

SOLUCIONS – JUNY 2026

1*

2

Tenim 10 sacs amb monedes d'or, però un d'ells conté monedes falses. L'única diferència és que les monedes falses pesen 9 g i les bones 10 g. Com es pot saber amb una balança de precisió i en una sola pesada quin és el sac que conté les monedes falses?



Solució:

Numerem els deu sacs. Agafem de cada sac tantes monedes com indica el número que hem assignat al sac (una del sac 1, dues del sac 2, ...) i les pesem.

Si no hi haguera monedes falses, com totes les bones pesen 10 g i tenim en total $1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 = 55$ monedes, pesarien 550 g, però com que d'un sac hem agafat monedes de 9 g, el pes total serà menor, tants grams com monedes falses hem pesat. Aquest número ens donarà el sac amb monedes falses.

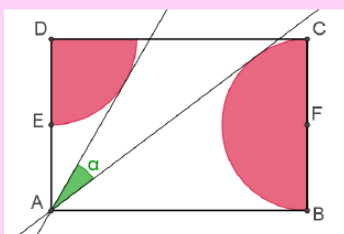
Per exemple, si en pesar-les totes hem obtingut un pes total de 547 g, en faltar 3 g per als 550 que haurien de pesar, el sac que conté les falses serà el número 3.

3***

4

En la figura, E i F són els punts mitjans dels costats. Es compleix que $2\overline{AB} = 3\overline{BC}$.

Des d'A tracem les rectes tangents als dos arcs de circumferència. Troba l'amplitud α de l'angle entre les dues rectes.



Solució:

Marquem els punts de contacte H i J de les rectes tangents amb els arcs. Amb ells tenim dos triangles rectangles AHD i AFJ.

Per ser E el punt mitjà d'AD, podem afirmar que

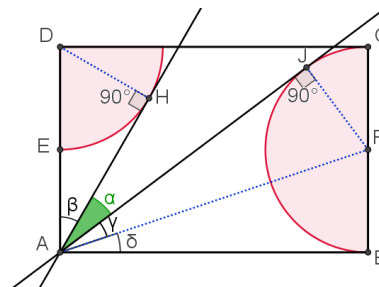
$$\sin \beta = \frac{\overline{DH}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = 30^\circ$$

Els angles γ i δ són iguals per ser AF la bisectriu de l'angle $\widehat{BAJ}$.

En el triangle ABF tindrem:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3} \rightarrow \delta = 18^\circ 26' 6''$$

L'angle que busquem: $\alpha = 90^\circ - \beta - 2\delta = 23^\circ 7' 48''$



5****6**

He de comprar exactament 24 joguets amb 300 €. Els preus per unitat són 40 € els jocs de taula, 10 € els cotxes i 5 € les pilotes. Com ho puc fer si he de portar almenys un de cadascun dels tres tipus de joguets i no ha de sobrar diners?

**Solució:**

Anomenarem x a la quantitat de jocs de taula comprats, y a la de cotxes i z a la de pilotes.

En total hem de comprar 24 joguets, per la qual cosa $x + y + z = 24$.

Hem de gastar 300 €, d'on $40x + 10y + 5z = 300$. Simplificant per 5 ens queda $8x + 2y + z = 60$.

A més, com que hem de comprar dels tres tipus de joguets, cap de les quantitats pot ser nul·la.

Si restem les dues equacions obtenim $7x + y = 36 \rightarrow y = 36 - 7x$, d'on deduïm que x no pot ser més gran que 5.

Vegem les opcions possibles:

x	5	4	3	2	1
$y = 36 - 7x$	1	8	15	22	29
$z = 24 - (x + y)$	18	12	6	0	-6

Tindrem tres maneres de fer-ho, corresponents a les tres primeres columnes, ja que els resultats obtinguts en les dues últimes per a z no són vàlids:

Opció 1: 5 jocs de taula, 1 cotxe i 18 pilotes.

