

OLIMPIADA MATEMÀTICA 2008

FASE PROVINCIAL

PROVA INDIVIDUAL

♣ CATEGORIA 14 –16 ANYS ♣

- 1.** En un hort hi ha plantades 70 oliveres, la qual cosa correspon al 40% del poblat d'arbres. El propietari planta 20 oliveres més i 30 ametllers. Quin és el percentatge que correspon a les oliveres després de la plantació?

Abans de la plantació dels arbres nous tindrem que si 70 arbres corresponen al 40%, el 100% dels arbres són:

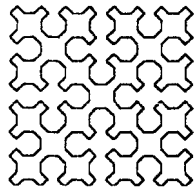
$$\begin{cases} 70 & - & 40 \\ x & - & 100 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7000}{40} = 175$$

Per tant hi ha plantats $(175-70=)$ 105 arbres que no són oliveres.

Després de la plantació hi haurà $(70+20=)$ 90 oliveres i $(105+30=)$ 135 arbres que no ho són, que fan un total de $(90+135=)$ 225 arbres. Per tant el percentatge d'oliveres després de la plantació és:

$$\begin{cases} 90 & - & 225 \\ x & - & 100 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9000}{225} = 40$$

Després de la plantació el percentatge d'oliveres continua sent del 40%



SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA
DE LA COMUNITAT VALENCIANA
AL- KHWARITZMI

2. En aquest calendari mes de març qualsevol tens marcat un quadrat 3x3.

- Calcula, en valor absolut la diferència entre el producte de les dates dels vèrtexs oposats
- Trija un altre quadrat i repeteix el càlcul
- S'obtindrà el mateix valor en qualsevol altre quadrat 3x3? Justifica-ho fent ús de l'àlgebra.

Març						
dl	dm	dm	dj	dv	ds	dg
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

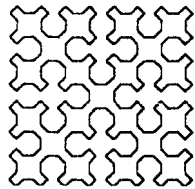
a) $24 \times 8 - 22 \times 10 = -28$

b) $21 \times 5 - 7 \times 19 = -28$; $23 \times 7 - 9 \times 21 = -28$; $28 \times 12 - 14 \times 26 = -28$; I així amb tots

c) Qualsevol quadrat 3x3 es pot representar com:

x	$x+1$	$x+2$
$x+7$	$x+8$	$x+9$
$x+14$	$x+15$	$x+16$

$$x \cdot (x+16) - (x+2) \cdot (x+14) = x^2 + 16x - x^2 - 16x - 28 = -28$$



SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA
DE LA COMUNITAT VALENCIANA
AL- KHWARITZMI

- 3.** Tenim 19 peses diferents de 1 gr, 2 gr, 3 gr, . . . , 19 gr. Nou d'elles són d'acer, nou de bronze i una és d'or. Sabem que el pes total de les peses d'acer és 90 gr. major al pes de les de bronze. Calculeu el pes de la pesa d'or.

Les peses són de 1 , 2 , 3 , . . . , 19 gr. Així el pes total serà:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{1+19}{2} \cdot 19 = 190 \text{ gr}$$

a → pes total de les 9 peses de bronze.

$a + 90$ → pes total de les 9 peses d'acer.

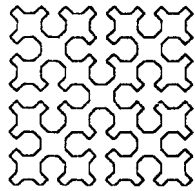
b → pes de la pesa d'or

$$a + a + 90 + b = 190 \Rightarrow 2a + b = 100$$

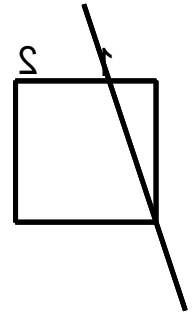
El pes mínim de les 9 peses de bronze serà: $a \geq 1 + 2 + \dots + 9 = \frac{1+9}{2} \cdot 9 = 45$

El pes màxim de les 9 d'acer: $a + 90 \leq 11 + 12 + \dots + 19 = \frac{11+19}{2} \cdot 9 = 135 \Rightarrow a \leq 45$

Aleshores $a = 45 \Rightarrow b = 10 \text{ gr}$ la pesa d'or.



4. Deu cartrons quadrats de 3 cm de costat es tallen per una recta, com indica la figura. Després dels talls es tenen 20 peces: 10 triangles i 10 trapezis. Construïu un quadrat amb les 20 peces sense superposicions ni forats.



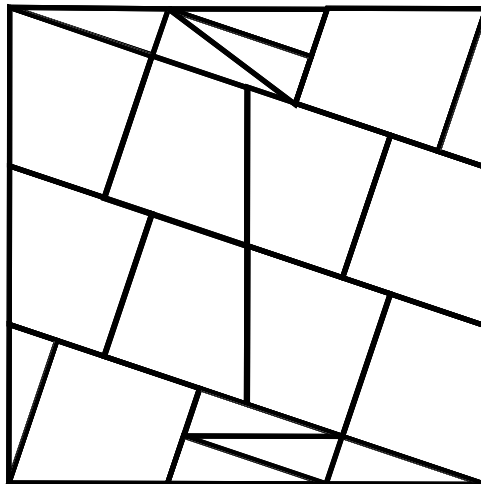
El quadrat ha de tindre 90 cm^2 de superfície.

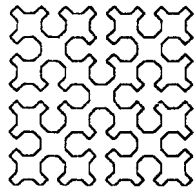
Per tant el seu costat haurà de mesurar: $\sqrt{90} = 3 \cdot \sqrt{10}$ cm.

Aplicant Pitàgores al triangle veiem que la mesura de la hipotenusa és: $\sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$,
igual que el costat del trapezi.

Aleshores el costat del quadrat és 3 vegades aquesta hipotenusa.

Aquesta és la clau per a la construcció. La resta és muntar un puzle:





- 5.** Trobeu un número natural n de manera que $2^{22} + 2^{25} + 2^n$ siga un quadrat perfecte.

Operant l'expressió obtenim:

$$2^{22} + 2^{25} + 2^n = 2^{22} \cdot (1 + 8 + 2^{n-22})$$

Per a que aquest producte siga quadrat perfecte és suficient que ho siguen els dos factors.

El primer ja ho és.

Per a que ho siga el segon prenem per exemple $(1 + 8 + 2^{n-22}) = 9 + 2^{n-22} = 25$

Així tindrem $2^{n-22} = 16 \Rightarrow 2^{n-22} = 2^4 \Rightarrow n - 22 = 4 \Rightarrow n = 26$