

OLIMPIADA MATEMÀTICA 2009

FASE PROVINCIAL

PROVA INDIVIDUAL

♣ CATEGORIA 14 -16 ANYS ♣

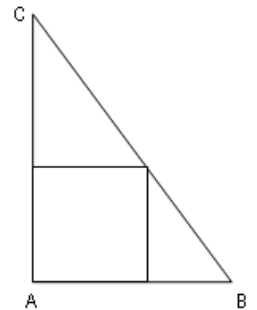
1. Considerem donat un arc de circumferència. Sobre un punt d'aquest arc i amb el mateix radi es dibuixa un altre arc que talla en dos punts l'arc inicial. Calcula l'àrea de la zona interior als dos arcs.

2. Al meu despertador els números són digitals com els de la figura:

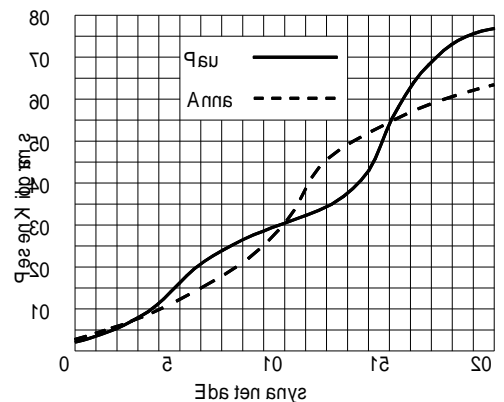


Un dia veig que l'hora que marcava, **12:05** es podia mirar a l'espill i també era una hora correcta. Quants moments del dia compleixen aquesta condició?

3. Siga ABC un triangle rectangle en A, els costats del qual fan 21, 28 i 35 cm respectivament. Inscrivim un quadrat tal i com indica la figura. Es demana calcular l'àrea del quadrat i si ocupa més o menys que la meitat de l'àrea del triangle.



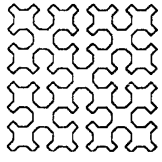
4. Anna i Pau són dos joves de més o menys la mateixa edat. Les gràfiques de la figura adjunta comparen com han variat els seus pesos durant els primers 20 anys. Llegint les gràfiques, respon de manera raonada a les següents preguntes:



- Quant va augmentar de pes cadascun d'ells entre els 11 i els 18 anys?
- Quan pesava més Pau que Anna? Com ho saps?
- Quan tenien els dos el mateix pes?
- Quan engreixava Anna més ràpidament? A quina velocitat ho feia? (Respon amb kg/any)
- Quan engreixava Pau amb més rapidesa que Anna?

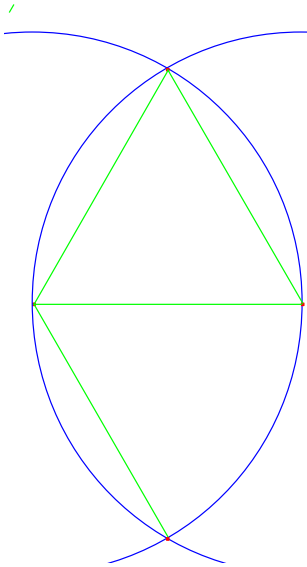
5. Cada vegada que doblegues una fulla de paper per la meitat es duplica el seu grossor. Quan has fet 6 o 7 doblecs ja no pots fer-ne més. Imagina que pots i suposa que la fulla de paper té 0,14mm de grossària, aleshores:

- Calcula la grossària de la fulla després d'haver fet 10 doblecs
- Superaries amb 22 doblecs l'altura de la torre Eiffel? (321 m)
- Quants doblecs necessites per què la seva grossària siga major que l'altura de l'Everest? (8848m)



Solucions

Problema 1



Dividim la zona de la qual hem de calcular l'àrea en dos triangles equilàters (de costat el radi r dels arcs) i quatre segments d'angle associat 60° (per ser els triangles equilàters). Si Δ_T és l'àrea sol·licitada i Δ_t és l'àrea del triangle i Δ_s és l'àrea del segment tenim:

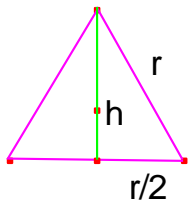
$$\Delta_T = 2 \cdot \Delta_t + 4 \cdot \Delta_s \quad (1)$$

Per al triangle tenim

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta_t = \frac{r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

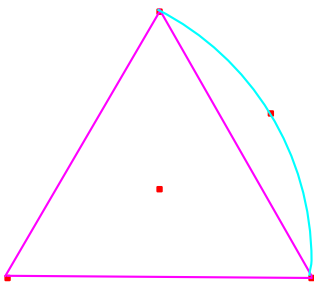
I per al segment circular

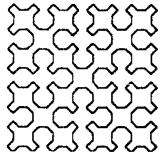
$$\begin{aligned} \Delta_s &= \Delta_{\text{sector}} - \Delta_t = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi r^2 - 3r^2\sqrt{3}}{12} = \\ &= \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} \end{aligned}$$



Per tant en (1)

$$\begin{aligned} \Delta_T &= 2 \cdot \Delta_t + 4 \cdot \Delta_s = 2 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \\ &= \frac{r^2\sqrt{3}}{2} + \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{3} = \frac{r^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{6} \end{aligned}$$





SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA
DE LA COMUNITAT VALENCIANA
AL- KHWARITZMI

Problema 2

Números reversibles a l'espill: 0 , 1 , 2 , 5 , 8.

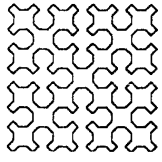
Números utilitzables per a formar hores: 0 , 1 , 2 , 5.