Opció 2: 4 jocs de taula, 8 cotxes i 12 pilotes.

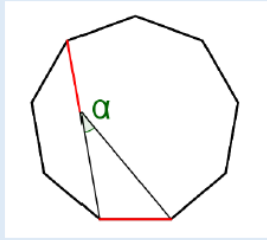
Opció 3: 3 jocs de taula, 15 cotxes i 6 pilotes.

8 ggb

9

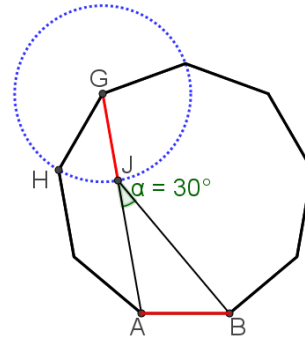
La figura està formada per un polígon regular de nou costats i dos segments que tenen la mateixa longitud (en roig en la figura).

Calculeu la mesura de l'angle α entre els dos segments.



Solució amb geogebra:

1. Sobre el segment AB amb polígon regular de 9 vèrtexs dibuixem el polígon.
2. Tracem el segment entre A i G .
3. Per trobar J , com que GJ ha de mesurar el mateix que un costat del polígon, tracem la circumferència centrada en G que passe per H . El punt d'intersecció de la circumferència amb el segment AG serà el punt J .
4. Tracem el segment BJ .
5. Mesurem l'angle amb  i obtenim que mesura 30° .



Solució analítica:

Calculem l'amplitud de l'angle d'un vèrtex del polígon:

L'angle central serà $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$, de manera que l'angle en un vèrtex qualsevol mesurarà

$$180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

Els quatre angles del polígon $AGHI$ sumaran 360° , d'on deduïm que $\widehat{HGJ} = 40^\circ$

Aleshores $\widehat{FGJ} = 100^\circ$.

Tracem un triangle equilàter de base AB .

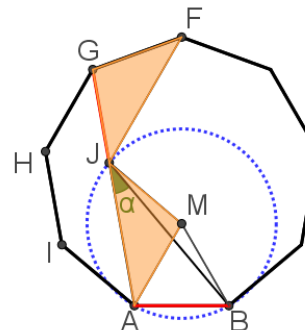
Amb centre el vèrtex superior M del triangle, tracem la circumferència que passe per A .

Comparem els dos triangles dibuixats i veiem que en ambdós hi ha dos costats que coincideixen amb la longitud d'un costat del polígon.

L'angle $\widehat{JAM} = \widehat{BAI} - \widehat{JAI} - \widehat{MAB} = 140^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, de manera que tots els angles coincideixen per ser els dos triangles isòsceles.

Calculem $\widehat{BMJ} = \widehat{JMA} + 60^\circ = 100^\circ + 60^\circ = 160^\circ \rightarrow \widehat{BJM} = 10^\circ$

$$\alpha = \widehat{JAM} - \widehat{BJM} = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$$

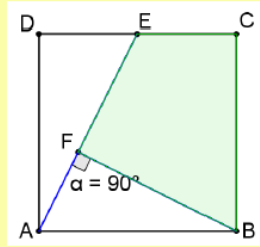


10****11**

El quadrat ABCD té 2 cm de costat.

El punt E és el punt mitjà del segment DC
i F el punt d'intersecció del segment perpendicular a AE pel punt B.

Calcula la superfície del quadrilàter BCEF.



Solució:

Calcularem la superfície del quadrilàter restant a la del quadrat les dels dos triangles.

a) $S_{ABCD} = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$

b) $S_{ADE} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 1 \text{ cm}^2$

- c) Per calcular la superfície de l'altre triangle farem servir que els dos triangles són semblants per tindre iguals els tres angles.

Les mesures que coneixem són: $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$ i $\overline{DE} = 1$.

