Fase Autonómica Valencia año 1999.

CATEGORÍA 14 - 16 AÑOS

PROBLEMA 1. **Números.**

Halla un número de cuatro cifras que cumpla las siguientes condiciones:

- La suma de los cuadrados de las cifras de las centenas y de las unidades es igual a 53.
- La suma de los cuadrados de las otras dos cifras es igual a 45.
- Si del número buscado restamos el que se obtiene al invertir sus cifras se obtiene un múltiplo de 99 comprendido entre 1000 y 1200.

Solución:

Sea N = abcd el número buscado.
Solamente hay dos múltiplos de 99 comprendidos entre 1000 y 1200:

99 x 11 = 1089 99 x 12 = 1188

La única forma de escribir 53 como suma de 2 cuadrados es

$$7^2 + 2^2 = 53$$

Luego tenemos que

$$\begin{cases} b = 2 \\ d = 7 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} b = 7 \\ d = 2 \end{cases}$$

La única forma de escribir 45 como suma de 2 cuadrados es

$$6^2 + 3^2 = 45$$

Luego tenemos que

$$\begin{cases} a = 3 \\ c = 6 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} a = 6 \\ c = 3 \end{cases}$$

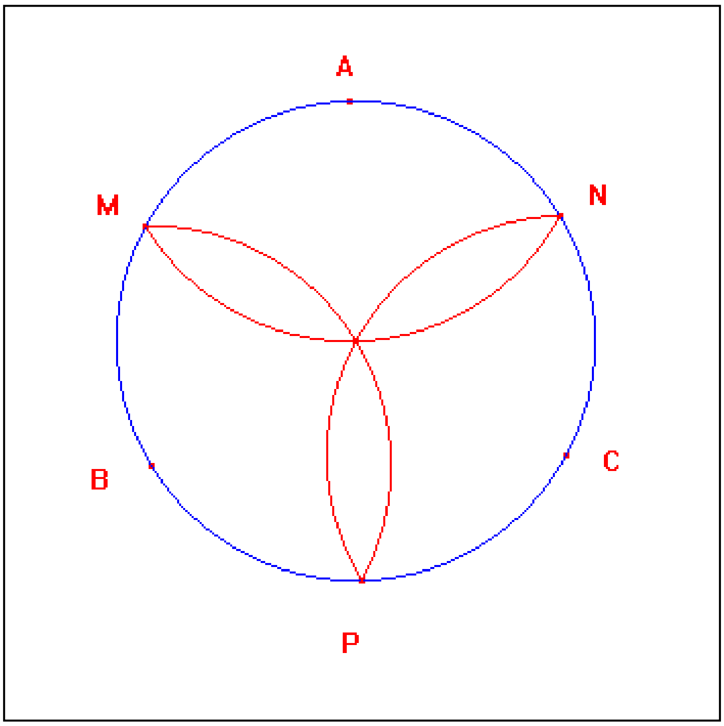
Emparejando las soluciones se obtienen números que al invertir sus cifras y restarlos sólo en un caso se obtiene uno de los múltiplos de 99 posibles y es:

a = 3 c = 6 b = 7 d = 2

Luego el número buscado es N = 3762.

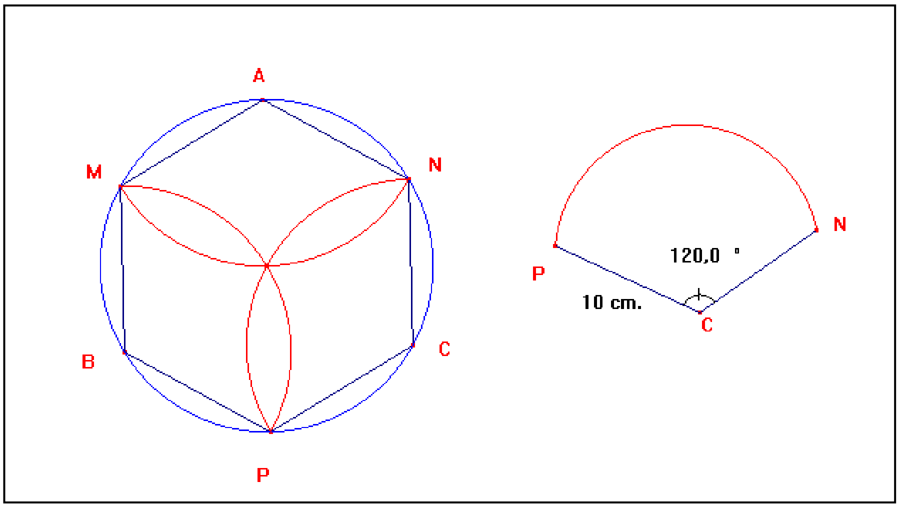
PROBLEMA 2. **Geometría.**

Halla el área y el perímetro de la parte sombreada de la siguiente figura, sabiendo que el diámetro mide 20 cm y siendo A, B y C los centros de los arcos de circunferencia MN, MP y PN, respectivamente.

