

SOLUCIONES – JUNIO 2026

1*

2

Tenemos 10 sacos con monedas de oro, pero uno de ellos contiene monedas falsas. La única diferencia es que las monedas falsas pesan 9 g y las buenas 10 g. ¿Cómo se puede saber con una balanza de precisión y en una sola pesada cuál es el saco que contiene las monedas falsas?



Solución:

Numeramos los diez sacos. Tomamos de cada saco tantas monedas como indica el número que hemos asignado al saco (una del saco 1, dos del saco 2, ...) y las pesamos.

Si no hubiera monedas falsas, como todas las buenas pesan 10 g y tenemos en total $1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 = 55$ monedas, pesarían 550 g, pero como de un saco hemos sacado monedas de 9 g, el peso total será menor, tantos gramos como monedas falsas hayamos pesado. Este número nos dará el saco con monedas falsas.

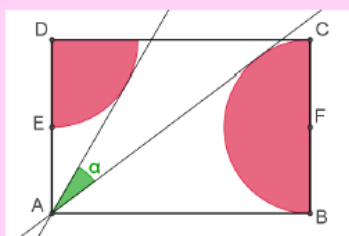
Por ejemplo, si al pesar todas hemos obtenido un peso total de 547 g, al faltar 3 g para los 550 que deberían pesar, el saco que contiene las falsas será el número 3.

3***

4

En la figura, E y F son los puntos medios de los lados. Se cumple que $2AB = 3BC$.

Desde A trazamos las rectas tangentes a los dos arcos de circunferencia. Halla la amplitud α del ángulo entre ambas rectas.



Solución:

Marcamos los puntos de contacto H y J de las rectas tangentes con los arcos. Con ellos tenemos dos triángulos rectángulos AHD y AFJ. Por ser E el punto medio de AD, podemos afirmar que $\sin \beta = \frac{DH}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = 30^\circ$

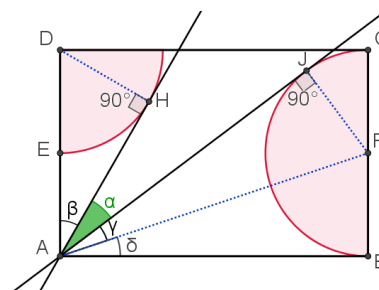
Los ángulos γ y δ son iguales por ser AF la bisectriz del ángulo $\widehat{BAJ}$.

En el triángulo ABF tendremos:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{BF}{AB} = \frac{1}{3} \rightarrow \delta = 18^\circ 26' 6''$$

El ángulo que buscamos:

$$\alpha = 90^\circ - \beta - 2\delta = 23^\circ 7' 48''$$



5****6**

Tengo que comprar exactamente 24 juguetes con 300 €. Los precios por unidad son 40 € los juegos de mesa, 10 € los coches y 5 € las pelotas. ¿Cómo puedo hacerlo si he de llevar al menos uno de cada uno de los tres tipos de juguetes y no debe sobrar dinero?



Solución:

Llamaremos x a la cantidad de juegos de mesa comprados, y a la de coches y z a la de pelotas.

En total debemos comprar 24 juguetes, por lo que $x + y + z = 24$.

Debemos gastar 300 €, de donde $40x + 10y + 5z = 300$. Simplificando por 5 nos queda $8x + 2y + z = 60$.

Además, como debemos comprar de los tres tipos de juguetes, ninguna de las cantidades puede ser nula.

Si restamos las dos ecuaciones obtenemos $7x + y = 36 \rightarrow y = 36 - 7x$ (de donde deducimos que x no puede ser mayor que 5).

Veamos las posibles opciones

x	5	4	3	2	1
$y = 36 - 7x$	1	8	15	22	29
$z = 24 - (x + y)$	18	12	6	0	-6

Tendremos tres formas de hacerlo correspondientes a las tres primeras columnas, ya que los resultados obtenidos en las dos últimas para z no son válidos:

Opción 1: 5 juegos de mesa, 1 coche y 18 pelotas.

Opción 2: 4 juegos de mesa, 8 coches y 12 pelotas.

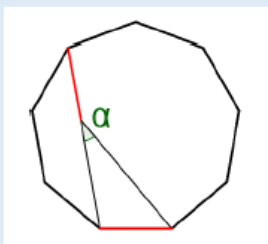
Opción 3: 3 juegos de mesa, 15 coches y 6 pelotas.