Calculem $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

Per semblança es compleix:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AD}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{AF}}{1} = \frac{\overline{BF}}{2}$$

La superfície del triangle ABF serà

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{BF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ cm}^2$$

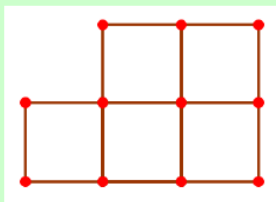
- d) La superfície que busquem serà

$$S_{BCEF} = S_{ABCD} - S_{ADE} - S_{ABF} = 4 - 1 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5} = 2.2 \text{ cm}^2$$

12***13**

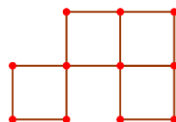
Col·loca 15 mistos com a la figura, i:

- Lleva'n 1 per obtenir 4 quadrats.
- Lleva'n 2 per obtenir 4 quadrats.
- Lleva'n 3 per obtenir 3 quadrats.
- Lleva'n 4 per obtenir 2 quadrats.
- Lleva'n 4 per obtenir 3 quadrats.
- Lleva'n 4 per obtenir 2 rectangles.

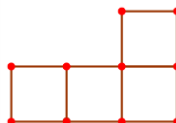


Solució:

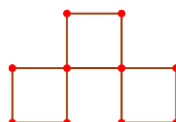
Lleva'n 1 per obtenir 4 quadrats:



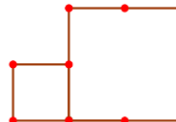
Lleva'n 2 per obtenir 4 quadrats:



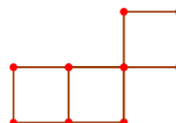
Lleva'n 3 per obtenir 3 quadrats:



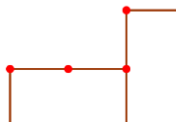
Lleva'n 4 per obtenir 2 quadrats:



Lleva'n 4 per obtenir 3 quadrats:



Lleva'n 4 per obtenir 2 rectangles:



15***16**

Un nombre primer és *permutable* si qualsevol permutació de les seves xifres també és nombre primer.

Troba tots els números primers *permutables* de dues i de tres xifres.



Solució:

Busquem el llistat dels nombres primers menors que 1000:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

a) Nombres primers *permutables* de dues xifres:

Busquem nombres de dues xifres ab que siguin primers i que, a més, també ho siga ba .

Els nombres primers de dues xifres mai no acaben en xifra parell (serien divisibles per 2) ni en 5 (serien divisibles per 5). Els que busquem tampoc podran començar per aquestes xifres perquè, en invertir l'ordre de les xifres, el nombre no seria primer. Aquests nombres són:

11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97.

b) Nombres primers *permutables* de tres xifres:

Ara han de ser primers abc , acb , bac , bca , cab , cba .

Igual que abans, els nombres només poden estar formats per les xifres 1, 3, 7 i 9. Els nombres possibles serien:

113, 131, 137, 139, 173, 179, 191, 193, 197, 199, 311, 313, 317, 337, 373, 379, 397, 719, 733, 739, 773, 797, 919, 937, 971, 977, 991, 997.

Marquem amb color els números que ho compleixen (amb el mateix color les permutacions).

Els números que busquem seran:

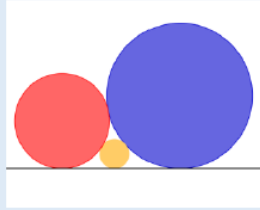
11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991.

17 ggb

18

Tres circumferències són tangents a una mateixa recta i tangents exteriors dos a dos.