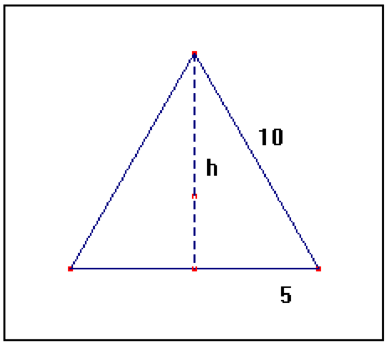


Solución:

Sea β el área del hexágono AMBPCN. Sea α el área del sector circular NCP y sea S el área de la parte sombreada que pretendemos calcular. Se cumple que: $3\alpha = \beta + S$.



Ahora bien, α = $\frac{\pi \cdot 10^2}{3}$ (corresponde a un ángulo central de 120º, es la tercera parte del área del círculo). Además, β = 6.A, siendo A el área del triángulo equilátero de lado 10.



Por el teorema de Pitágoras, $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Luego: A = $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$.

Por tanto: β = $6 \cdot A = 6 \cdot 25 \cdot \sqrt{3} = 150\sqrt{3}$.

Luego: 3 α = β + S $\rightarrow$ S = 3 α – β = $3 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{3} - 150\sqrt{3} = 100\pi - 150\sqrt{3} = 54'35$ cm^2.

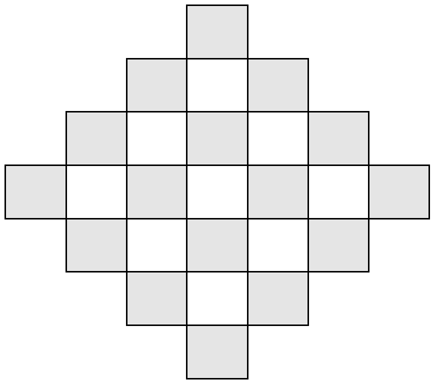
<u>Cálculo del perímetro</u>:

Se observa, por simetría respecto de la recta MN, que el arco MON es igual al arco MAN. De la misma forma, llegamos a que arco NOP = arco NCP y arco POM = arco PBM. Por tanto, el perímetro de la parte sombreada coincide con el perímetro del círculo, es decir, con la longitud de la circunferencia

P = 2 π 10 = 20 π $\approx$ 62’83 cm.

PROBLEMA 3. Números.

La siguiente figura está formada por cuadrados blancos y negros. Tiene 7 cuadrados de anchura. Si queremos hacer una figura similar con 99 cuadrados de anchura, ¿cuántos cuadrados tendrá en total?.



Solución:

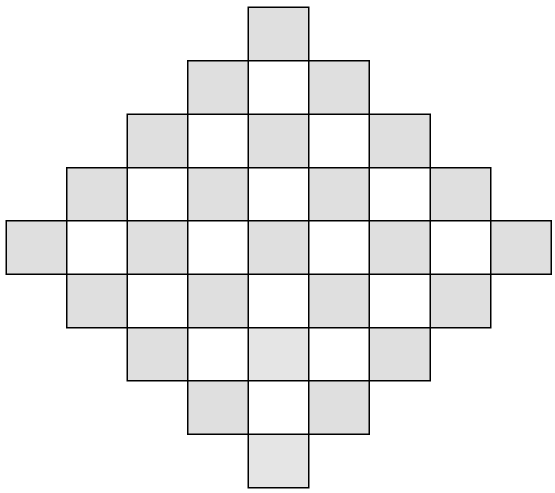
Examinando casos particulares (de anchura 1, 3, 5, 7, 9, etc), podemos construir la siguiente tabla:

Anchura	1	3	5	7
Nº cuadrados	1	5	13	25

El término n de la anchura es 2n+1. Para hallar el término n del Nº de cuadrados, tenemos en cuenta lo siguiente:

En una figura de anchura 9 hay
1+3+5+7+9+7+5+3+1 cuadrados.