8 ggb

9

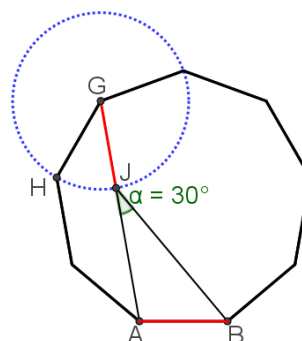
La figura está formada por un polígono regular de nueve lados y dos segmentos que tienen la misma longitud (en rojo en la figura).

Calcula la medida del ángulo α entre los dos segmentos.



Solución con geogebra:

1. Sobre el segmento AB con polígono regular de 9 vértices dibujamos el polígono.
2. Trazamos el segmento entre A y G .
3. Para hallar J , como GJ debe medir lo mismo que un lado del polígono, trazamos la circunferencia centrada en G que pase por H . El punto de intersección de la circunferencia con el segmento AG será el punto J .
4. Trazamos el segmento BJ .
5. Medimos el ángulo con  y obtenemos que mide 30° .



Solución analítica:

Calculamos la amplitud del ángulo de un vértice del polígono:

El ángulo central será $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$, por lo que el ángulo en un vértice cualquiera medirá

$$180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

Los cuatro ángulos del polígono $AGHI$ sumarán 360° , de donde deducimos que $\widehat{H\hat{G}J} = 40^\circ$

Por lo que $\widehat{F\hat{G}J} = 100^\circ$.

Trazamos un triángulo equilátero de base AB .

Con centro en el vértice superior M del triángulo, trazamos la circunferencia que pase por A .

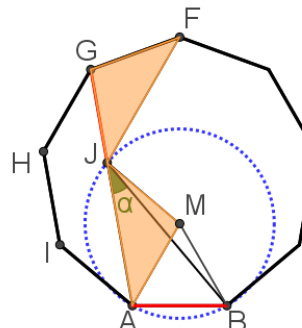
Comparamos los dos triángulos:

En ambos hay dos lados que coinciden con la longitud de un lado del polígono.

El ángulo $\widehat{J\hat{A}M} = \widehat{B\hat{A}I} - \widehat{J\hat{A}I} - \widehat{M\hat{A}B} = 140^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, por lo que todos los ángulos coinciden al ser los dos isósceles.

Calculamos $\widehat{B\hat{M}J} = \widehat{J\hat{M}A} + 60^\circ = 100^\circ + 60^\circ = 160^\circ \rightarrow \widehat{B\hat{J}M} = 10^\circ$

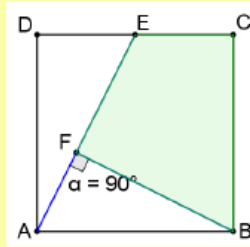
$$\alpha = \widehat{J\hat{A}M} - \widehat{B\hat{J}M} = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$$



10****11**

El cuadrado ABCD tiene 2 cm de lado.
El punto E es el punto medio del segmento DC, y F el punto de intersección del segmento perpendicular al AE por el punto B.

Calcula la superficie del cuadrilátero BCEF.



Solución:

Calcularemos la superficie del cuadrilátero restando a la del cuadrado las de los dos triángulos.

a) $S_{ABCD} = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$

b) $S_{ADE} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 1 \text{ cm}^2$

c) Para calcular la superficie del otro triángulo usaremos que los dos triángulos son semejantes por tener iguales los tres ángulos.

Las medidas que conocemos son: $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$ y $\overline{DE} = 1$.

Calculamos $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

Por semejanza se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AD}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{AF}}{1} = \frac{\overline{BF}}{2}$$

La superficie del triángulo ABF será

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{BF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ cm}^2$$

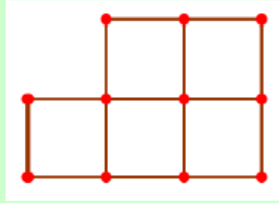
d) La superficie que buscamos será

$$S_{BCEF} = S_{ABCD} - S_{ADE} - S_{ABF} = 4 - 1 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5} = 2.2 \text{ cm}^2$$

12***13**

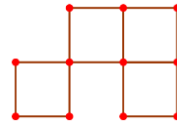
Coloca 15 cerillas como en la figura, y:

- Quita 1 para obtener 4 cuadrados.
- Quita 2 para obtener 4 cuadrados.
- Quita 3 para obtener 3 cuadrados.
- Quita 4 para obtener 2 cuadrados.
- Quita 4 para obtener 3 cuadrados.
- Quita 4 para obtener 2 rectángulos.