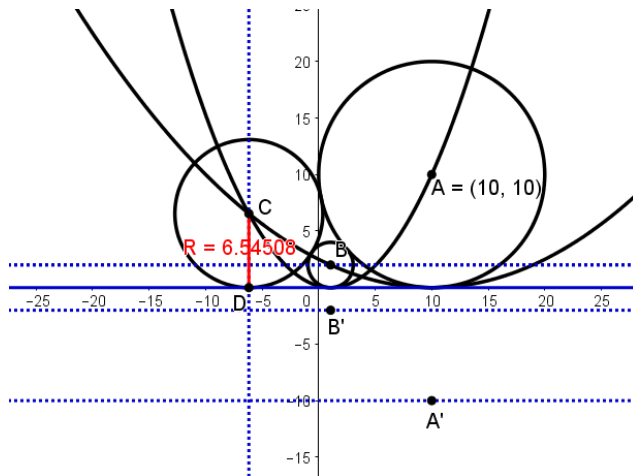
Determina la longitud del radi de la mitjana si els altres radis mesuren respectivament 2 i 10 cm.



Solució:

Per fer el dibuix tindrem en compte que, si volem dibuixar circumferències tangents a una donada, de manera que ambdues siguin també tangents a una mateixa recta, tots els centres de les noves es trobaran sobre la paràbola de focus el centre de la circumferència inicial i vèrtex en el punt de contacte de la circumferència amb la recta.

1. Dibuixem la circumferència centrada en $A(10,10)$ de radi 10. Es recolza sobre l'eix d'abscisses.
2. Dibuixem la paràbola, per a la qual cosa necessitem la directriu. Trobem A' , punt simètric d' A respecte a l'eix d'abscisses, i després la recta paral·lela a OX per A' , que serà la directriu.
3. La circumferència menuda té radi 2. Si tracem la recta $y = 2$, la intersecció amb la paràbola ens donarà el centre B de la circumferència menuda. La dibuixem amb centre a B i radi 2.
4. Repetim el procés del pas 2, ara amb la circumferència menuda, per obtenir la paràbola amb focus a B .
5. El centre C de la tercera circumferència ha d'estar en les dues paràboles, ja que és tangent a ambdues circumferències, és a dir, en la intersecció de les dues.
6. Tracem la recta perpendicular a l'eix OX pel punt C per trobar el punt D i poder mesurar el radi amb el segment que uneix C i D . Obtenim que mesura 6,54508.



19****20**

En una pissarra estan escrits els números de l'1 al 2026. Cada minut s'esborren dos qualssevol a i b i es substitueixen per $a + 2$ i per $b - 3$.

Justifica que al cap d'un temps apareixerà a la pissarra un nombre negatiu.

**Solució:**

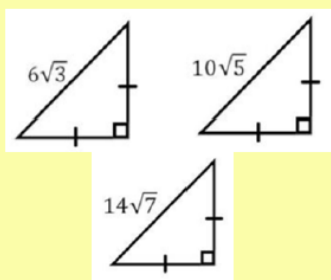
Si tenim en compte tots els números escrits inicialment i els sumem, el resultat seria $(1 + 2026) \frac{2026}{2} = 2\,053\,351$.

Cada vegada que fem un canvi, els dos números triats, que sumaven $a + b$, es canvien per uns altres dos que sumen $a + 2 + b - 3 = a + b - 1$.

Per això, cada vegada que fem un canvi, la suma total disminueix en una unitat. Arribarà un moment en què la suma siga negativa, i això és impossible si tots els números de la pissarra en aquell moment foren positius, per la qual cosa en algun moment ha d'aparéixer necessàriament un nombre negatiu.

22 ****23**

Calcula l'àrea de cadascun dels triangles rectangles isòsceles següents, i raona com fer-ho de dues maneres diferents.

