLUCIÓ:**

El fet que cinc gats cacen cinc ratolins en 5 minuts ens diu que cada gat caça un ratolí en 5 minuts.

En 100 minuts, un gat pot caçar $100 : 5 = 20$ ratolins.

Per tindre 100 ratolins, a 20 per gat, necessitarem $100 : 20 = 5$ gats.

6****7**

Un nombre natural és **curiós** si no n'hi ha un altre més menut les xifres del qual sumen el mateix que les seues. Per exemple: 29 és **curiós**, perquè és el nombre més menut la suma de xifres del qual és 11.

Calculeu la suma de tots els nombres **curiosos** de tres xifres.

**SOLUCIÓ:**

La suma més menuda que es pot obtenir amb nombres de tres xifres és l'1 amb el 100; i, la més gran, el 27 amb el 999.

Però amb els nombres de dues xifres podem arribar a obtenir fins al 18 amb el 99.

Per tant, el nombre **curiós** de tres xifres més menut serà el menor dels que tinguen 19 com a suma de les seues xifres, és a dir, el 199, i el més gran el 999.

En total tindrem:

19 → 199, 20 → 299, 21 → 399, 22 → 499, 23 → 599, 24 → 699, 25 → 799,

26 → 899, 27 → 999

Sumem: $199 + 299 + 399 + \dots + 899 + 999 = \frac{9}{2} \cdot (199 + 999) = \frac{9 \cdot 1998}{2} = 8991$

8 ggb

9

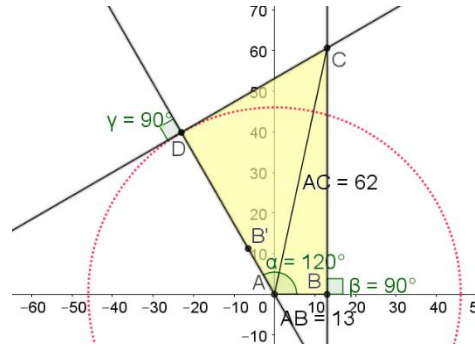
Del quadrilàter $ABCD$ sabem que l'angle A és de 120° , els angles B i D són rectes, AB mesura 13 cm i AD 46 cm.

Què mesura la diagonal AC ?



SOLUCIÓ:

1. Tracem el segment entre $A(0,0)$ i $B(13,0)$.
2. Amb angle donada la seva amplitud i els punts B i A , tracem l'angle de 120° a A . Ens dona el punt B' . Tracem la recta per A i B' .
3. Dibuixem la circumferència centrada a A amb radi 46. La intersecció amb la recta anterior ens dona la posició de D .
4. Com que els angles en B i D són rectes, tracem les perpendiculars en ambdós punts als costats AB i AD , que es tallaran en el punt C .
5. Ja podem dibuixar tant el quadrilàter com el segment AC , que mesurarà 62 cm.