Estudiem les possibilitats en un diagrama en arbre separant en dos blocs les posicions 1 i 2 de les 3 i 4, que en l'espill tindran les posicions canviades:

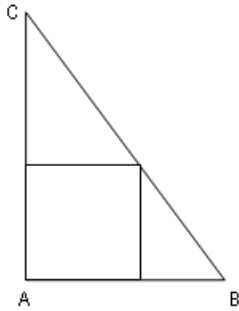
Primera	Segona	Tercera	Quarta
0	0	0	0
	1		1
	2		5
	5	0	
1	0	1	1
	1		5
	2	2	0
	5		1
2	0	5	0
	1		1
	2		5

Així, hi ha 11 possibilitats per a la primera parella (les hores en la realitat, minuts en l'espill) i 11 per a la segona.

En total, $11 \times 11 = 121$ hores possibles.



Problema 3



Anomenem x al costat del quadrat. Considerem que els costats del triangle ABC, són $AB=21\text{cm}$, $AC=28\text{cm}$ i $BC=35\text{cm}$.

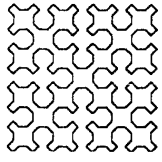
Calcularem l'àrea del triangle ABC de dues maneres, una fent servir la fórmula i l'altra com a suma dels dos triangles menuts i el quadrat. Després igualarem ambdues expressions, és a dir:

$$\frac{21 \cdot 28}{2} = x^2 + \frac{(21-x) \cdot x}{2} + \frac{x \cdot (28-x)}{2} . \text{ D'aquesta expressió s'obté,}$$

a priori, una equació de segon grau que hem de resoldre.

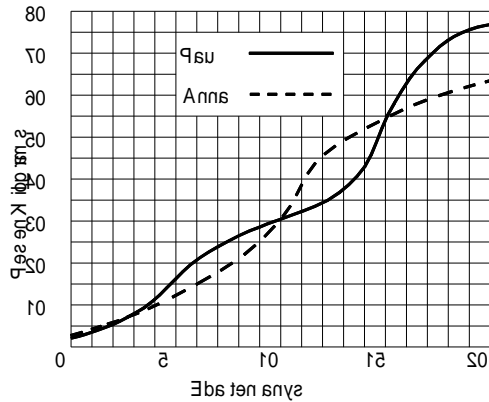
$$294 = x^2 + \frac{21x - x^2}{2} + \frac{28x - x^2}{2} \rightarrow 588 = 49x \rightarrow x = 12$$

El costat del quadrat val 12cm i per tant l'àrea 144cm^2 . L'àrea del triangle ABC val $\frac{21 \cdot 28}{2} = 294\text{cm}^2$. La meitat d'aquesta àrea és 147cm^2 i així el quadrat ocupa menys.



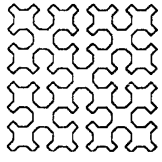
SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA
DE LA COMUNITAT VALENCIANA
AL- KHWARITZMI

Problema 4



Aquest problema només consisteix en fer una lectura adient de la gràfica, és a dir es tracta d'un problema d'interpretació de gràfiques.

- a) Als 11 anys Pau pesava al voltant dels 32kg i als 18 anys al voltant dels 72kg, per tant va augmentar 40kg. Anna pesava als 11 anys 40kg i als 18 anys pesava 60kg, aleshores va augmentar 20kg.
- b) Pau pesava més que Anna dels 4 als 10 anys i dels 15 als 20 anys perquè en aquests intervals, la gràfica de Pau està per damunt de la gràfica de Anna.
- c) Tenien els dos el mateix pes on els gràfiques coincideixen, és a dir, dels 0 als 4 anys, als 10 anys i als 15 anys.
- d) Anna va engreixar més ràpidament dels 10 als 15 anys, només cal veure el quocient incremental.
Ho feia a raó de : $\frac{55-30}{15-10} = \frac{25}{5} = 5 \text{ kg/any}$
- e) Pau engreixava amb més rapidesa que Anna a partir dels 15 als 20 anys, cal fixar-se amb les velocitats. Anna ho feia a raó de 2 kg/any mentre que Pau ho feia a raó de $\frac{75-55}{20-15} = \frac{20}{5} = 4 \text{ kg/any}$



Problema 5

Es tracta d'un problema de successions, concretament de progressions geomètriques.

- a) 1r dobllec: $2 \cdot 0,14 = 0,28mm$; 2n dobllec: $2 \cdot 2 \cdot 0,14 = 0,56mm$; 3r dobllec: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,14 = 2^3 \cdot 0,14 = 1,12mm$ i així podem trobar una fórmula que permeta calcular la grossària en funció del nombre de dobllecs. Serà: $2^n \cdot 0,14$ on n és el número de dobllecs. En el nostre cas seria $2^{10} \cdot 0,14 = 143,36mm$
- b) Amb 22 dobllecs la grossària de la fulla seria: $2^{22} \cdot 0,14 = 587202,56mm = 587,202m$ per tant sí que se supera l'altura de la torre Eiffel.
- c) En aquest cas, tenim dues opcions: Anar provant o plantejar un equació exponencial resoluble mitjançant logaritmes.

En primer lloc cal tenir totes les dades amb les mateixes unitats, aleshores passarem l'altura de l'Everest a mm, així doncs serà 8848000mm. L'equació exponencial a la qual arribem és:

$$2^n \cdot 0,14 = 8848000 \Rightarrow 2^n = 63200000 \Rightarrow n \cdot \log 2 = \log 63200000 \Rightarrow n = 25,91$$

Ens farien falta quasi 26 dobllecs!!!