**Solució:**

Forma 1: teorema de Pitàgores

Com que els triangles tenen els dos catets iguals per ser isòsceles, es compleix que

$$h^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 2x^2 = h^2 \rightarrow S = \frac{x^2}{2} = \frac{h^2}{4}$$

$$a) h_1 = 6\sqrt{3} \rightarrow S_1 = \frac{(6\sqrt{3})^2}{4} = \frac{36 \cdot 3}{4} = 27 u^2$$

$$b) h_2 = 10\sqrt{5} \rightarrow S_2 = \frac{(10\sqrt{5})^2}{4} = \frac{100 \cdot 5}{4} = 125 u^2$$

$$c) h_3 = 14\sqrt{7} \rightarrow S_3 = \frac{(14\sqrt{7})^2}{4} = \frac{196 \cdot 7}{4} = 343 u^2$$

Forma 2:

Podem considerar que cada triangle és el resultat de tallar un quadrat per les dues diagonals. Obtindríem quatre triangles rectangles isòsceles com els que tenim. La hipotenusa dels triangles coincidiria amb el costat del quadrat inicial, per la qual cosa la superfície de cada triangle serà la quarta part de la del quadrat:

$$a) l_1 = 6\sqrt{3} \rightarrow S_1 = \frac{(6\sqrt{3})^2}{4} = \frac{36 \cdot 3}{4} = 27 u^2$$

$$b) l_2 = 10\sqrt{5} \rightarrow S_2 = \frac{(10\sqrt{5})^2}{4} = \frac{100 \cdot 5}{4} = 125 u^2$$

$$c) l_3 = 14\sqrt{7} \rightarrow S_3 = \frac{(14\sqrt{7})^2}{4} = \frac{196 \cdot 7}{4} = 343 u^2$$

24*

La nota mitjana dels tres exàmens de música que ha fet Carla ha estat 2,5.

Quina és la millor nota que ha pogut obtenir en un dels tres exàmens?

25



Solució:

Per calcular la nota mitjana dels tres exàmens sumem les tres notes i dividim per 3.

Com que la nota mitjana ha estat 2,5, les tres notes han de sumar $3 \cdot 2,5 = 7,5$.

Per aconseguir que una de les notes siga el més gran possible, les altres dues han de ser tan menudes com siga possible, és a dir, que les notes haurien de ser 0, 0 i 7,5.

Per tant, la millor nota que ha pogut obtenir és un 7,5.

26***

L'àrea i el volum de certa esfera es poden expressar totes dues com a dos enters de quatre xifres multiplicats per π .

Calculeu el radi de l'esfera.

27

Solució:

El volum d'una esfera es calcula amb la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Per tant, si ha de ser un nombre enter multiplicat per π , s'ha de complir que R^3 siga múltiple de 3.

L'àrea, en calcular-se amb $A = 4\pi R^2$, sempre que el radi siga enter ho complirà.

S'ha de complir que $1000\pi \leq A, V \leq 9999\pi$

Comencem amb l'àrea:

$$1000\pi \leq 4\pi R^2 \leq 9999\pi \rightarrow 250 \leq R^2 \leq \frac{9999}{4} = 2499,75 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{250} \leq \sqrt{R^2} \leq \sqrt{2499,75} \rightarrow 16 \leq R \leq 49$$

I del volum:

$$1000\pi \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 9999\pi \rightarrow 750 \leq R^3 \leq \frac{9999 \cdot 3}{4} = 7499,25 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{750} \leq \sqrt[3]{R^3} \leq \sqrt[3]{\frac{9999 \cdot 3}{4}} = \sqrt[3]{7499,25} \rightarrow 10 \leq R \leq 19$$

Per la qual cosa $16 \leq R \leq 19$

Com, a més, R^3 ha de ser múltiple de 3, R també ha de ser-ho, per la qual cosa l'única opció possible és que $R = 18$.