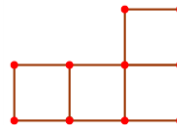


Solución:

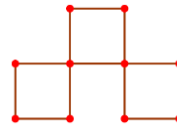
Quita 1 para obtener 4 cuadrados



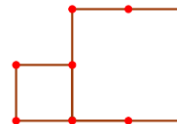
Quita 2 para obtener 4 cuadrados



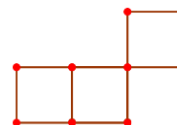
Quita 3 para obtener 3 cuadrados



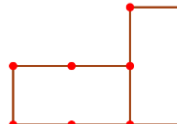
Quita 4 para obtener 2 cuadrados



Quita 4 para obtener 3 cuadrados



Quita 4 para obtener 2 rectángulos



15***16**

Un número primo es *permutable* si cualquier permutación de sus cifras también es número primo.

Encuentra todos los números primos *permutables* de dos y de tres cifras.



Solución:

Buscamos el listado de los números primos menores que 1000:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

a) Números primos *permutables* de dos cifras:

Buscamos números de dos cifras *ab* que sean primos y además también lo sea *ba*.

Los números primos de dos cifras nunca acaban en cifra par (serían divisibles por 2) ni en 5 (serían divisibles por 5). Los que buscamos tampoco podrán empezar por esos números para que al invertir el orden de las cifras el número siga siendo primo. Estos números son:

11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97.

b) Números primos *permutables* de tres cifras:

Ahora deben ser primos *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*.

Igual que antes, los números solo pueden estar formados por las cifras 1, 3, 7 y 9. Los números posibles serían:

113, 131, 137, 139, 173, 179, 191, 193, 197, 199, 311, 313, 317, 337, 373, 379, 397, 719, 733, 739, 773, 797, 919, 937, 971, 977, 991, 997.

Marcamos con color los números que lo cumplen (en el mismo color las permutaciones).

Los números que buscamos serán:

11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991.

17 ggb

18

Tres circunferencias son tangentes a una misma recta y tangentes exteriores dos a dos.

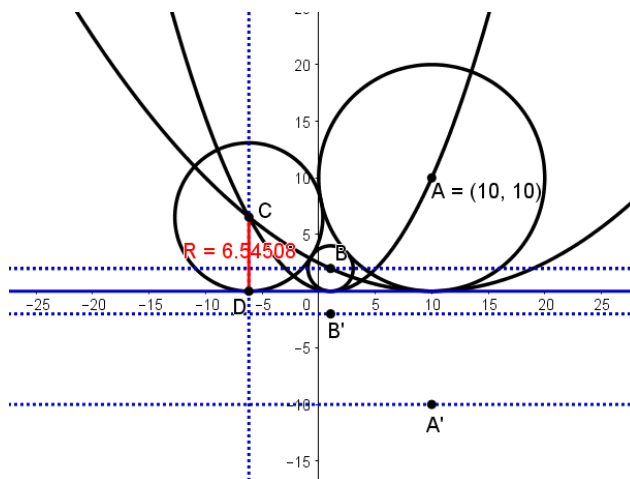
Determina la longitud del radio de la mediana si los otros radios miden respectivamente 2 y 10 cm.



Solución:

Para hacer el dibujo tendremos en cuenta que si queremos dibujar circunferencias tangentes a una dada de forma que ambas sean también tangentes a una misma recta todos los centros de las nuevas se encontrarán sobre la parábola de foco el centro de la circunferencia inicial y vértice en el punto de contacto de la circunferencia con la recta.

1. Dibujamos la circunferencia centrada en $A(10,10)$ de radio 10. Se apoya en el eje de abscisas.
2. Dibujamos la parábola, para lo que necesitamos la directriz: Hallamos A' punto simétrico de A respecto al eje de abscisas y después la recta paralela a OX por A' que será la directriz.
3. La circunferencia pequeña tiene un radio de 2. Si trazamos la recta $y=2$, la intersección con la parábola nos dará el centro B de la circunferencia pequeña. La dibujamos con centro en B y radio 2.
4. Repetimos el proceso del paso 2 ahora con la circunferencia pequeña para obtener la parábola con foco en B .
5. El centro C de la tercera circunferencia debe estar en las dos parábolas, ya que es tangente a ambas circunferencias, es decir, en la intersección de ambas.
6. Trazamos la recta perpendicular al eje OX por el punto C para hallar el punto D y poder medir el radio con el segmento que une C y D . Obtenemos que mide 6,54508.



19****20**

En una pizarra están escritos los números del 1 al 2026. Cada minuto se borran dos cualesquiera a y b y se sustituyen por $a + 2$ y por $b - 3$.

Justifica que al cabo de un tiempo aparecerá en la pizarra un número negativo.