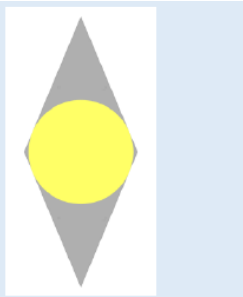


11 ggb**12**

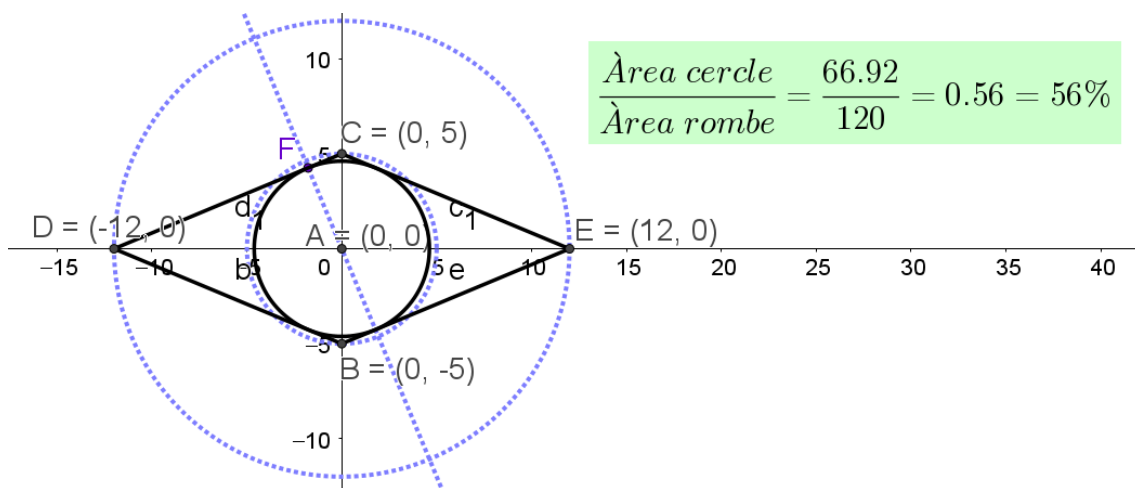
Tenim un rombe les diagonals del qual mesuren 10 cm i 24 cm.

Inscrivim un cercle en el rombe.

Quina part de la superfície del rombe quedarà coberta pel cercle?



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:



Passos a seguir:

1. Per traçar el rombe comencem dibuixant dues circumferències centrades al punt $A(0,0)$, una amb diàmetre 10 i l'altra 24. Els punts d'intersecció d'aquestes circumferències amb els eixos ens donaran les coordenades dels vèrtexs del rombe.
2. Tracem el rombe amb polígon i els quatre vèrtexs obtinguts. A la vista algebraica ja tenim la superfície del rombe (c1).
3. La circumferència estarà centrada en A i, atès que els costats del rombe en són tangents, podem trobar un punt de la circumferència traçant la recta perpendicular a un dels costats (en la imatge el punt F).
4. Tracem la circumferència amb centre a A que passe per F.
5. Amb àrea trobem la superfície que cobreix el cercle (a).
6. En la barra d'entrada calculem la relació entre les dues superfícies introduint $s=a/c1$.
7. Obtenim que $s=0.56=56\%$.

13*****14**

He canviat una moneda d'1 € en monedes més menudes i m'han donat un total de sis monedes.

Camí de ma casa m'ha caigut una a la claveguera. Quina és la probabilitat que siga de 10 cèntims?

**SOLUCIÓ:**

Vegem primer les possibles formes de sumar 1 € amb sis monedes:

- a) 1 € = 50 cts + 10 cts + 10 cts + 10 cts + 10 cts + 10 cts
- b) 1 € = 50 cts + 20 cts + 10 cts + 10 cts + 5 cts + 5 cts
- c) 1 € = 20 cts + 20 cts + 20 cts + 20 cts + 10 cts + 10 cts

En la primera distribució de monedes (l'anomenarem A), la probabilitat d'escollir una de 10 cts és $P(10/A) = \frac{5}{6}$.

En la segona (B) tindrem $P(10/B) = \frac{2}{6}$.

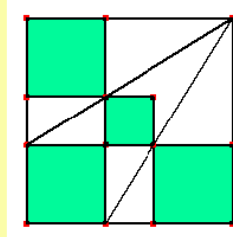
En la tercera i última (C) tindrem $P(10/C) = \frac{2}{6}$.

Se suposa que les tres opcions de canvi (A, B i C) són equiprobables. Per tant:

$$\begin{aligned}
 P(10) &= P(A) \cdot P(10/A) + P(B) \cdot P(10/B) + P(C) \cdot P(10/C) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

15****16**

Calculeu la proporció entre les àrees de la zona ombrejada, formada per quatre quadrats (tres iguals i un altre més menut), i l'àrea del quadrat exterior.

**SOLUCIÓ:**

Anomenarem c a la longitud del costat del quadrat exterior i x a la dels tres quadrats iguals.