29 ggb 30

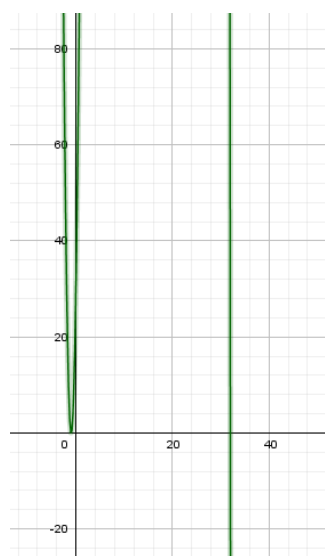
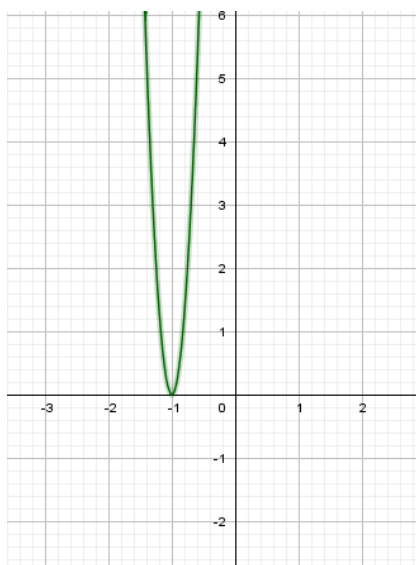
La producció en kg d'una hortalissa en un hivernacle depèn de la temperatura x en $^{\circ}\text{C}$ segons l'expressió $P(x) = (x + 1)^2(32 - x)$, tenint en compte que $x > 0$.

Calculeu la temperatura òptima per obtenir la màxima producció.

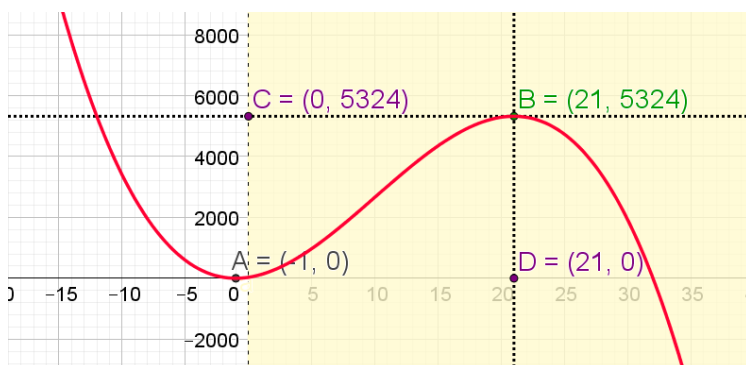


Solució amb geogebra:

Per començar, introduïm en la barra d'entrada la funció. És una funció de grau 3, de manera que el que veiem a la pantalla possiblement no siga la funció completa (imatge de l'esquerra). En allunyar-nos per veure més, apareix una tercera línia, però la imatge no és la millor possible (imatge de la dreta).



Per apanyar-ho, a la cantonada superior dreta seleccionarem la roda dels ajustaments i en ella la vista gràfica. Cal modificar els valors entre els quals tenim els eixos. En el d'abscisses posarem entre -25 i 50 , i en el d'ordenades entre -4000 i 10000 . Aleshores veurem la funció com en la imatge següent:



Introduïm en la barra d'entrada $x > 0$.

Seleccionem extrems relatius i obtenim els punts A i B. Ens interessa el màxim, que s'aconsegueix en el punt B. Per a 21°C , la producció serà de 5324 kg.

Solució analítica:

Derivem la funció:

$$P(x) = (x + 1)^2(32 - x) \rightarrow$$

$$\rightarrow P'(x) = 2(x + 1)(32 - x) + (x + 1)^2(-1) = (x + 1)(63 - 3x)$$

Igualem la derivada a zero i obtenim els punts crítics en els valors:

$$x = -1 ; x = 21.$$

Calculem la segona derivada per saber quin és el màxim

$$P''(x) = (63 - 3x) + (x + 1)(-3) = -6x + 60$$

$$P''(-1) = -6(-1) + 60 = 66 > 0 \rightarrow \text{mínim}$$

$$P''(21) = -6(21) + 60 = -66 < 0 \rightarrow \text{màxim}$$

Per tant, la producció màxima s'assolirà amb el termòstat posat a 21°C.