S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

Problemes Olímpics

Revista de problemes de Matemàtiques
Número 71. Octubre 2013

GALERIA DE FOTOS PARTICIPANTS AL XIII CONCURS DE FOTOGRAFIA "MATEMÀTICA A LA VISTA"

"Desorden fractal".
Daniel Pozo. IES Ramón Llull (València)

"En hora pi".
Eloie Gallego. IES Maria Moliner (Port de Sagunt)

"Simetría histórica"
Sara Romero. IES María Moliner (Port de Sagunt)

"Espirales opuestas"
Aina Reig. Col·legi ABECÉ (Gandia)

"Función discontínua"
Carmen Fernández. IES María Moliner (Port de Sagunt)

"Simetria trencada".
Andrea Martínez. IES La Sènia (Paiporta)

"Clara de luna".
Daniel García. Colegio Paidós (Denia)

"Espiral simbólica".
J. Fernando López. IES Ramón Llull

"Hay 4 círculos y 2 rectángulos".
Lucía Hernaz. Colegio Paidós (Denia)

Ací teniu el número 71 de PROBLEMES OLÍMPICS corresponent al mes d'octubre de 2013. Trobareu les proves proposades a la fase provincial de Castelló i a la Fase Autonòmica, celebrada a principis de juny a Benidorm.

Aprofitem per recordar-vos que tenim oberta la inscripció a les XI Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana, que celebrarem el proper 7 i 8 de març a Castelló. Us animem a participar activament presentant comunicacions i tallers. Teniu fins el 5 de febrer, i sempre a través de la nostra web.

També volem recordar-vos que queden pocs dies per tancar el termini d'inscripció a la primera oferta de cursos que organitza la nostra societat. Teniu el formulari d'inscripció a la web. Si voleu qualsevol informació particular podeu escriure a formació@semcv.org

Hem convocat el concurs de fotografia "Matemàtica a la vista" en la qual podeu participar vosaltres i els vostres alumnes. Com sempre, en el marc de les Jornades resoldrem el concurs. Les fotografies premiades així com les més representatives, apareixen en la nostra portada o en l'interior de portada mostrant les habilitats dels nostres estudiants. Esperem que la participació siga gran.

PROBLEMES OLÍMPICS

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Apartat 22.045
46071 València

Director: Tomàs Queralt Llopis

Coordinador de redacció: Josep Manuel Martínez Canet

Correcció lingüística: José Fernando Juan García

D.L.: V-3026-2001
ISSN: 1578-1771

Portada: "Sinusoide" Autora: Minerva Paz. IES María Moliner (Port de Sagunt). Primer Premi de l'apartat II del XIII Concurs de fotografia "Matemática a la vista".

Et falta algun exemplar de la revista Problemes Olímpics? Si vols ens el pots demanar i te l'enviem a la teua adreça.

SOL·LICITUD D'ENVIAMENT DE NÚMEROS ANTERIORS DE "PROBLEMES OLÍMPICS"

Nom: ______________ Cognoms: ______________________________

Adreça: ______________________________________ Telèfon: __________

C.P. ______ Població: ________________ Província: ________________

Correu-e: __________________ Tasca docent (curs, nivell, etc.)__________

Desitge rebre els següents números de la revista "Problemes Olímpics" a la meua adreça:

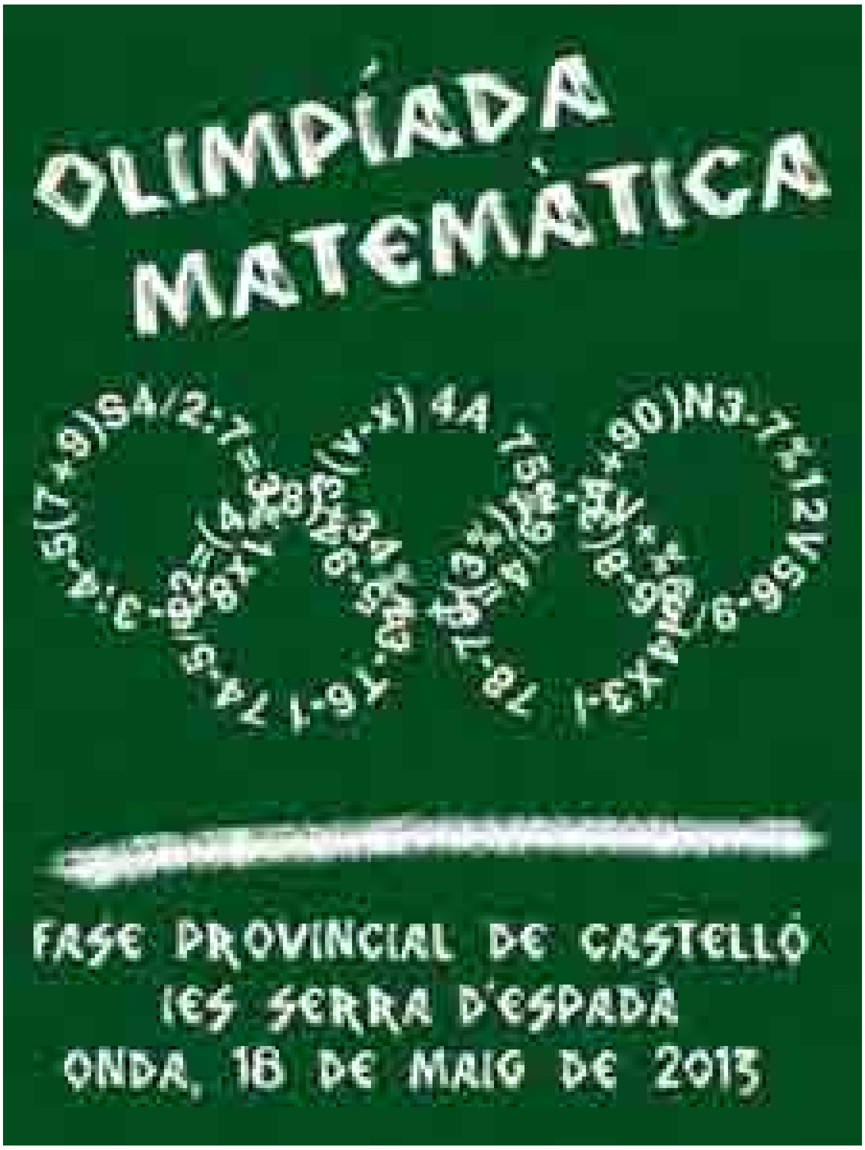
- □ Problemes Olímpics Nº 2 (1.2 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 3 (1.2 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 11 (1.8 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 12 (1.8 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 13 (1.8 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 14 (1.8 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 15 (2.4 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 16 (1.8 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 17 (1.8 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 18 (1.8 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 19 (1.8 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 20 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 21 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 22 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 23 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 24 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 25 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 26 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 27 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 28 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 29 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 30 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 32 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 33 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 34 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 35 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 36 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 37 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 38 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 39 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 40 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 41 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 42 (2.0 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 43 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 44 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 45 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 46 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 47 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 48 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 49 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 50 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 51 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 52 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 53 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 54 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 55 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 56 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 57 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 58 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 59 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 60 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 61 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 62 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 63 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 64 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 65 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 66 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 67 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 68 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 69 (2.5 €)
- □ Problemes Olímpics Nº 70 (2.5 €)

Els números que no apareixen en aquesta llista estan exhaurits.

Ens envies aquesta butlleta emplenada a la nostra adreça: Societat d'Educació Matemàtica "Al-Khwarizmi", Apartat 22.045, 46071-València, indicant en el sobre "Revista Problemes Olímpics", incloent el justificant d'ingrés del preu total dels exemplars que sol·licites al nostre compte de BANKIA: 2038-6301-37-3000011367.

SUMARI

ENUNCIATS



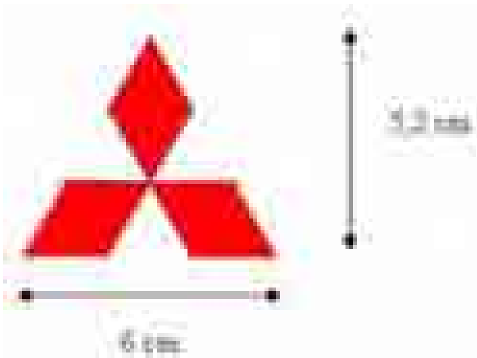
XXIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE PROVINCIAL
PROVÍNCIA DE CASTELLÓ

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. EL LOGOTIP

Estem dibuixant el logotip d'una coneguda marca d'automòbils. Potser la coneixes. Calcula l'àrea de cartró que necessitem per poder fer-lo.



2. LA LLEGUA

En el món dels contes sol aparèixer amb relativa freqüència una unitat de longitud anomenada llegua. Així, les botes de 7 llegües del "Nap-buf", el llibre "20.000 llegües de viatge submarí" de Jules Verne, etc. Les llegües són una unitat de longitud usada pels romans que expressava la distància que una persona en cavalcadura recorre durant una hora.

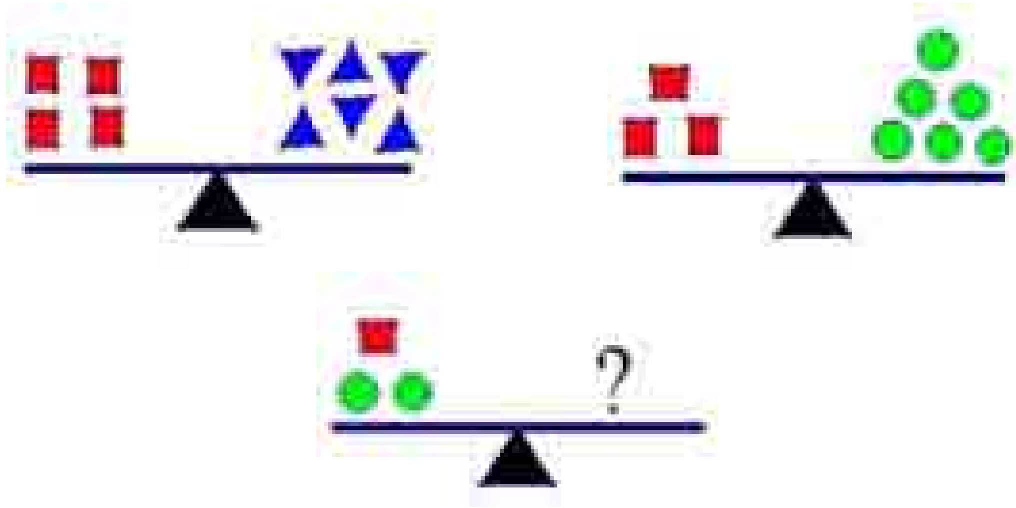
Si sabem que 2 llegües són 6 milles romanes, i que una milla equival a 4.435 metres, quants quilòmetres va recórrer el Nautilus (nom del submarí en la novel·la de Verne) en el seu viatge submarí?