O sea: 2 (1+3+5+7) + 9 cuadrados.



Por tanto, en una figura de anchura 2n–1, hay

$2\,(1+3+5+...+(2n-3)) + (2n-1) =$

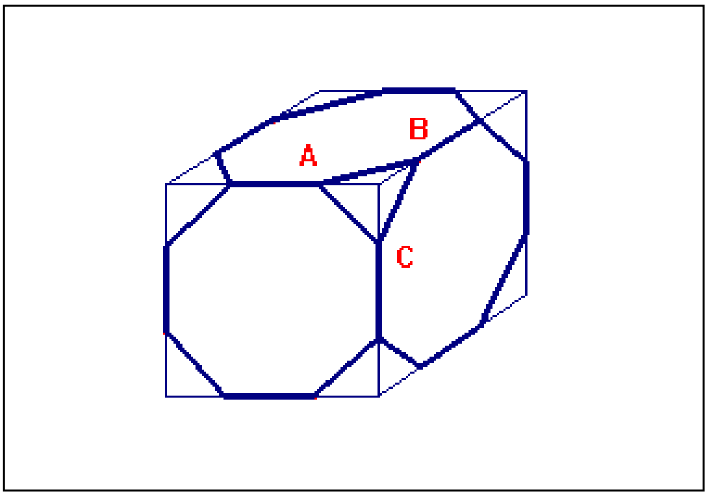
$= 2\,\frac{1+2n-3}{2}(n-1)+(2n-1) = 2\,(n-1)^2 + 2n-1 = 2n^2 - 2n + 1$

Si a la anchura de la figura la llamamos N=2n–1, despejando obtenemos $n=\frac{N+1}{2}$. Por lo tanto, sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos: $2n^2 - 2n + 1 = \;= 2\frac{(N+1)^2}{4} - 2\frac{N+1}{2} + 1 = \frac{N^2+1}{2}$.

Es decir, en una figura de anchura N hay $\frac{N^2+1}{2}$ cuadrados. Por lo tanto, en una figura de anchura N=99 hay $\frac{99^2+1}{2} = 4901$ cuadrados.

PROBLEMA 4. **Geometría.**

En un cubo de 1 metro de arista cortamos las tres aristas que concurren en un vértice, de forma que la sección sea un triángulo equilátero. Repetimos la operación en todos los vértices, de tal modo que el sólido resultante tenga todas sus aristas iguales. ¿A qué distancia del vértice hay que cortar la arista del cubo para obtener este sólido?. ¿Cuál es el perímetro del sólido obtenido?.



Solución:

Sea **a** la longitud de la arista del nuevo sólido obtenido. Sea **x** la longitud de la parte de arista que seccionamos del cubo. Observamos en la siguiente figura que: a + 2 x = 1.

Se cumple además que el triángulo determinado por la sección y las dos aristas del cubo que concurren en el vértice es a la vez rectángulo e isósceles. Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$x^2 + x^2 = a^2 \rightarrow 2x^2 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{2}\cdot x$$

Sustituyendo en la expresión a + 2 x = 1, obtenemos:

$$\sqrt{2}\cdot x + 2x = 1 \rightarrow \left(\sqrt{2}+2\right)\cdot x = 1.$$

Por lo tanto, despejando y racionalizando:

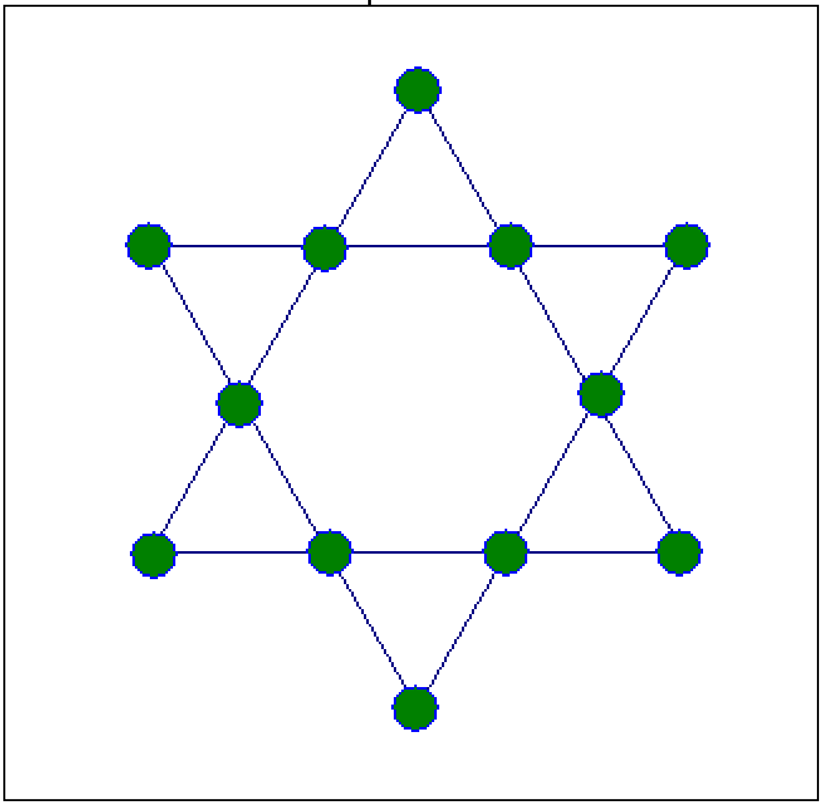
$$x = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 29'3\,\text{cm}.$$

El número de aristas del nuevo sólido es igual a 3×8 (de los vértices del cubo) más 12 (de las aristas del cubo), es decir, 3×8+12=36.

Por tanto, el perímetro del nuevo sólido es: $P = 36\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 18\cdot\left(2-\sqrt{2}\right) \approx 10'5$ m.

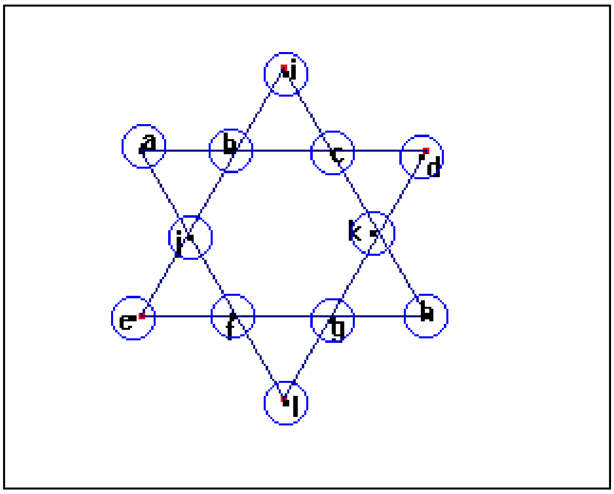
PROBLEMA 5. **Números**

Coloca en cada círculo un número comprendido entre 1 y 12, de forma que los seis lados de la estrella sumen siempre la misma cantidad.



Solución:

Por las condiciones del problema, si llamamos x a la suma de los cuatro números situados en cada lado de la estrella, deben cumplirse las siguientes igualdades:



a + b + c + d = x

e + f + g + h = x

e + j + b + i = x

i + c + k + h = x

d + k + g + l = x

a + j + f + l = x

Sumando las seis igualdades: 2 (a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l) = 6 x

De donde: a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l = 3 x.

Ahora bien, la suma a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l debe ser igual, aunque posiblemente en orden distinto, a la suma de los doce primeros números naturales, es decir, debe cumplirse (utilizando el método de Gauss para sumar sucesiones aritméticas):

a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = $\frac{1+12}{2} \cdot 12$

En consecuencia, debe ser: $\frac{1+12}{2} \cdot 12 = 3\,x \;\rightarrow\; 13 \cdot 6 = 3\,x \;\rightarrow\; x = 26.$

La suma de cada lado de la estrella debe ser igual a 26. Se trata, pues, de buscar grupos de cuatro números comprendidos entre 1 y 12, que sumen 26. Para ello utilizaremos las propiedades de simetría en la suma de los 12 primeros:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12

Así obtenemos las siguientes sumas posibles para cada lado de la estrella:

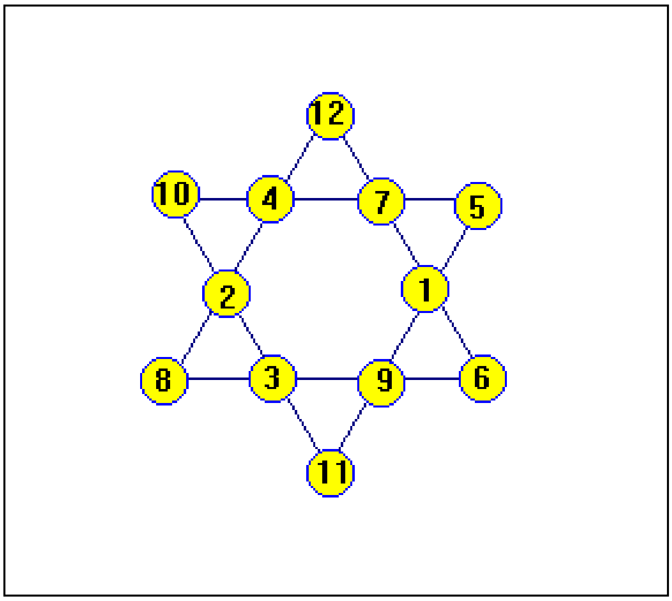
1+2+11+12	2+3+10+11	3+4+9+10	4+5+8+9	5+6+7+8
1+3+10+12	2+4+9+11	3+5+8+10	4+6+7+9	
1+4+9+12	2+5+8+11	3+6+7+10		
1+5+8+12	2+6+7+11			
1+6+7+12				

También podemos obtener sumas iguales a 26 de forma no simétrica:

1+4+10+11	2+3+9+12	3+4+7+12	4+5+6+11
1+5+9+11	2+4+8+12	3+4+8+11	4+5+7+10
1+6+8+1	2+5+7+12	3+5+6+12	

1			
1+6+9+10	2+5+9+10	3+5+7+11	
1+7+8+10	2+6+8+10	3+6+8+9	
	2+7+8+9		

Por último, hay que combinar algunas de estas 33 sumas posibles para obtener soluciones, como por ejemplo, la que se muestra en la figura siguiente:



PROBLEMA 6. Álgebra.

Ana ha vendido manzanas en varias casas. En cada una dejó la mitad de las que llevaba más media y conste que jamás partió manzanas. No recuerda en cuántas casas estuvo, pero sabe que efectuó no menos de cuatro ventas y que empezó la jornada con menos de 100 manzanas y al finalizar la jornada las vendió todas.

- ¿En cuántas casas vendió manzanas?.
- ¿Cuántas manzanas tenía inicialmente?.
- ¿Cuántas vendió en cada casa?.

Solución:

Sea x = nº de manzanas que tenía Ana inicialmente. Entonces:

1ª venta $\rightarrow$ $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$

2ª venta $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$

3ª venta $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$

4ª venta $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}-\frac{x+1}{8}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{16}$

Y así sucesivamente. Sea n el número de ventas realizadas. Entonces, el número total de manzanas vendidas es igual a:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+1}{8}+\frac{x+1}{16}+...\frac{x+1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...\frac{1}{2^n}\right)\cdot(x+1)=p_n\cdot(x+1).$$

Como $2\cdot p_n=1+\left(p_n-\frac{1}{2^n}\right)$, despejando resulta: $p_n=1-\frac{1}{2^n}$.

Como, por otra parte, se vendieron todas las manzanas, debe ser: $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\cdot(x+1)=x$

Quitando paréntesis y simplificando, queda: $\frac{1}{2^n}\cdot x=1-\frac{1}{2^n}$. Despejando x resulta:

$$x=2^n\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2^n-1$$

Como efectuó no menos de cuatro ventas, debe ser n $\geq$ 4 y como empezó la jornada con menos de 100 manzanas, debe ser x $\leq$ 100. Entonces:

- Si n=4, se cumple que x=$2^4 - 1 = 15$.
- Si n=5, se cumple que x=$2^5 - 1 = 31$.
- Si n=6, se cumple que x=$2^6 - 1 = 63$.
- Si n=7, se cumple que x=$2^7 - 1 = 127$. Solución no válida.

Por lo tanto, hay cuatro posibles soluciones del problema:

n=4	x=15	En la primera casa vendió 8 manzanas; en la segunda 4; en la tercera 2 y en la cuarta 1.
n=5	x=31	En la primera casa vendió 16 manzanas; en la segunda 8; en la tercera 4; en la cuarta 2 y en la quinta 1.
n=6	x=63	En la primera casa vendió 32 manzanas; en la segunda 16; en la tercera 8; en la cuarta 4; en la quinta 2 y en la sexta 1.