El costat del quadrat menut mesurarà $c - 2x$.

L'àrea del quadrat exterior serà $A_E = c^2$

L'àrea ombrejada serà $A_S = 3x^2 + (c - 2x)^2$

Necessitem relacionar c i x . Per fer-ho farem servir que hi ha triangles semblants.

Utilitzarem els triangles GFQ i GJC:

$$\frac{\overline{GJ}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{FQ}} \rightarrow \frac{c}{x} = \frac{c - x}{c - 2x} \rightarrow c(c - 2x) = x(c - x) \rightarrow c^2 - 2cx = cx - x^2$$

$$x^2 - 3cx + c^2 = 0 \rightarrow x = \frac{3c \pm \sqrt{9c^2 - 4c^2}}{2} = \frac{3c \pm c\sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}c$$

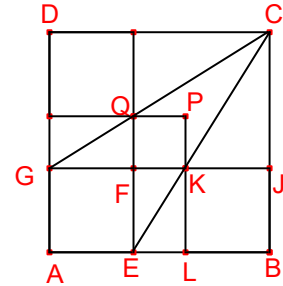
Tenint en compte que $x < c$, l'única solució vàlida és $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}c$

Amb això, l'àrea ombrejada serà:

$$\begin{aligned} A_S &= 3x^2 + (c - 2x)^2 = 7x^2 - 4cx + c^2 = 7\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}c\right)^2 - 4c \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2}c + c^2 = \\ &= c^2 \left(7\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + 1 \right) = c^2 \frac{39 - 17\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

La relació entre ambdues àrees és:

$$\frac{A_S}{A_E} = \frac{c^2 \frac{39 - 17\sqrt{5}}{2}}{c^2} = \frac{39 - 17\sqrt{5}}{2} \cong 0,4934$$

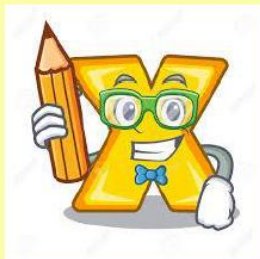


18**

19

Calculeu:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2026}}$$

**SOLUCIÓ:**

Racionalitzant totes les fraccions:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2026}} \cdot \frac{\sqrt{2026}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2026}-\sqrt{2025}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \dots + \frac{\sqrt{2026}-\sqrt{2025}}{2026-2025} = \\ &= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{2026}-\sqrt{2025} = \\ &= \sqrt{2026}-1 \end{aligned}$$

20 ggb

Sobre una taula hi ha dues boles de billar que es toquen.

Calculeu el radi de la bola més gran que pot passar entre elles i la taula en funció del radi R de les boles de billar.

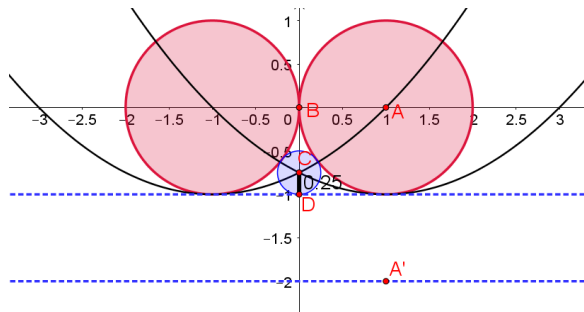
21



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Per calcular-ho, farem servir que els centres de totes les circumferències tangents a una donada que es recolzen sobre una mateixa recta (en el nostre cas la taula) tenen els seus centres en la paràbola que té el focus al centre de la circumferència inicial i el vèrtex al punt d'intersecció de la circumferència amb la recta sobre la qual es recolza. En ser tangent la circumferència que busquem a dues més, el seu centre estarà al punt d'intersecció de les dues paràboles.