I quants quilòmetres podien recórrer les botes del "Nap-buf"?

NOTA: nap-buf: nom aplicat a una criatura, especialment quan és la xicoteta entre d'altres, o a una persona de poca alçada.

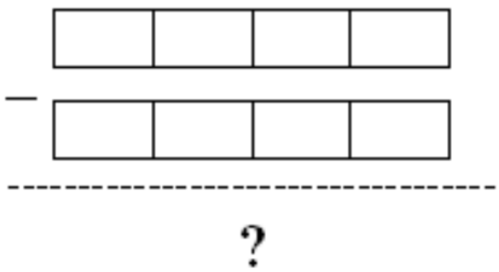
3. QUÈ POSAREM AL PLAT?

Les dues primeres balances estan equilibrades. Ens pots ajudar? Quants triangles blaus caldrà posar al plat per equilibrar la tercera balança?



4. UNA RESTA EN PARTICULAR

Fem servir els vuit dígits o xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8, exactament una vegada cadascun, per formar dos nombres naturals de quatre xifres.



Quina és la diferència més menuda que podem aconseguir entre estos dos nombres si ho fem de totes les maneres possibles?

5. ELS TRES BARRETS

En una taula hi ha tres barrets negres i dos blancs. Tres senyors en fila índia es posen un barret a l'atzar cadascun i sense mirar el color.

Se li pregunta al tercer de la fila, que pot veure el color del barret del segon i el primer, si pot dir el color del seu propi barret, a la qual cosa respon negativament.

Se li pregunta al segon, que veu només el barret del primer, i tampoc pot respondre a la pregunta.

Per últim, el primer de la fila, que no veu cap barret, respon encertadament el color del barret que tenia posat.

Quin és aquest color i quin raonament ha fet per a esbrinar-ho?

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. POTÈNCIES DE 7

Calcula les deu primeres potències de 7.

Estudia la relació que hi ha entre la xifra en què acaba cada potència i el residu que resulta de dividir l'exponent entre 4.

Quina és l'última xifra del nombre $7^{2.013}$?

2. EL LLADRE DE TARONGES

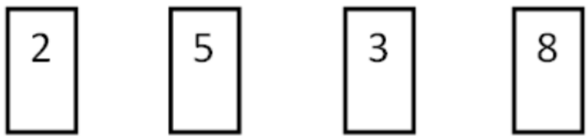
Un lladre travessa tres tanques i arriba a un hort de taronges on es dedica a furtar. En travessar la primera tanca, ja eixint de l'hort, li pareix que ha furtat massa fruita i deixa la meitat de les taronges que ha furtat més mitja taronja. En la segona tanca, cada vegada més penedit, torna a deixar la meitat més mitja. En la tercera repeteix l'operació, i en arribar al carrer s'adona que només li queda una taronja. Si en cap moment ha tallat cap taronja, quantes n'havia furtat?

3. DIAGONALS POLIGONALS

Quantes diagonals es poden traçar en un polígon convex qualsevol de n costats?

4. NOMBRES IMPARELLS

Quants nombres imparells de quatre xifres es poden formar amb les següents targetes?



5. PILOTES DE TENNIS

El diàmetre d'una pilota de tennis és de 65,45 mm. Es venen en tubs cilíndrics de 21 cm de llarg i 3,5 cm de radi amb tres pilotes.

Quin volum queda lliure dins del tub?

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

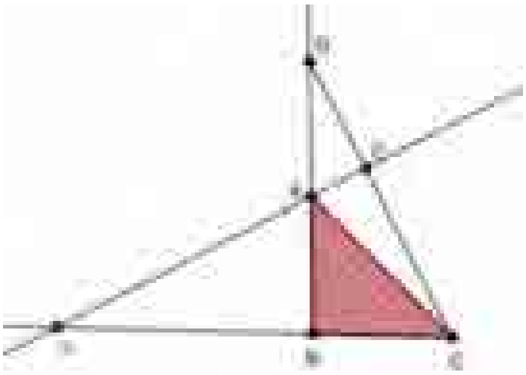
FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. ÀREES DE TRIANGLES

Tenim el triangle ΔABC rectangle en B i isòsceles amb hipotenusa $\sqrt{2}$. Si $\overline{AD} = 1$ i $\overline{CD}$ és perpendicular a $\overline{EF}$, es demana que calculeu raonadament:

a. L'àrea del triangle ΔACD.

b. L'àrea del triangle ΔEFC.



2. EDATS DE FAMÍLIA

Una mare de 42 anys observa que si escriu tres vegades seguides la seua edat obté un nombre de sis xifres que és igual al producte de la seua edat per la del seu home i per les edats dels seus quatre fills.

Quines edats tenen el pare i cadascun dels fills?

3. LES CAMPEROLES

Dues camperoles van portar en total 100 ous al mercat. Una d'elles tenia més mercaderia que l'altra, però va rebre per ella la mateixa quantitat de diners que l'altra. Un cop venuts tots, la primera camperola va dir a la segona:

"*Si jo haguera portat la mateixa quantitat d'ous que tu, hauria rebut 15 monedes.*"

La segona va contestar:

"*I si jo haguera venut els ous que tenies tu, hauria tret d'ells 6 i* $\frac{2}{3}$ *monedes.*"

Quants ous va portar cadascuna?

4. DIVISIBILITAT PER 6

Considera el nombre N:

$$N = 12345678910111213141 5 \ldots .100$$

on els nombres escrits són naturals de l'1 fins a 100 sense espais entre ells.

a. És N divisible entre 6?

b. Fins a quin nombre cal afegir-li (seguint el mateix patró) per a obtenir un múltiple de 3?

5. LA PROPIETAT Z

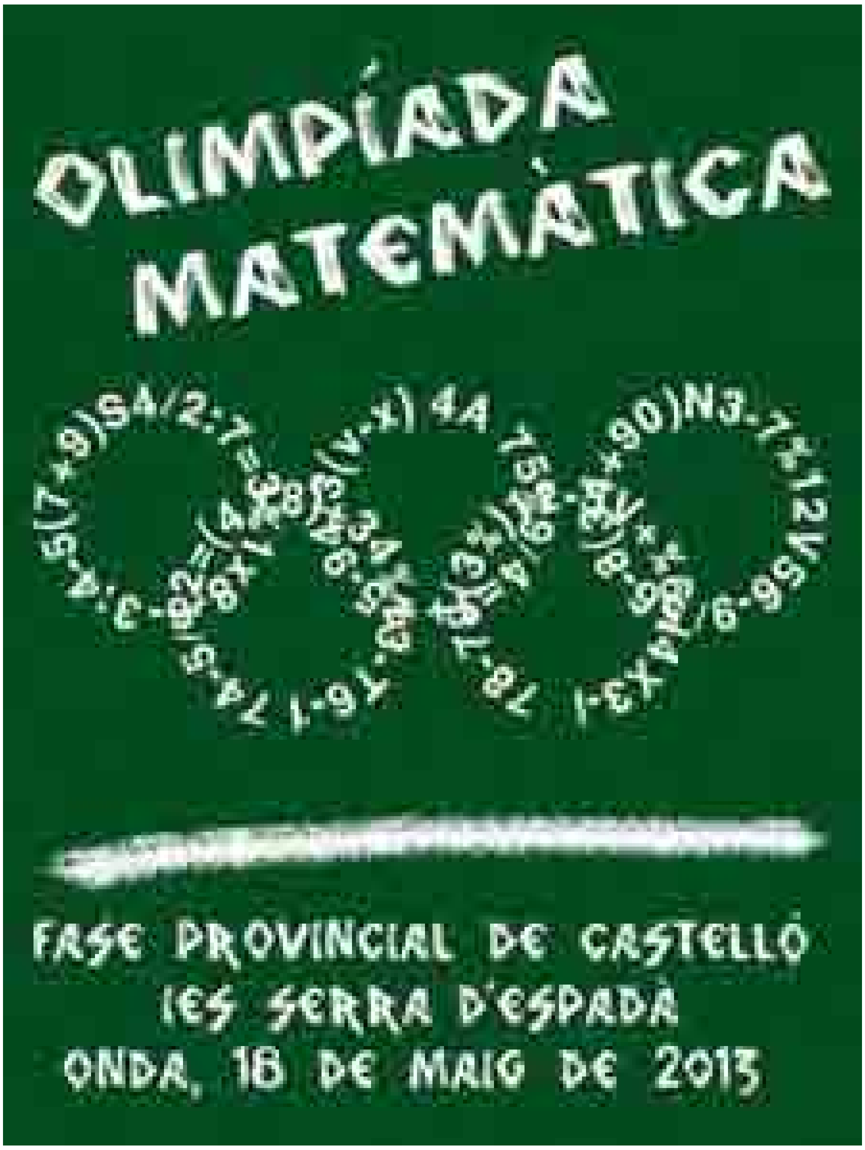
Un nombre de quatre xifres es diu que compleix la propietat Z si les dues xifres de l'esquerra formen un nombre que és el doble del nombre que formen les dues xifres de la dreta.

Per exemple 1.005, ja que 10 és el doble de 05, o el nombre 2.412, ja que 24 és el doble de 12.

a. Proveu que tots els nombres de quatre xifres que compleixen la propietat Z són múltiples de 201.

b. Calculeu la suma de tots els nombres de quatre xifres que compleixen la propietat Z.

SOLUCIONS



XXIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE PROVINCIAL
PROVÍNCIA DE CASTELLÓ

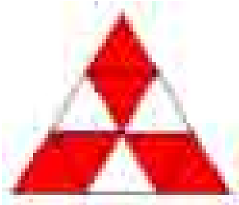
PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. EL LOGOTIP

Solució: L'àrea del logotip ocuparà una superfície de $10,4\ cm^2$.

Aquest logotip de Mitsubishi es pot construir dins d'un triangle equilàter que podem subdividir en 9 triangles equilàters, dels quals colorirem de roig 6.