**Solución:**

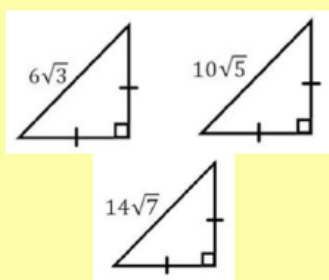
Si tenemos en cuenta todos los números escritos inicialmente y los sumamos, el resultado sería $(1 + 2026) \frac{2026}{2} = 2\,053\,351$.

Cada vez que hacemos un cambio, los dos números elegidos que sumaban $a + b$ se cambian por otros dos que suman $a + 2 + b - 3 = a + b - 1$.

Por lo que cada vez que hacemos un cambio, la suma total disminuye en una unidad. Llegará un momento en que la suma sea negativa, y esto es imposible si todos los números de la pizarra en ese momento fueran positivos, por lo que en algún momento aparecerá un negativo.

22****23**

Calcula el área de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos isósceles, y razona cómo hacerlo de dos formas distintas.

**Solución:**

Forma 1: teorema de Pitágoras

Como los triángulos tienen los dos catetos iguales al ser isósceles se cumple que

$$h^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 2x^2 = h^2 \rightarrow S = \frac{x^2}{2} = \frac{h^2}{4}$$

$$a) h_1 = 6\sqrt{3} \rightarrow S_1 = \frac{(6\sqrt{3})^2}{4} = \frac{36 \cdot 3}{4} = 27 u^2$$

$$b) h_2 = 10\sqrt{5} \rightarrow S_2 = \frac{(10\sqrt{5})^2}{4} = \frac{100 \cdot 5}{4} = 125 u^2$$

$$c) h_3 = 14\sqrt{7} \rightarrow S_3 = \frac{(14\sqrt{7})^2}{4} = \frac{196 \cdot 7}{4} = 343 u^2$$

Forma 2:

Podemos considerar que cada triángulo es el resultado de cortar un cuadrado por sus dos diagonales. Obtendríamos cuatro triángulos rectángulos isósceles como los que tenemos. La hipotenusa de los triángulos coincidiría con el lado del cuadrado inicial, por lo que la superficie de cada triángulo será la cuarta parte de la del cuadrado:

$$a) l_1 = 6\sqrt{3} \rightarrow S_1 = \frac{(6\sqrt{3})^2}{4} = \frac{36 \cdot 3}{4} = 27 u^2$$

$$b) l_2 = 10\sqrt{5} \rightarrow S_2 = \frac{(10\sqrt{5})^2}{4} = \frac{100 \cdot 5}{4} = 125 u^2$$

$$c) l_3 = 14\sqrt{7} \rightarrow S_3 = \frac{(14\sqrt{7})^2}{4} = \frac{196 \cdot 7}{4} = 343 u^2$$

24*

La nota media de los tres exámenes de música que ha hecho Carla ha sido 2,5.

¿Cuál es la mejor nota que ha podido obtener en uno de los tres exámenes?

25



Solución:

Para calcular la nota media de tres exámenes sumamos las tres notas y dividimos por 3.

Como la nota media ha sido un 2,5, las tres notas deben sumar $3 \cdot 2,5 = 7,5$.

La forma de conseguir que una de las notas sea lo más grande posible es que las otras dos sean lo más pequeñas posible, es decir, que sus notas fueran 0, 0 y 7,5.

Por lo tanto, la nota mayor que ha podido obtener es un 7,5.

26***

El área y el volumen de cierta esfera se pueden expresar ambas como dos enteros de cuatro cifras multiplicados por π .

Calcula el radio de la esfera.

27

Solución:

El volumen de una esfera se calcula con la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, por lo que, si debe ser un número entero multiplicado por π , debe cumplirse que R^3 sea múltiplo de 3.

El área, al calcularse con $A = 4\pi R^2$, siempre que el radio sea entero lo cumplirá.

Debe cumplirse que $1000\pi \leq A, V \leq 9999\pi$

Empecemos con el área:

$$1000\pi \leq 4\pi R^2 \leq 9999\pi \rightarrow 250 \leq R^2 \leq \frac{9999}{4} = 2499,75 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{250} \leq \sqrt{R^2} \leq \sqrt{2499,75} \rightarrow 16 \leq R \leq 49$$

Y del volumen:

$$1000\pi \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 9999\pi \rightarrow 750 \leq R^3 \leq \frac{9999 \cdot 3}{4} = 7499,25 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{750} \leq \sqrt[3]{R^3} \leq \sqrt[3]{\frac{9999 \cdot 3}{4}} = \sqrt[3]{7499,25} \rightarrow 10 \leq R \leq 19$$

Por lo que $16 \leq R \leq 19$

Como además R^3 debe ser múltiplo de 3, R también debe serlo, por lo que la única opción posible es que $R = 18$.

