X olimpiada Problemas fase Castellón. Año 1999

CATEGORÍA 14-16 AÑOS

PROBLEMA 1. Funciones.

Halla todos los valores de a para los cuales el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+2x\le 1 \\ x-y+a=0 \end{array}\right\}$$

tiene solución única. Halla la solución correspondiente.

Solución:

El sistema dado es equivalente al siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+(x+a)^2+2x\le 1 \\ y=x+a \end{array}\right\}$$

La desigualdad $2x^2+2(a+1)x+a^2-1\le 0$ tiene una única solución respecto a x solamente cuando el discriminante del trinomio es igual a cero. Es decir,

$$(a+1)^2-2(a^2-1)=0$$

Operando

$$a^2-2a-3=0$$

de aquí

$$a=\begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$$

Si a = 3, entonces

$$x^2+4x+4=0$$

de donde

$$x = -2 \qquad y = 1.$$

Si a = -1, entonces

$$x^2 = 0$$

de donde

$$x = 0 \qquad y = -1$$

PROBLEMA 2. Números.

Halla la base del sistema en que el número 554 representa el cuadrado de 24.

Solución:

Se tiene que

$$554_{(x} = (24_{(x})^2$$

Calculando el valor de los dos miembros de la expresión anterior

$$4 + 5x + 5x^2 = (4 + 2x)^2 = 16 + 16x + 4x^2$$

de donde

$$x^2 - 11x - 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 12 \\ -1 \end{cases}$$

La base es 12.

PROBLEMA 3. Números.

Halla la suma de los 20 primeros términos de la sucesión: 1,11,111,1111,....

Solución:

Designemos la suma buscada por S_{20}. Transformemos los términos de esta suma empleando la fórmula para la suma de los términos de una progresión geométrica, de la siguiente forma:

$$1+10=\frac{10^2-1}{9}$$

$$1+10+100=\frac{10^3-1}{9}$$

....

$$1+10+100+...+10^{19}=\frac{10^{20}-1}{9}$$

Sumando los segundos miembros de las igualdades, tendremos

$$S_{20}=\frac{1}{9}(10+10^2+...+10^{20}-20)=\frac{1}{9}(\frac{10^{21}-10}{9}-20)$$

PROBLEMA 4. Geometría.

Dado un cuadrado *ABCD* de lado *a*, se trazan las diagonales, y desde los vértices como centro se describen arcos de circunferencia que pasen por el punto de intersección de las diagonales, y limitados por los lados del cuadrado, según la figura:

Demuestra que:
a) El polígono *EFGHIJKL* es un octógono regular.
b) Calcula el área de la figura sombreada.

Solución:

a)

$$AB = a \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$AE = BF = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$$
$$EF = a - a(2-\sqrt{2}) = a(\sqrt{2}-1)$$

Por otra parte

$$LE = AE\sqrt{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}{2} = a(\sqrt{2}-1)$$

El mismo razonamiento se aplica al resto de lados del polígono *EFGHIJKL* y, por tanto, todos son iguales.
Además sus ángulos valen 135º pues son suplementarios de ángulos iguales de 45º en los triángulos *ALE*, *BFG*, *CHI* y *DJK*.
Luego es un octógono regular.

b) El área de la superficie sombreada es igual al doble de la diferencia entre el cuadrado y el semicírculo de radio *OA*. Por tanto:

$$A = 2\left[a^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = \frac{a^2}{2}(4-\pi)$$

PROBLEMA 5. **Probabilidad.**

Dos jugadores se colocan cada uno en una orilla distinta de un río. Cada jugador dispone de 12 fichas que debe colocar a su antojo en las casillas numeradas de su orilla. Lanzan alternativamente un par de dados y su suma indica la casilla de la que hay que tomar una ficha (si la hubiera) y lanzarla al agua. Gana el jugador que primero lanza al agua todas sus fichas.
Busca la mejor colocación de las fichas y justifícala.

Solución:

Hallamos para cada suma de las puntuaciones de los dados los distintos casos que pueden darse y su probabilidad.
La mejor colocación de las fichas será

Suma	Casos favorables	Probabilidad	Nº Fichas P * 12	Número de fichas
1	-	0	0	0
2	1+1	1/36	0.33	0
3	1+2, 2+1	2/36	0.66	1
4	1+3, 3+1, 2+2	3/36	1	1
5	1+4, 4+1, 2+3, 3+2	4/36	1.33	1
6	1+5, 5+1, 2+4, 4+2, 3+3	5/36	1.66	2
7	1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3	6/36	2	2
8	2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 4+4	5/36	1.66	2
9	3+6, 6+3, 4+5, 5+4	4/36	1.33	1
10	4+6, 6+4, 5+5	3/36	1	1
11	5+6, 6+5	2/36	0.66	1
12	6+6	1/36	0.33	0