Calculem en primer lloc l'àrea del triangle gran de base 6 cm i altura 5,2 cm.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6\ \text{cm}^2$$

La part roja és:

$$A_{roja} = \frac{6}{9} A = \frac{2}{3} \cdot 15{,}6 = 10{,}4\ \text{cm}^2$$

2. LA LLEGUA

Solució: a) El Nautilus va realitzar un viatge submarí de 266.100 km; b) Les botes del Nap-buf podien recórrer 93,135 km.

Obtenim la solució a partir de la relació entre les diferents unitats de longitud.

- 2 llegües = 6 milles romanes → 1 llegua = 3 milles romanes
- També sabem que → 1 milla romana = 4435 m
- I per conversió d'unitats → 1.000 m = 1 km

a) Per trobar la longitud del viatge del Nautilus, podrem anar transformant:

$$20.000 \text{ llegües} \rightarrow 20.000 \times 3 = 60.000 \text{ milles } \rightarrow$$

$$\rightarrow 60.000 \times 4.435 = 266.100.000 \text{ m} = 266.100 \text{ km}$$

El Nautilus va realitzar un viatge submarí de 266.100 km.

b) Les botes del Nap-buf podien recórrer:

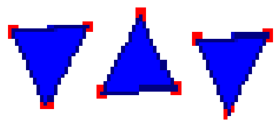
7 llegües → $7 \times 3 = 21$ milles → $21 \times 4.435 = 93.135$ m $= 93{,}135$ km

Així podem dir que les botes del Nap-buf podien recórrer 93,135 km.

3. QUÈ POSAREM AL PLAT?

Solució: Caldrà posar 3 blaves.

La solució que hem pensat és:



ja que si mirem la segona balança podem deduir:

3 roges = 6 verdes → 1 roja = 2 verdes

Si mirem la primera balança es pot deduir:

4 roges = 6 blaves → 2 roges = 3 blaves

A la tercera balança podem deduir que al plat esquerre hi ha:

1 roja + 2 verdes = 1 roja + 1 roja = 2 roges

Amb la qual cosa caldrà posar 3 blaves.

4. UNA RESTA EN PARTICULAR

Solució:

La solució és:

	5	**1**	**2**	**3**
—	**4**	**8**	**7**	**6**
	0	**2**	**4**	**7**

Cal posar dalt el nombre més menut que podem formar, el nombre 1.234, i baix el més gran possible, 8.765, amb la finalitat d'obtenir el resultat tan menut com siga possible.

Per trobar la solució farem una "adaptació" de la darrera xifra per fer possible la resta, posant-les al davant però intercanviades de fila.

5. ELS TRES BARRETS

Solució: El barret és negre.

L'últim de la fila pot veure el color del barret dels seus companys. Si no pot saber quin és el color del seu barret és perquè els altres dos no són blancs, per la qual cosa o són els dos negres o són un de cada color.

El segon de la fila pot veure el color del barret del primer i també sap el que ha pensat el tercer. Si tampoc respon a la pregunta és perquè veu que el color del primer és negre. Si fóra blanc sabria que el seu és negre.

El primer, que coneix el que han deduït els altres companys de darrere, per aquest mateix plantejament dedueix que el seu barret és negre.

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. POTÈNCIES DE 7

Solució: La potència $7^{2.013}$ acaba en 7.

Calculem les primeres potències de 7 per veure què passa amb la seua terminació:

$7^0 = 1$	$7^1 = 7$	$7^2 = 49$
$7^3 = 343$	$7^4 = 2.401$	$7^5 = 16.807$
$7^6 = 117.649$	$7^7 = 823.543$	$7^8 = 5.764.801$
$7^9 = 40.353.607$	....	

Les terminacions es repeteixen cada quatre potències. Hi ha una relació entre la xifra en què acaba cada potència i el residu que resulta de dividir l´exponent entre 4:

- 4 : 4 → residu = 0 → acaba en 1
- 5 : 4 → residu = 1 → acaba en 7
- 6 : 4 → residu = 2 → acaba en 9
- 7 : 4 → residu = 3 → acaba en 3
- 8 : 4 → residu = 0 → acaba en 1
- 9 : 4 → residu = 1 → acaba en 7

La divisió 2.013 : 4 té residu 1, aleshores la potència $7^{2.013}$ acaba en 7.

2. EL LLADRE DE TARONGES

Solució: El lladre havia furtat 15 taronges.

En la primera tanca en deixa $7{,}5 + 0{,}5 = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8$. En queden 7.

En la segona tanca en deixa la meitat més mitja de 7, és a dir:

$3{,}5 + 0{,}5 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$. En queden 3.

En la tercera tanca en deixa la meitat més mitja de 3, és a dir:

$1{,}5 + 0{,}5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$. En queda 1.

Havia furtat x taronges:

- En la primera tanca en deixa:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

  En queden:

$$x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$$

- En la segona tanca en deixa:

$$\frac{\frac{x-1}{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$$

  En queden:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$$

- En la tercera tanca en deixa:

$$\frac{\frac{x-3}{4}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$$

  En queden:

$$\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8}$$

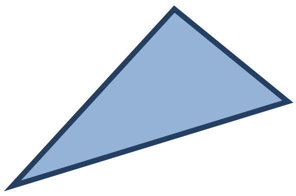
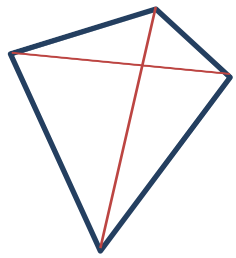
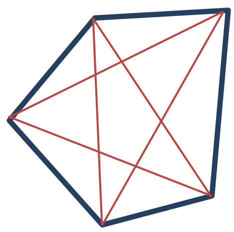
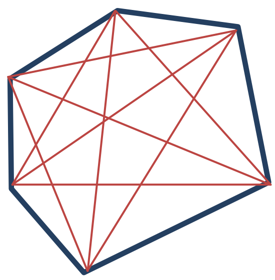
Igualant aquesta expressió a 1 i resolent:

$$\frac{x-7}{8} = 1 \rightarrow x = 8 + 7 \rightarrow x = 15$$

3. DIAGONALS POLIGONALS

Solució: Se'n poden traçar $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ diagonals.

Fem un estudi de polígons i nombre de diagonals que podem traçar-ne:

Polígon	***Nombre de costats (n)***	***Nombre de diagonals (d)***	***Figura***
Triangle	*n=3*	*d=0*	
Quadrilàter	*n=4*	*d=2*	
Pentàgon	*n=5*	*d=5*	
Hexàgon	*n=6*	*d=9*	

De cada vèrtex hem pogut traçar diagonals a tots els altres vèrtexs menys a tres (dreta, esquerra i ell mateix). De n vèrtexs, podem traçar $(n-3)$ diagonals. Cada diagonal entre dos vèrtexs l'hem comptada dues vegades, així que hem de dividir entre dos.

En general: $d = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$

4. NOMBRES IMPARELLS

Solució: Es poden formar 12 nombres imparells de quatre xifres.

En total hi haurà (permutacions de 4 elements): 4! = 24. D'aquestes 24 possibilitats, hi haurà 12 nombres parells i altres tants imparells.

5. PILOTES DE TENNIS

Solució: El volum que queda lliure dins del tub és de 367,77 cm³ aproximadament.

El volum de cada pilota es pot calcular amb la fórmula per al volum d'una esfera:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{6{,}545}{2}\right)^3 \cong 146{,}801 \text{ cm}^3$$

En tindre 3 pilotes, el volum total serà:

$$V_{\text{pilotes}} = 3 \cdot V_{\text{esfera}} \cong 440{,}402 \text{ cm}^3$$

El volum del tub es pot calcular amb la fórmula per al volum d'un cilindre:

$$V_{\text{cilindre}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 21 \cong 808{,}175 \text{ cm}^3$$

El volum que queda lliure dins del tub és la diferència entre el volum del cilindre i el que ocupen les 3 pilotes:

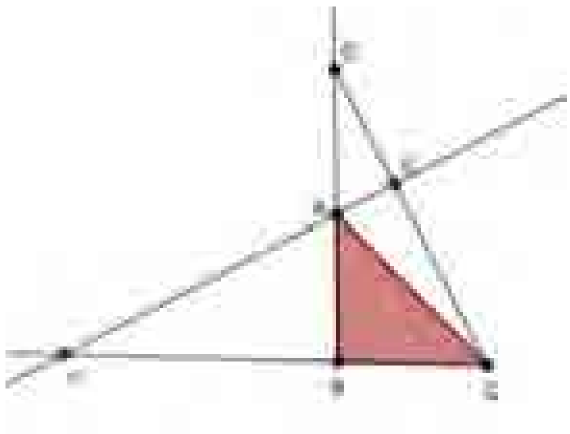
$$V_{\text{lliure}} = V_{\text{cilindre}} - V_{\text{pilotes}} \cong 367{,}773 \text{ cm}^3$$

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. ÀREES DE TRIANGLES

Solució: L'àrea del triangle ACD és $\frac{1}{2}$; b) L'àrea del triangle EFC és $\frac{3}{5}$.



Com ΔABC és rectangle en B i isòsceles, si designem per x els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, en aplicar Pitàgores tenim:

$$2x^2 = 2 \rightarrow x = 1 = \overline{AB} = \overline{BC}$$

1. Podem calcular l'àrea del triangle ΔACD de vàries formes.

Per exemple, si considerem base el costat $\overline{AD} = 1$ i altura $\overline{BC} = 1$ tenim que l'àrea és $\frac{1}{2}$. També podem aplicar:

$$A_{\Delta ACD} = A_{\Delta BCD} - A_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

També es pot aplicar que $\Delta BCD \cong \Delta DAE$ (per ser rectangles i tindre l'angle E comú) i d'ací traure l'altura $\overline{AE}$ i la base que és $\sqrt{5}$.