1. Tracem la circumferència amb centre a $A(1,0)$ i radi 1.
2. Trobem la simètrica respecte de l'eix d'ordenades.
3. Tracem les rectes tangents a les dues circumferències, ocultant les que no corresponen a la taula.
4. Trobem el punt simètric d' A respecte a la recta de la taula. La recta que passe per ell i siga paral·lela a la taula serà la directriu de la paràbola.
5. Per a l'altra paràbola, només cal fer una simetria respecte a l'eix d'ordenades de la que ja tenim.
6. Trobem C com a punt d'intersecció de les dues paràboles. Serà el centre de la circumferència menuda.
7. D serà la intersecció de l'eix d'ordenades amb la recta de la taula.
8. Tracem la circumferència.
9. Per mesurar el radi, dibuixem el segment CD . Obtenim que mesura 0.25.
10. Com hem assignat un radi 1 a les boles, el radi de la menuda és la quarta part del de les grans.



Si les boles de billar tenen un radi R , la menuda tindrà un radi $R/4$.

22***23**

- a) Calculeu tots els nombres ab de dues xifres que compleixen que a , b i ab són primers.
- b) Calculeu tots els nombres abc de tres xifres que compleixen que a , b , c , ab , bc i abc són primers.

**SOLUCIÓ:**

Els nombres primers d'una xifra són 2, 3, 5 i 7. Seran les possibles opcions per a a i b .

- a) Per als nombres de dues xifres no podem repetir valors, perquè el nombre seria múltiple d'11.

En unir-ne dos, els nombres que són primers són: **23, 37, 53 i 73**.

La resta de les opcions no dona un nombre primer: $25=5 \cdot 5$, $27=3 \cdot 9$, $32=4 \cdot 8$, $35=5 \cdot 7$, $52=2 \cdot 26$, $57=3 \cdot 19$, $72=8 \cdot 9$, $75=5 \cdot 15$.

- b) Per als nombres de tres xifres n'unim dos de dues xifres. Les opcions possibles són: 237, 537, 373 i 737.

Comprovem si són primers:

$737=11 \cdot 67$ no ho és.

$237=3 \cdot 79$ tampoc.

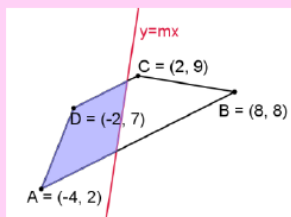
$537=3 \cdot 179$ tampoc.

373 és l'únic primer.

25*****26**

La figura està formada per un trapezi de vèrtexs $A(-4,2)$, $B(8,8)$, $C(2,9)$, $D(-2,7)$, i la recta $y = mx$ que el divideix en dues parts d'igual àrea.

Calculeu el valor de m .

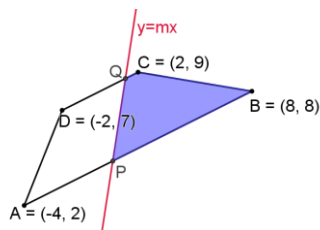
**SOLUCIÓ:**

1. Calculem l'àrea del trapezi:

$$S_{ABCD} = \frac{B + b}{2} \cdot a$$

$$B = d(A, B) = \sqrt{(8 + 4)^2 + (8 - 2)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$b = d(C, D) = \sqrt{(2 + 2)^2 + (9 - 7)^2} = 2\sqrt{5}$$



$$r_{AB} \equiv \frac{x-8}{8+4} = \frac{y-8}{8-2} \rightarrow r_{AB} \equiv x-2y+8=0$$

$$a = d(C, r_{AB}) = \frac{|2-2 \cdot 9+8|}{\sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{B+b}{2} \cdot a = \frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = 32 u^2$$

$$2. \text{ Calculem el valor de } m \text{ perquè } S_{PBCQ} = \frac{S_{ABCD}}{2} = 16 u^2$$

Com P i Q estan en la recta $y = mx$, les coordenades són (x, mx)

$$P \in r_{AB} \rightarrow x-2mx+8=0 \rightarrow x = \frac{8}{2m-1} \rightarrow P\left(\frac{8}{2m-1}, \frac{8m}{2m-1}\right)$$