29 ggb**30**

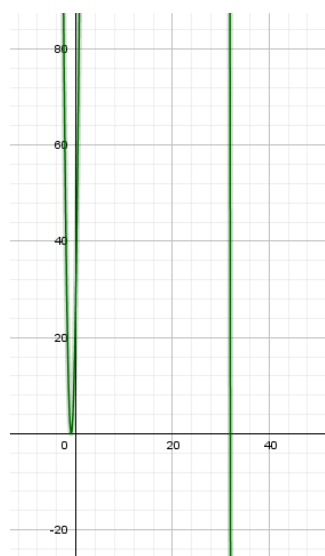
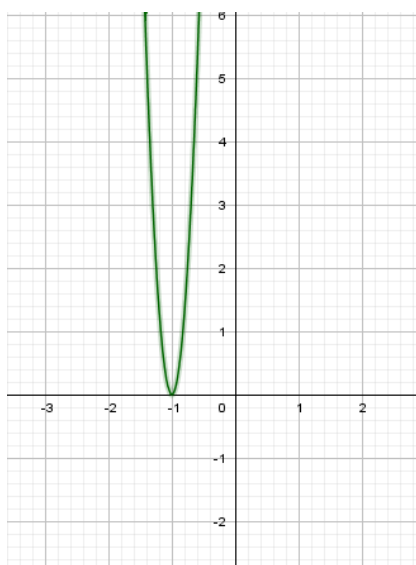
La producción en kg de una hortaliza en un invernadero depende de la temperatura x en $^{\circ}\text{C}$ según la expresión $P(x) = (x + 1)^2(32 - x)$, teniendo en cuenta que $x > 0$.

Halla la temperatura óptima para tener la máxima producción.

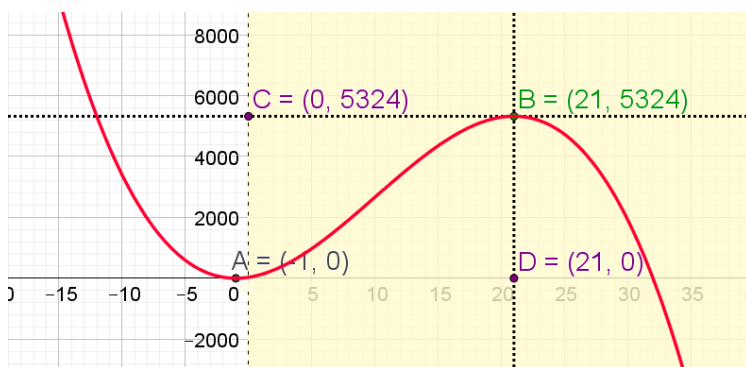


Solución con geogebra:

Para empezar, introducimos en la barra de entrada la función. Es una función de grado 3, por lo que lo que vemos en la pantalla posiblemente no sea la función completa (imagen de la izquierda). Al alejarnos para ver más, aparece una tercera línea, pero la imagen no es la mejor posible (la de la derecha).



Para arreglarlo, en la esquina superior derecha seleccionaremos la rueda de los ajustes y en ella la vista gráfica. Es necesario modificar los valores entre los que tenemos los ejes. En el de abscisas pondremos entre -25 y 50 , y en el de ordenadas entre -4000 y 10000 . Entonces veremos la función como se ve en la tercera imagen.



Introducimos en la barra de entrada $x > 0$.

Seleccionamos extremos relativos y obtenemos los puntos A y B. Nos interesa el máximo que se alcanza en el punto B. Para 21°C la producción será de 5324 kg.

Solución analítica:

Derivamos la función:

$$P(x) = (x + 1)^2(32 - x) \rightarrow$$
$$\rightarrow P'(x) = 2(x + 1)(32 - x) + (x + 1)^2(-1) = (x + 1)(63 - 3x)$$

Igualamos a cero la derivada y obtenemos los puntos críticos con

$$x = -1 \text{ y } x = 21.$$

Calculamos la segunda derivada para saber cuál es el máximo

$$P''(x) = (63 - 3x) + (x + 1)(-3) = -6x + 60$$

$$P''(-1) = -6(-1) + 60 = 66 > 0 \rightarrow \textit{min}$$

$$P''(21) = -6(21) + 60 = -66 < 0 \rightarrow \textit{Max}$$

Por lo que la producción máxima se alcanzará con el termostato puesto a 21°C.