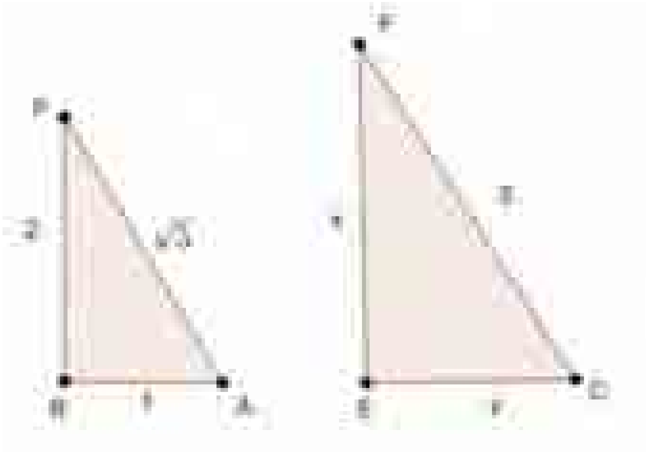
2. Tenim la següent cadena de semblances:

$$\Delta \text{DBC} \cong \left\{\begin{matrix} \angle \text{B} = \angle \text{E} = 90 \\ \angle \text{D és comú} \end{matrix}\right\} \cong \Delta \text{AED}$$

$$\Delta \text{AED} \cong \left\{\begin{matrix} \angle \text{B} = \angle \text{E} = 90 \\ \angle \text{A és oposat pels vèrtex} \end{matrix}\right\} \cong \Delta \text{FBA}$$

$$\Delta \text{FBA} \cong \left\{\begin{matrix} \angle \text{B} = \angle \text{E} = 90 \\ \angle \text{F és comú} \end{matrix}\right\} \cong \Delta \text{FEC}$$

A més, $\Delta \text{FBA} = \Delta \text{DBC}$ per ser semblants i tenir els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ la mateixa mesura: 1. Per tant:



$\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}}$ $\frac{y}{1} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{5}}$ $A_{\Delta EFC} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{\frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{9}{5}$

2. EDATS DE FAMÍLIA

Solució: El pare té 37 anys, i els fills 1, 3, 7 i 13 anys.

Ens diuen que la mare té 42 anys, aleshores sabem que el producte de la seua edat multiplicada per la del seu marit i les edats dels seus quatre fills serà 424.242.

Si dividim aquest nombre entre 42 obtenim 10.101. Això indica que el producte de l'edat del pare per les dels fills és 10.101.

Per tant el problema es redueix a buscar els divisors d'aquest nombre.

Descomponent factorialment tenim:

$$10.101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 1$$

I ja tenim l'edat del pare (37 anys) i la dels 4 fills: 1, 3, 7 i 13 anys.

3. LES CAMPEROLES

Solució: la primera camperola va portar al mercat 40 ous i la segona 60.

Suposem que la primera camperola tenia x ous. La segona tindria: $100 - x$. Si la primera hagués tingut $100 - x$, hauria tret d'ells 15 monedes. Això vol dir que la primera camperola va vendre els ous a:

$$\frac{15}{100 - x}$$

monedes cadascun. D'aquesta manera veiem que la segona camperola va vendre els ous a:

$$\frac{6+\frac{2}{3}}{x}=\frac{20}{3x}$$

monedes cadascun.

Trobem ara la quantitat obtinguda per cada camperola. La primera:

$$x\cdot\frac{15}{100-x}=\frac{15x}{100-x}$$

La segona:

$$(100-x)\cdot\frac{20}{30x}=\frac{20(100-x)}{3x}$$

I com les dues van rebre el mateix, aleshores:

$$\frac{15x}{100-x}=\frac{20(100-x)}{3x}$$

que després de les corresponents transformacions resultarà:

$x^2+160x-8.000=0$, d'on $x_1=40$, $x_2=-200$.

L'arrel negativa no té sentit en aquest cas. El problema no té més que una solució: la primera camperola va portar al mercat 40 ous i la segona 60.

4. DIVISIBILITAT PER 6

Solució: a) N no és divisible per 6; b) Cal afegir-li només el següent nombre, 101.

a) És N divisible entre 6?

Un nombre que siga divisible per 2 i per 3 també ho és per 6. El que anem a fer és comprovar si N és divisible per 2 i per 3.

- Com que N acaba en zero és obvi que és divisible per 2.
- Per a saber si és divisible per 3 cal que calculem la suma de les xifres i comprovem que aquesta suma és múltiple de 3.

Per a fer-ho, comptarem quants uns hi ha, quants dosos hi ha, etc. Emprarem la següent taula per fer el recompte, en la qual el símbol # significa "quantitat de".

Des de…	# 1	# 2	# 3	# 4	# 5	# 6	# 7	# 8	# 9
1……9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10…..19	11	1	1	1	1	1	1	1	1
20…..29	1	11	1	1	1	1	1	1	1
30…..39	1	1	11	1	1	1	1	1	1
40…..49	1	1	1	11	1	1	1	1	1
50…..59	1	1	1	1	11	1	1	1	1
60…..69	1	1	1	1	1	11	1	1	1
70…..79	1	1	1	1	1	1	11	1	1
80…..89	1	1	1	1	1	1	1	11	1
90…..100	2	1	1	1	1	1	1	1	11
TOTAL	**21**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**

En total: $21 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + \ldots + 20 \cdot 9 = 901$, que no és múltiple de 3, per tant N no és múltiple de 6.

b) Fins a quin nombre cal afegir-li (seguint el mateix patró) per a obtenir un múltiple de 3?

Si afegim el nombre 101, la suma de les xifres serà 903, que sí és múltiple de 3.

5. LA PROPIETAT Z

Solució:

a) Els nombres de quatre xifres que compleixen la propietat Z son:

$$1.005, 1.206, 1.407, 1.608, \ldots\ldots\ldots\ldots, 9.648, 9.849$$

que formen una progressió aritmètica de diferencia 201 perquè cada terme de la successió és l'anterior més 201. Per tant:

$$a_n = a_1 + 201 \cdot (n-1) = 1005 + 201 \cdot n - 201 = 201n + 804 = 201 \cdot (n+4)$$

Per tant, cada terme és múltiple de 201.

b) La suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica és:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \left\{ \begin{matrix} 9.849 = 201(n+4) \\ n = \frac{9.849}{201} - 4 = 45 \end{matrix} \right\} = \frac{1.005 + 9.849}{2} \cdot 45 = 244.215$$

ENUNCIATS

XXIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE AUTONÒMICA

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. BOT GENERACIONAL

El iaio Joan té quatre néts. Cadascun d'ells és exactament un any major que el que li segueix en edat. Un any Joan se n'adona que sumant les edats dels seus quatre néts el resultat és la seua edat, que a més a més és múltiple d'11. Quants anys tenen Joan i els seus néts, si sabem que el iaio té més de 50 anys?

2. PESADES

El senyor Manuel diu que amb els seus tres pesos (1 kg, 3 kg, 9 kg) i la balança pot apartar els quilos de llentilles que vulgues, si no passen de 13.

Completa la següent taula per comprovar com ha de pesar els quilos de llentilles:

PLATET A	*PLATET B*	*QUILOS DE LLENTILLES*

3. EDUCACIÓ FÍSICA

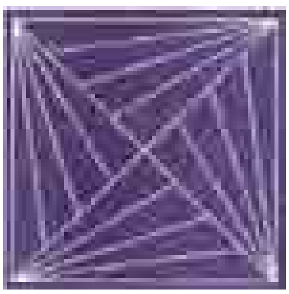
A primera hora del matí els alumnes de 6é A i 6é B, el nombre dels quals oscil·la entre 50 i 100, tenen junts classe d'Educació Física. El professor els divideix sempre en equips de 3, de 5 o de 9 i, quan no hi ha absents, sempre sobra un alumne. Quants alumnes coincideixen en classe d'Educació Física?

4. EL CAU DEL DRAC

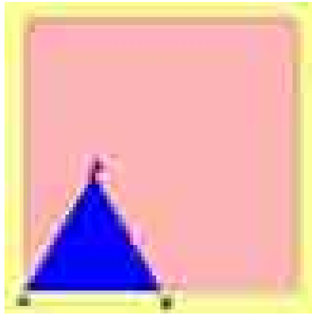
En el videojoc "El cau del Drac" et donen 4 punts quan agafes una palleta d'or i 7 punts quan agafes un diamant. Donant per fet que pots jugar tot el temps que vullgues, quines són les puntuacions que és impossible aconseguir? Raona la teua resposta.

5. TRIANGLES

Quants triangles hi ha en aquesta figura?



6. EL TRIANGLE QUE PEGA VOLTES



Al cantó inferior esquerre del quadrat de 4 metres de costat es troba un triangle equilàter de 2 metres de costat. El triangle 'roda' sense relliscar, sobre els costats del quadrat, per la part interior, mantenint sempre un vèrtex recolçat en el costat del quadrat. Roda fins que torna al seu lloc original després de donar una volta completa.

Fixa't què fa el punt P quan 'roda' el triangle. Dibuixa la trajectoria que ha seguit el punt P, és a dir, marca els punts per on va passant al donar la volta, i calcula la distància que ha recorregut eixe punt.

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. VARIA L'ÀREA?

Si la base d'un triangle augmenta un 10% i l'altura corresponent disminuïx un 10%, quin percentatge variarà l'àrea del dit triangle?

2. UN ENIGMA ENREVESSAT

Tres companys, de cognoms Moreno, Rojo i Rubio, es reunixen per resoldre problemes de mates. De sobte, diu la xica:

"Té gràcia que ens diguem Moreno, Rojo i Rubio, i que els nostres cabells siguen d'eixos colors".

"Sí que la té", va dir el jove de cabell ros, "però hauràs observat que ningú té el cabell del color que es correspon al seu cognom."

"És veritat!", va exclamar Pepito Rojo.

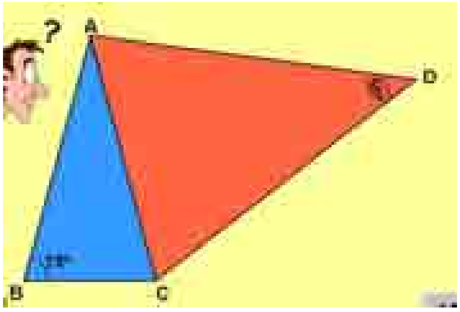
Si Mari Luz no és pèl-roja, de quin color és el cabell de Rubio?

3. QUADRATS DE NATURALS CONSECUTIUS

La diferència entre els quadrats de dos nombres naturals consecutius qualssevol, és parella o imparella? Justifica la resposta.

4. ANGLE

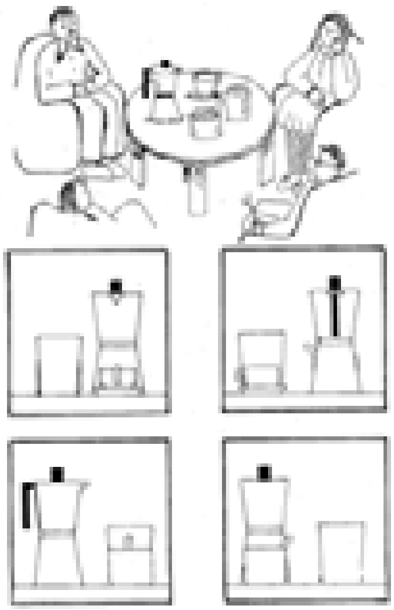
En la figura, $\overline{AD} = \overline{DC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, l'angle $\measuredangle ABC$ mesura 75° i l'angle $\measuredangle ADC$ mesura 50°, quant mesura l'angle $\measuredangle BAD$?