$Q \in r_{CD}$, calculem l'equació de la recta:

$$r_{CD} \equiv \frac{x-2}{2+2} = \frac{y-9}{9-7} \rightarrow r_{CD} \equiv x-2y+16=0$$

$$Q \in r_{CD} \rightarrow x-2mx+16=0 \rightarrow x = \frac{16}{2m-1} \rightarrow Q\left(\frac{16}{2m-1}, \frac{16m}{2m-1}\right)$$

$$\begin{aligned} B = d(B, P) &= \sqrt{\left(8 - \frac{8}{2m-1}\right)^2 + \left(8 - \frac{8m}{2m-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{(16m-16)^2 + (8m-8)^2}}{2m-1} = \\ &= \frac{\sqrt{2^2(8m-8)^2 + (8m-8)^2}}{2m-1} = \frac{8m-8}{2m-1} \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = d(C, Q) &= \sqrt{\left(2 - \frac{16}{2m-1}\right)^2 + \left(9 - \frac{16m}{2m-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{(4m-18)^2 + (2m-9)^2}}{2m-1} = \\ &= \frac{\sqrt{2^2(2m-9)^2 + (2m-9)^2}}{2m-1} = \frac{2m-9}{2m-1} \sqrt{5} \end{aligned}$$

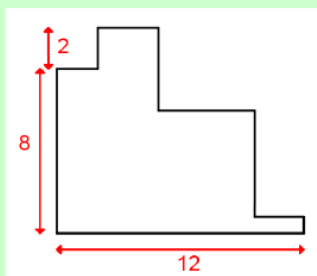
$$S_{PBCQ} = \frac{1}{2} \cdot (B+b) \cdot a = \frac{1}{2} \left(\frac{8m-8}{2m-1} \sqrt{5} + \frac{2m-9}{2m-1} \sqrt{5} \right) \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{4}{2m-1} (10m-17)$$

Busquem m perquè es complisca que $S_{PBCQ} = 16$:

$$\frac{4}{2m-1} (10m-17) = 16 \rightarrow 40m-68 = 32m-16 \rightarrow m = \frac{52}{8} = \frac{13}{2}$$

27***28**

Calculeu el perímetre del polígon de la imatge, del qual coneixem les longituds de tres dels costats: 2 cm, 8 cm els verticals i 12 cm l'horitzontal.

**SOLUCIÓ:**

Si mirem des de dalt, els quatre segments superiors junts han de sumar els mateixos 12 cm que hi ha a la base.

De la mateixa manera, mirant des de la dreta, sumaran el mateix que si mirem des de l'esquerra, és a dir, $8+2=10$ cm.

El perímetre del polígon serà:

$$P=2 \cdot 12+2 \cdot 10=44 \text{ cm.}$$

29****30**

Es construeixen les circumferències de radi 1 cm centrades en $A(1,0)$ i $B(-1,0)$. S'escull en la primera un punt $P(x,y)$ i es busca el punt P' simètric respecte a l'origen de coordenades. Construïm el segment PP' . Calculeu la longitud en funció de x .

**SOLUCIÓ:**

En representar el dibuix veiem dos triangles rectangles: un amb vèrtexs AEP i l'altre amb vèrtexs CEP.

Apliquem el teorema de Pitàgores a tots dos i obtenim:

$$\begin{cases} \overline{CP}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{PE}^2 \\ \overline{AP}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{PE}^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overline{CP}^2 = x^2 + a^2 \\ 1^2 = (x-1)^2 + a^2 \end{cases} \rightarrow \overline{CP}^2 - 1 = x^2 - (x-1)^2$$

$$\overline{CP}^2 = x^2 - (x^2 - 2x + 1) + 1 \rightarrow \overline{CP}^2 = 2x \rightarrow \overline{CP} = \sqrt{2x}$$

La longitud del segment és: $\overline{PP'} = 2 \cdot \overline{CP} = 2\sqrt{2x}$