5. TERTÚLIA

Una família està de tertúlia al voltant d'una taula on hi ha diversos objectes.

Relaciona cada vista amb allò que veuen la mare, el pare, la xiqueta i el xiquet.



6. ESPÀRRECS

Un hortolà lligava els manolls d'espàrrecs amb cordes de 20 cm de longitud i els venia a 3 euros. Un altre hortolà utilitzava un cordell de doble longitud i venia els manolls a 6 euros.

Qui guanyava més diners i per què?

7. DISCOS

Un dia Martí li va preguntar a Lola: "Guardes encara alguns discos?"

"No", va respondre Lola, "li vaig regalar la meitat més la meitat d'un disc a Rocio, i la meitat dels restants a Maria, així que només em queda el meu disc preferit". Quants discos tenia Lola?

8. PRIMERA PROVA LÒGICA

El presoner d'un rei ha de triar entre dues habitacions. En una hi ha una dama, i en l'altra un tigre. Si tria la primera, es casa amb la dama. Si tria la segona (probablement) serà devorat pel tigre. El rei posa rètols en les portes i dóna indicacions.

I	II
En aquesta habitació hi ha una dama i en l'altra un tigre.	En una d'aquestes habitacions hi ha una dama i en una d'aquestes habitacions hi ha un tigre.

- "És veritat el que diuen els rètols?" va preguntar el presoner.

- "Un d'ells diu la veritat, però l'altre no." - va replicar el rei.

Quina porta ha de triar per salvar-se?

9. SEGONA PROVA LÒGICA

El presoner d'un rei ha de triar entre dues habitacions, en una de les quals hi ha una dama, i en l'altra un tigre. Si tria la primera, es casa amb la dama. Si tria la segona (probablement) és menjat pel tigre. El rei posa rètols en les portes i dóna indicacions.

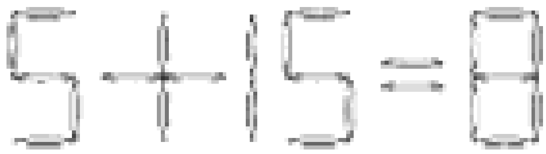
En aquesta prova el rei va indicar que els rètols eren o ambdós verdaders o ambdós falsos. Ací estan els rètols:

I	II
O bé hi ha un tigre en aquesta habitació o bé hi ha una dama en l'altra habitació.	Hi ha una dama en l'altra habitació.

Què conté cadascuna de les habitacions?

10. IGUALTAT AMB FURGADENTS

Desplaçant dos furgadents la igualtat es complix, quins?



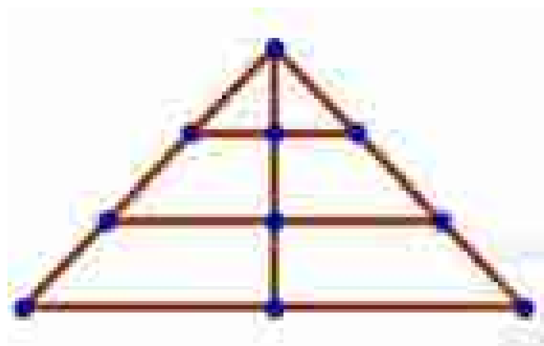
PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. TRIANGLES EN L'AJUNTAMENT DE BENIDORM

En la part central de la fatxada de l'edifici de l'Ajuntament de Benidorm tens este triangle. Al costat s'ha posat una trama de punts amb un esquema bàsic.

Quants triangles rectangles pots trobar *que tinguen els vèrtexs en esta trama* de punts?



ESTACIÓ 2. OCUPANT SEIENTS

Quan vinc al parc a seure uns dies em trobe un dels seients ocupat i la resta lliures. Així em passa amb els altres. Altres vegades me'ls trobe tots ocupats, o estan com en la foto.

De quantes maneres distintes em puc trobar este racó del parc?

ESTACIÓ 3. EN UN PATI INTERIOR

Localitzeu este pati interior del Parc de L'Aigüera. Calculeu la superfície de la figura emmarcada pel rivet exterior negre.

ESTACIÓ 4. FONT EN EL PARC DE L'AIGÜERA

Hi ha unes quantes fonts com esta en el parc.

Dóna un procediment per a calcular la quantitat d'aigua que cap en la part inferior de les fonts. Descriu tot el procediment i els càlculs que realitzes.

ESTACIÓ 5. PINTANT LA ZONA D'ESCACS

Esta zona per jugar als escacs s'ha quedat un poc vella, així que tot el que està pintat de verd anem a pintar-ho una altra vegada. Quant ens costarà sabent que el m² de pintura té un preu de 1,73 €?

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. EL VIDEOJOC

L'enunciat es correspon amb el del problema 4 de la prova individual de nivell C.

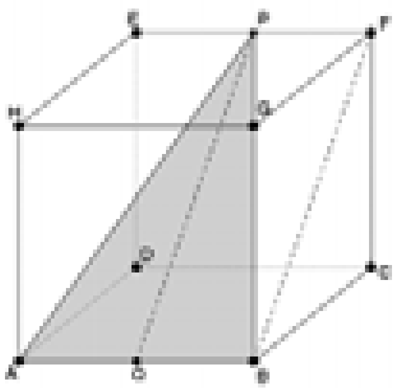
2. A LA PERRUQUERIA

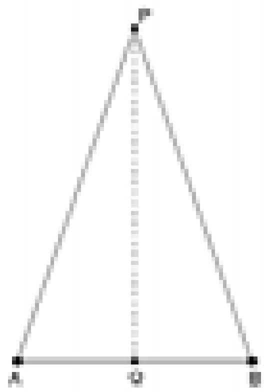
Dos productes per a la cura dels cabells contenen el 30% i el 3% d'un principi actiu respectivament. Per al seu ús òptim, cal mesclar-los per obtenir un nou producte que tinga el 12% del principi actiu. En quina proporció hem de mesclar els dos productes?

3. CUB AMB TRIANGLE

Siga $ABCDEFGH$ un cub d'aresta 2. Siga P el punt mitjà de l'aresta $\overline{EF}$.

Determineu l'àrea del triangle ΔAPB i la mesura de l'angle $\measuredangle APB$.





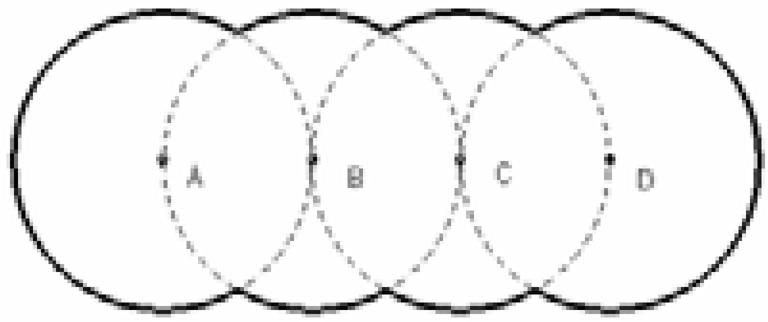
4. DE COMPRES

A l'eixir de compres a una botiga de París portava en el portamonedes uns 15 euros en monedes d'un euro i de 20 cèntims. Al tornar, portava tants euros com monedes de 20 cèntims tenia al començament, i tantes monedes de 20 cèntims com monedes d'euro tenia abans.

En el portamonedes em quedava un terç dels diners que portava a l'eixir de compres. Quant em van costar les compres?

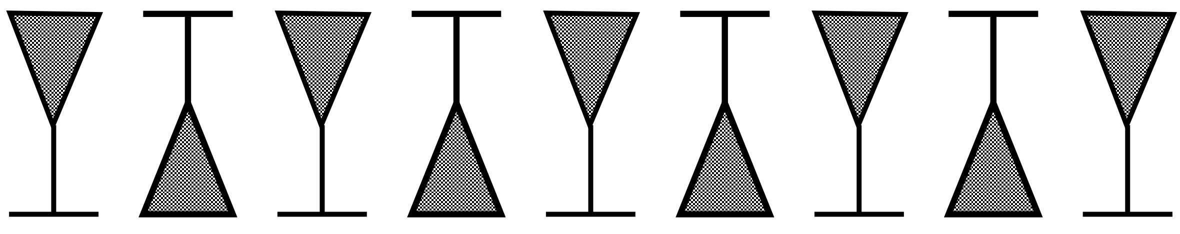
5. CERCLES

Calcula la longitud de la trajectòria curvilínia assenyalada amb traç gros continu. Els cercles tenen els seus centres als punts A, B, C i D. El diàmetre és el mateix per als quatre cercles, i val 5 cm.



6. DE FESTA

Tenim sobre la taula una filera de copes. Hi ha 5 boca per amunt alternant-se amb 4 que estan boca per avall. Es tracta d'anar donant la volta a les copes, sempre de dues en dues, fins a aconseguir que queden 4 boca per amunt i 5 boca per avall. Series capaç?

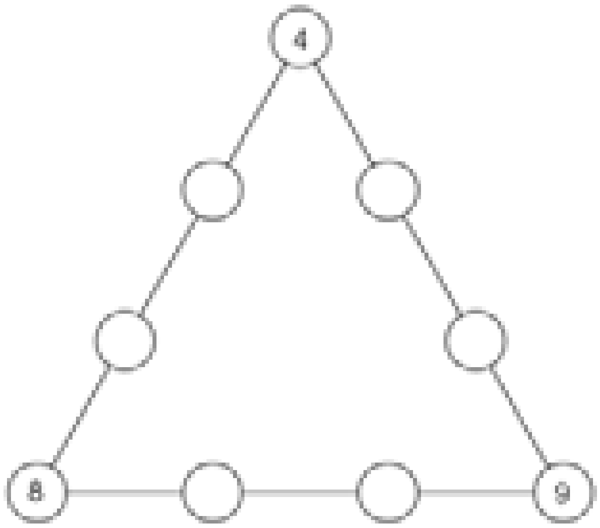


PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. NOMBRES EN TRIANGLES

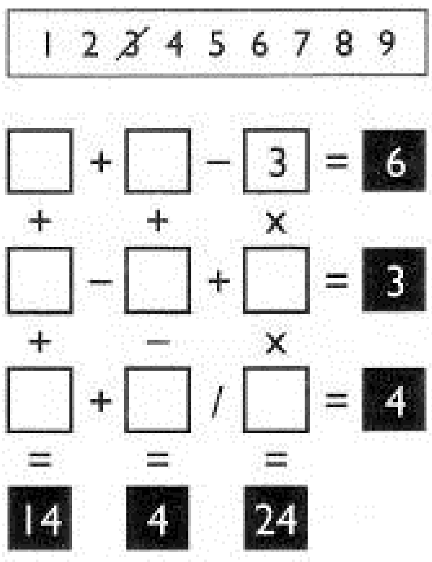
En els cercles d'este triangle col·loca les nou xifres de l'u al nou, sense repetir-les, de forma tal que la suma de cada costat siga 22.



2. PRIMERA PROVA LÒGICA

L'enunciat es correspon amb el del problema 8 de la prova de velocitat de nivell C.

3. ENCREUAT NUMÈRIC

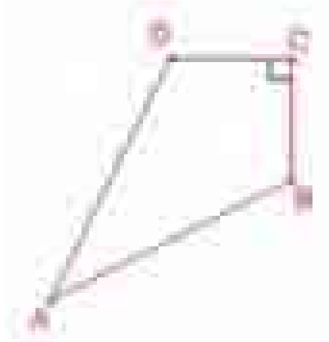


4 L'ÀREA DEL CATXIRULO

Siga el quadrilàter $ABCD$:

$\overline{BC} = \overline{CD} = 1, \overline{AB} = \overline{AD} = \sqrt{5}, C = 90°$

Calculeu l'àrea del quadrilàter $ABCD$.



5. IGUALTAT AMB FURGADENTS

L'enunciat es correspon amb el del problema 10 de la prova de velocitat de nivell C.

6. TERTÚLIA

L'enunciat es correspon amb el del problema 5 de la prova de velocitat de nivell C.

7. PARE I FILL

Conversació entre dos matemàtics:

A: La meua edat és múltiple de la del meu fill.

B: Això no és tan difícil. Hi ha molts casos. Dóna'm més pistes.

A: La diferència entre les nostres edats és un múltiple de 9.

B: Això no és una pista. Amb la dada inicial, això passa segur.

A: La diferència entre les nostres edats és un quadrat perfecte.

B: Si fores un ancià ja tindria la solució, però sé que no tens tants anys i també crec que no vas ser un pare precoç, Per això ja sé la desena de la teua edat.

A: Bé, per tant amb esta pista ja ho tens: la diferència és el quadrat de l'edat del meu fill.

Quines edats tenen el pare i el fill?

8. UNA SUMA LITERAL

En la següent suma cada lletra diferent representa una xifra diferent.

A més, es dóna la circumstància que el nombre representat per la paraula CINC és múltiple de 5, i que el representat per la paraula SIS es múltiple de 6.

Esbrina el valor que ha de prendre cada lletra perquè la suma siga certa.

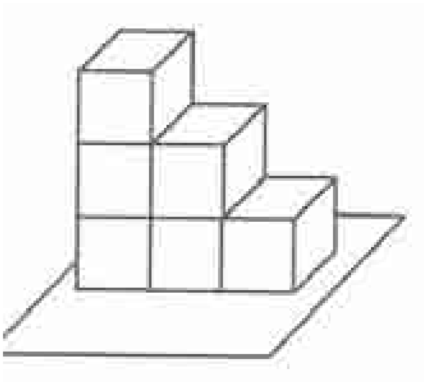
$$\begin{array}{ccccc} & C & I & N & C \\ + & & S & I & S \\ \hline & O & N & Z & E \end{array}$$

9. SEGONA PROVA LÒGICA

L'enunciat es correspon amb el del problema 9 de la prova de velocitat de nivell C.

10. DAUS

Sis daus estan situats sobre terra tal com mostra la figura. En cada dau, l'1 és oposat al 6, el 2 és oposat al 5, i el 3 és oposat al 4. Quina és la màxima suma possible dels nombres situats en les 21 cares visibles?



PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. TRIANGLES EN L'AJUNTAMENT DE BENIDORM

L'enunciat es correspon amb el de l'estació 1 de la prova de camp de nivell C.

ESTACIÓ 2. OCUPANT SEIENTS

L'enunciat es correspon amb el de l'estació 2 de la prova de camp de nivell C.

ESTACIÓ 3. FONT EN EL PARC DE L'AIGÜERA

L'enunciat es correspon amb el de l'estació 4 de la prova de camp de nivell C.

ESTACIÓ 4. DODECÀGON EN FANALS

Els fanals dels jocs infantils contenen algunes de les diagonals d'un dodecàgon regular.

A l'esquerra tens el dodecàgon i a la dreta la trama dels seus vèrtexs.

a. Quants triangles equilàters podries dibuixar amb els vèrtexs en els del dodecàgon?

b. Quants triangles isòsceles de formes distintes hi ha amb els vèrtexs en el dodecàgon?

ESTACIÓ 5. FONT AMB CIRCUMFERÈNCIES

La font mostra unes quantes circumferències. La solució es va adoptar després d'analitzar les dimensions i l'efecte estètic que tenien dues solucions més distintes.

Una contemplava només cinc circumferències i l'altra quinze. Quina quantitat -lineal- de ferro s'hauria necessitat per fer la font gran que només es va dissenyar?

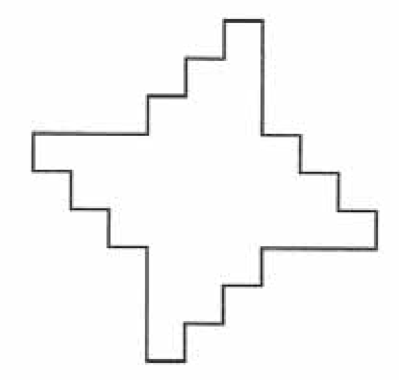
PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. PERÍMETRE

En la figura adjunta el contorn exterior està format per angles rectes. Els quatre costats més llargs són de la mateixa longitud, i tots el costats de menor longitud són també de la mateixa longitud.

L'àrea de la figura és de 528 unitats quadrades. Quin és el perímetre?



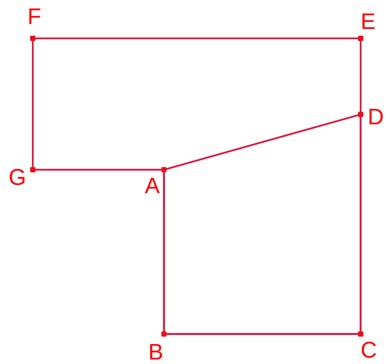
2. CREANT ESPAIS

En la figura, ABCEFG és una habitació amb els cantons perpendiculars tal que:

$\overline{EF} = 20$ m, $\overline{AB} = 10$ m, $\overline{AG} = \overline{GF}$. L'àrea total és 280 m^2.

Volem crear en aquesta habitació dos espais d'igual àrea mitjançant una paret $\overline{AD}$.

Calculeu la distància de C a D.



3. TARGETES DESORDENADES

Les targetes 1, 2, 3, i 4 són blanques. Les targetes 5, 6, 7 i 8 són negres. Col·loca-les perquè es complisquen totes les afirmacions (de dues maneres distintes).

1 Les dues següents són negres.	2 Les dues següents són de distint color.	3 L'anterior és del mateix color que la següent.	4 Hi ha tantes negres abans com després.
5 L'anterior és del mateix color que la següent.	6 L'anterior és blanca.	7 Les dos següents són del mateix color .	8 L'anterior és negra.

4. COMPTANT BÉ

Observeu com apareixen les lletres de la paraula ESTALMAT en el diagrama següent.

Hi ha moltes maneres de llegir esta paraula, començant amb la lletra E de la primera fila i arribant a la lletra T de la diagonal.

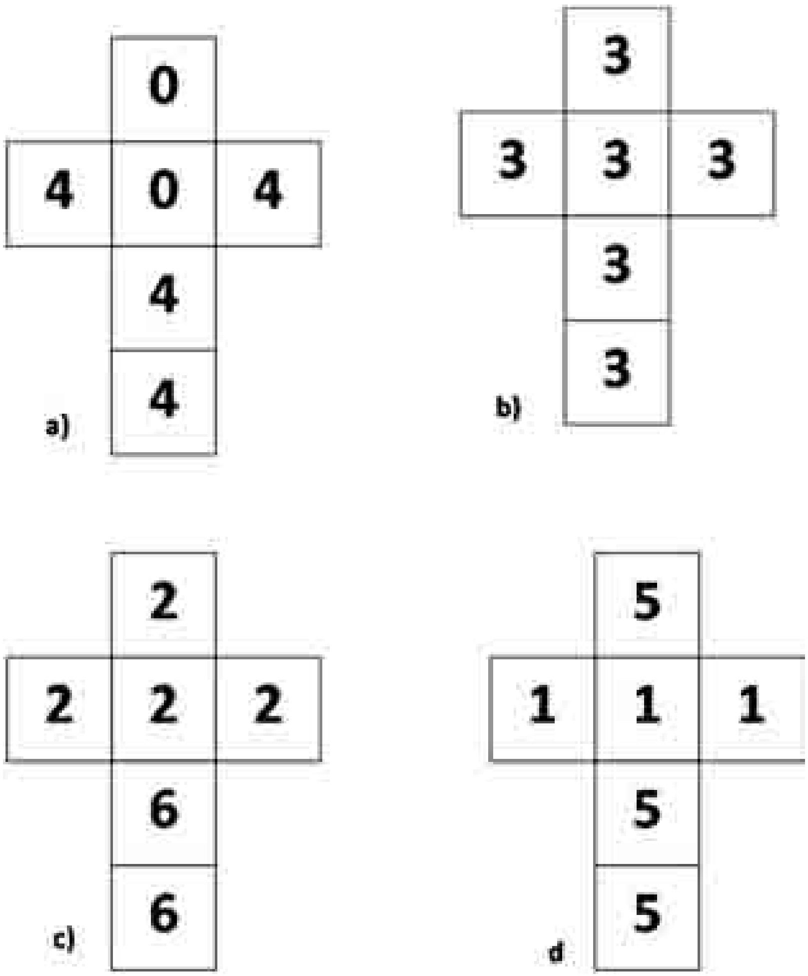
Quantes maneres trobeu en total?

E S T A L M A T
S T A L M A T
T A L M A T
A L M A T
L M A T
M A T
A T
T

5. DAUS DE BRADLEY EFRON

S'han pres 4 daus a, b, c i d i s'ha posat en les cares els nombres que veus. Un primer jugador tria un dau i un segon jugador tria un dels restants. Cadascun llança el seu dau i guanya qui obté major puntuació.

Analitza què passa en cada cas i digues quan et convé triar primer o segon.



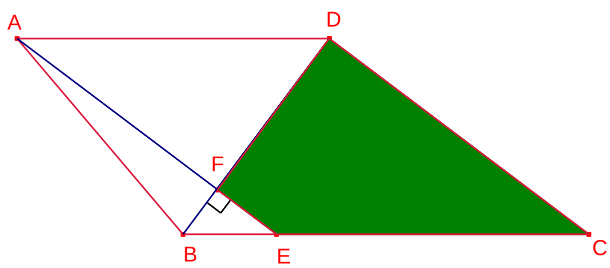
6. L’ÀREA DEL QUADRILÀTER

Siga el trapezi $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{BC}$, $\overline{AD}$. A més a més, $\overline{BD}$ és perpendicular a $\overline{DC}$.

Siga E un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD}$ i $\overline{AE}$ són perpendiculars.

Siga F la intersecció dels segments $\overline{BD}$ i $\overline{AE}$.

Si $\overline{AB} = 41$, $\overline{AD} = 50$ i $\overline{BF} = 9$ calculeu l’àrea del quadrilàter $FECD$.



PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

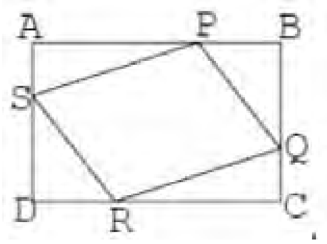
1. UNA GRAN M

Amb tres línies rectes, talla la "M" de manera que es formen 9 triangles.

2. DAUS

L'enunciat es correspon amb el del problema 10 de la prova de velocitat de nivell A.

3. ÀREA DEL PARAL·LELOGRAM



Sobre els costats d'un rectangle $ABCD$ vam dibuixar punts P, Q, R, S que divideixen els costats en la raó 1:2, com es veu en la figura.

Calcula quina part de l'àrea total del rectangle $ABCD$ representa el paral·lelogram $PQRS$.

4. SISTEMA D'EQUACIONS NO LINEAL

Resol el següent sistema d'equacions: $\begin{cases} x^3y = 10^9 \\ \frac{x}{y^2} = 10^3 \end{cases}$

5. MATEMÀTIQUES A MART

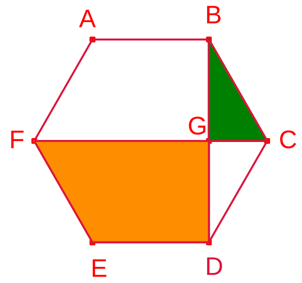
S'ha descobert vida intel·ligent a Mart. Allí, a més de gastar les quatre operacions d'ací, n'utilitzen dues més que vénen donades de la següent manera: $a\Delta b = 5^a - b^2$ $\qquad c\nabla b = \sqrt{\frac{c}{b}}$

Sabries calcular $(3\Delta 5)\nabla(2\Delta 4)$?

6. COMPARANT ÀREES

En l'hexàgon regular $ABCDEF$ les diagonals $\overline{BD}$, $\overline{FC}$ s'intersecten en el punt G.

Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter $FEDG$ i el triangle ΔBCG.



7. AMICS EN FILA ÍNDIA

Cinc amics, Antonio, Blanca, Cèlia, Darío i Eugènia, es col·loquen en "fila índia", però tu no saps l'ordre en què estan col·locats. Es posen a comptar números de 5 en 5: el primer diu 5, el segon diu 10, el tercer diu 15, el quart diu 20, el cinquè diu 25, el primer seguix amb 30, el segon 35, el tercer 40, etc. I continuen comptant de 5 en 5. Se sap que Antonio ha dit 140, Blanca 160, Cèlia 130 i Darío 170.

En quin ordre es troben col·locats els amics en la fila? Qui d'ells diria 18.495?

8. ENGANYANT LA BALANÇA

Cinc amigues van descobrir que pesant-se dos a dos, i intercanviant-se cada vegada, podien conéixer el pes gastant una sola moneda.

Per parelles pesaven 129 kilos, 125, 124, 123, 122, 121, 120, 118, 116 y 114. Cal trobar ara el pes de cadascuna per separat.

9. TERTÚLIA

L'enunciat es correspon amb el del problema 5 de la prova de velocitat de nivell C.

10. IGUALTAT AMB FURGADENTS

L'enunciat es correspon amb el del problema 10 de la prova de velocitat de nivell C.

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. TRIANGLES EN L'AJUNTAMENT DE BENIDORM

L'enunciat es correspon amb el de l'estació 1 de la prova de camp de nivell C.

ESTACIÓ 2. CUBS PEL SÒL

Observa estos dos quadrats que tenen vèrtexs en la trama. Volem construir dos cubs, un xicotet i un altre gran que tinguen per vèrtexs inferiors els que s'han marcat.

Pren mesures de l'aresta per a calcular la superfície exterior i el volum del cub xicotet.

Mesura l'aresta del cub gran. Si obtens la proporció entre les arestes, es podria calcular directament la superfície exterior i el volum del cub gran?

Quin és cub més gran que es pot construir en el recinte? Dóna les dimensions de la base.

ESTACIÓ 3. FONT EN EL PARC DE L'AIGÜERA

L'enunciat es correspon amb el de l'estació 1 de la prova de camp de nivell C.

ESTACIÓ 4. DODECÀGON EN FANALS

L'enunciat es correspon amb el de l'estació 4 de la prova de camp de nivell A.

ESTACIÓ 5. ALTURA DE L'HOTEL

Junt al Parc de l'Aigüera es troba l'Hotel Prince Park.

Busca un mètode per calcular l'altura de l'hotel i calcula-la. Només hi ha una condició: totes les mesures les has de prendre dins del parc.

SOLUCIONS

XXIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA FASE AUTONÒMICA

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. BOT GENERACIONAL

Solució: L'avi té 66 anys i els seus néts, 15, 16, 17 i 18 anys.

Si designem amb la lletra e l'edat del menor dels néts, podem escriure la suma de les quatre edats com:

$$e + (e + 1) + (e + 2) + (e + 3) = 4e + 6 = 2(2e + 3)$$

Aquest nombre és múltiple de 2. Com també és múltiple d'11, ho haurà de ser el factor $2e + 3$.

Si pensem ara en l'edat de l'avi, els primers múltiples d'11, parells i majors que 50 són 66, 88 i 110.
Per a una edat de 66 anys, tenim que $2e + 3 = 33 \rightarrow e = 15$. La solució corresponent és que els néts tenen 15, 16, 17 i 18 anys.

Per a 88 anys trobarem $e = 20{,}5$. No considerarem aquesta possibilitat.

110 anys és una edat molt provecta, però si teniu curiositat, podreu comprovar que en eixe cas els néts tindrien 26, 27, 28 i 29 anys.

2. PESADES

Solució:

PLATET A	*PLATET B*	*QUILOS DE LLENTILLES*
1	0	1
3	1	$3-1=2$
3	0	3
$3+1$	0	$3+1=4$
9	$3+1$	$9-4=5$
9	3	$9-3=6$
$9+1$	3	$10-3=7$
9	1	$9-1=8$
9	0	9
$9+1$	0	$9+1=10$
$9+3$	1	$12-1=11$
$9+3$	0	$9+3=12$
$9+3+1$	0	$9+3+1=13$

3. EDUCACIÓ FÍSICA

Solució: Hi ha 91 alumnes que fan classe d'Educació Física.

Busquem un múltiple comú a 3, 5 i 9 comprés entre 50 i 100. Com el mcm (3, 5, 9) = 45, eixe múltiple buscat és 90.

Per tant, són 91 els alumnes que donen classe d'Educació Física

4. EL CAU DEL DRAC

Solució: Són impossibles d'aconseguir les següents puntuacions: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13 i 17.

Podem classificar els nombres en 0: múltiple de 4; 1: següent a un múltiple de 4; 2: dues unitats major que un múltiple de 4; 3: tres unitats majors que un múltiple de 4.

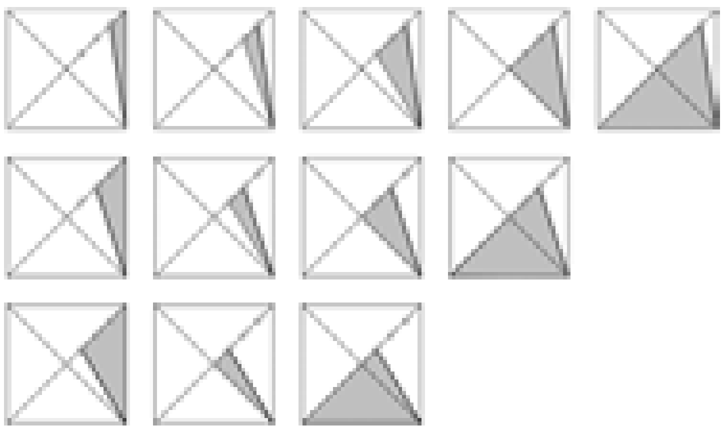
Tots els nombres naturals pertanyen a una i sols una d'aquestes quatre classes. Deu resultar evident que si un nombre *n* d'una d'aquestes classes es pot aconseguir en el joc, tots els nombres majors que *n* i de la mateixa classe que *n* es podran aconseguir afegint la puntuació 4 un nombre determinat de vegades. Així, el problema es redueix a determinar quin és el primer nombre de cada una d'aquestes classes que es pot aconseguir amb les regles de puntuació del joc. En la taula següent s'indica com es pot aconseguir cada un d'aquests nombres, i apareixen requadrats els que no es poden aconseguir:

Classe 0	**Classe 1**	**Classe 2**	**Classe 3**
$0 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 7$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
4	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$7 = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 7$
8	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	11
12	$\boxed{13}$	$14 = 0 \cdot 4 + 2 \cdot 7$	15
16	$\boxed{17}$	18	19
20	$21 = 0 \cdot 4 + 3 \cdot 7$	22	23

5. TRIANGLES

Solució: Hi ha 56 triangles.

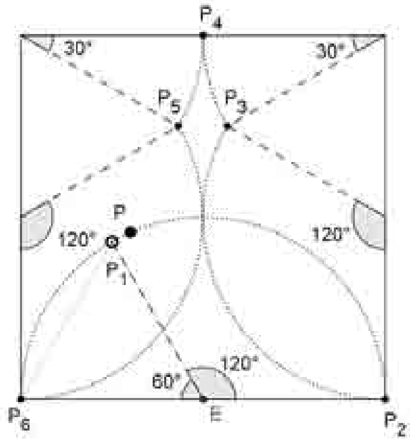
Amb els segments interiors de cada un dels quatre triangles rectangles isòsceles en què divideixen la figura les dues diagonals, se'n poden formar 12 triangles:



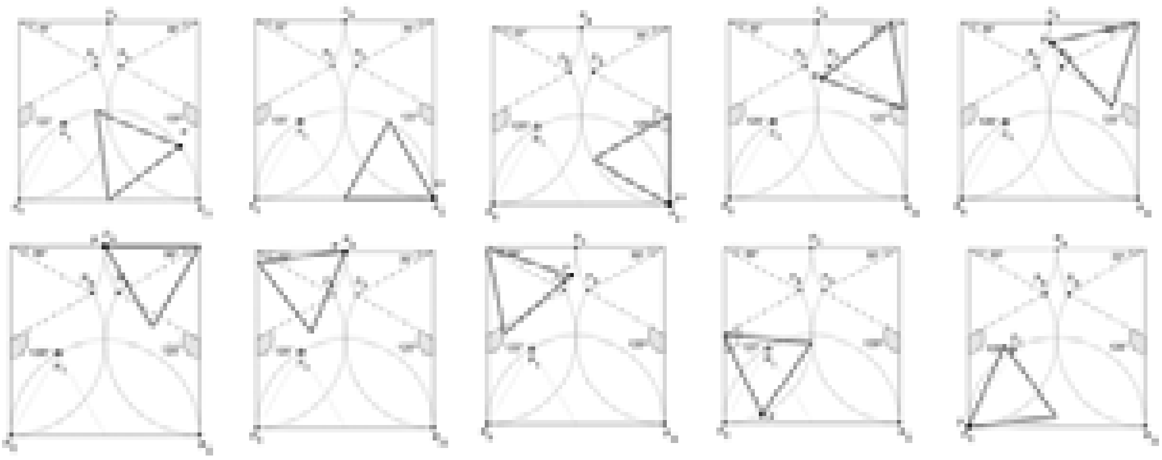
Això fa un total de 48. Cal afegir a eixa quantitat els quatre triangles considerats al principi, i quatre més: els que es poden formar amb cada parell de costats consecutius del quadrat i la diagonal oposada al vèrtex comú.

6. TRIANGLE QUE PEGA VOLTES

Solució: El punt P ha recorregut $\frac{14}{3}\pi$ m.



El punt P recorre en primer lloc l'arc que en la figura uneix el punts P_1 i P_2. En P_2 fa de centre de gir i després continua per l'arc P_2P_3. En P_3 el moviment canvia de centre (el centre, que era el punt mitjà del costat, passa a ser el vèrtex del quadrat) i P es desplaça per l'arc P_3P_4. En P_4 és P novament el centre de gir i després recorre l'arc P_4P_5 durant el gir que té centre en el vèrtex superior esquerre del quadrat. Quan P arriba a P_5 el moviment canvia novament de centre de gir, que ara serà el punt mitjà del costat esquerre del quadrat: P descriu l'arc P_5P_6. Amb P en P_6 la rotació del triangle es fa amb centre en P i el triangle torna a la posició original.



En l'ordre descrit, la suma de les amplituds dels arcs que recorre P és: 120° + 120° + 30° + 30° + 120° = 420°.

Com que el radi d'aquests arcs coincideix amb el costat del triangle, de longitud 2 m, la longitud de la trajectòria és $\frac{420°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 = \frac{14}{3}\pi$ m.

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. VARIA L'ÀREA?

Solució: L'àrea disminuirà un 1%.

Suposem un triangle de base b i altura h sobre eixe costat. L'àrea és:

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$$

Si augmentem la base un 10%, aquesta valdrà $1{,}1 \cdot b$, i si disminuïm l'altura un 10% valdrà $0{,}9 \cdot h$.

Per tant, la nova àrea serà:

$$A_2 = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{1{,}1b \cdot 0{,}9h}{2} = 0{,}99 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 0{,}99A_1$$

És a dir, la àrea de triangle modificat ha disminuït un 1% respecte de l'àrea del triangle original.

2. UN ENIGMA ENREVESSAT

Solució: És roig.

Segons la informació de què disposem, sabem que Pepito Rojo no és pel-roig, ja que "ningú té el color que es correspon al seu cognom". A més a més, ens diuen que M. Luz tampoc és pèl-roja. Per tant, per descart ha de ser Rubio el pèl-roig.

3. QUADRATS DE NATURALS CONSECUTIUS

Solución: És imparell.

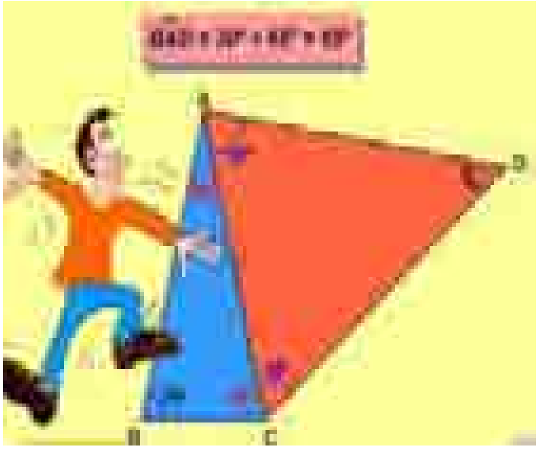
Efectivament, és imparell, ja que:

$$(n\ + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

expressió que correspon a un nombre imparell ($2n$ és parell per ser múltiple de dos, i si li sumem un es convertix en imparell).

4. ANGLE

Solució: L'angle mesura 95°.



5. TERTÚLIA

Solució:

1. Mare: Vista superior esquerra.
2. Pare: Vista superior dreta.
3. Xiqueta: Vista inferior esquerra.
4. Xiquet: Vista inferior dreta.

6. ESPÀRRECS

Solució: L'hortolà que més diners guanya és el de la corda menuda.

Per poder comparar la quantitat d'espàrrecs que ven cada hortolà hem de tindre en compte la superfície que poden abraçar amb cada corda, que es correspon amb la superfície d'una circumferència.

$$S_{circ} = \pi r^2$$

Amb la corda de 20 cm (que és la longitud de la circumferència), el radi serà:

$$r_1 = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \text{ cm}$$

Es pot abraçar una superfície:

$$S_1 = \pi \cdot \frac{10^2}{\pi^2} = \frac{100}{\pi} \text{ cm}^2$$

Amb la corda de 40 cm:

$$r_2 = \frac{40}{2\pi} = \frac{20}{\pi}\ \text{cm} \rightarrow S_2 = \pi \cdot \frac{20^2}{\pi^2} = \frac{400}{\pi}\ \text{cm}^2$$

que resulta ser quatre vegades més gran que la superfície de la corda menuda.

Si amb la corda gran es pot abraçar quatre vegades el nombre d'espàrrecs que amb la corda menuda i l'hortolà només els ven al doble de preu, està clar que qui guanya més diners és el de la corda menuda.

7. DISCOS

Solució: Lola tenia 5 discos abans del repartiment.

<u>Raonament per tempteig:</u>

De la següent afirmació: "li vaig regalar la meitat més la meitat d'un disc a Rocio" es pot deduir que el nombre de discos que tenia Lola originalment ha de ser imparell (d'altra manera, tindríem un disc partit per la meitat, i això no té sentit).

A partir d'ací, cal anar provant amb els nombres imparells fins que trobem aquell que complisca les condicions del problema. En aquest cas, la solució és 5. Comprovació: va regalar la meitat (2,5) més la meitat d'un disc (0,5), és a dir, 3 discos, a Rocio. En queden dos, i ven la meitat (un disc) a Marta. Efectivament, a Lola només li queda un disc, que és el seu disc preferit.

<u>Raonament algebraic:</u>

Siga x el nombre de discos que tenia Lola al principi. Regala a Rocio:

$$\frac{\mathrm{x}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

Li'n queden:

$$x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$$

Dels que li queden, regala la meitat a Marta:

$$\frac{\frac{x-1}{2}}{2} = \frac{x-1}{4}$$

I al remat li'n queda un:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{4} = 1$$

Resolent: $(2x - 2) - (x - 1) = 4 \rightarrow 2x - 2 - x + 1 = 4 \rightarrow x = 5$

8. PRIMERA PROVA LÒGICA

Solució: Ha d'escolllir la porta amb el cartell II.

Si el primer cartell fóra cert, el segon també ho seria. Això no pot ser, ja que segons l'enunciat, un n'ha de ser fals.

Per tant, el primer és fals i el segon és cert.

Aleshores, ha d'escollir la porta amb el cartel II.

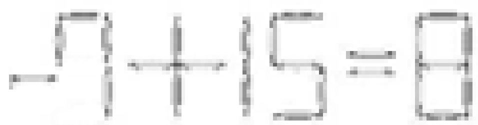
9. SEGONA PROVA LÒGICA

Solució: En la primera habitació hi ha un tigre i en la segona una dama.

Si les dues foren certes, es donaria un cas imposible. Si les dues foren falses, tindríem un cas posible. Per tant, en la primera habitació hi ha un tigre i en la segona una dama.

10. IGUALTAT AMB FURGADENTS

Solució: Una possible solució és:



PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. EL VIDEOJOC

La solució es correspon amb la del problema 4 de la prova individual de nivell C.

2. A LA PERRUQUERIA

Solució: La proporció és d'1 a 2.

Si mesclen x litres del producte al 30%, i y litres al 3% i volem que siga del 12% la mescla, obtenim la següent igualtat:

$$\frac{x \cdot 0{,}30 + y \cdot 0{,}03}{x+y} = 0{,}12$$

Operant, tenim: $x \cdot 0{,}30 + y \cdot 0{,}03 = (x+y) \cdot 0{,}12$

$$x \cdot 0{,}30 - x \cdot 0{,}12 = y \cdot 0{,}12 - y \cdot 0{,}03$$

Aleshores: $x \cdot 0{,}18 = y \cdot 0{,}09$

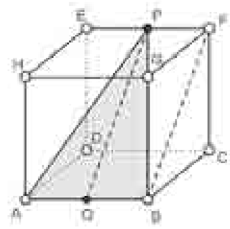
I per tant:

$$\frac{x}{y} = \frac{0{,}09}{0{,}18} = \frac{1}{2}$$

Per tant, hem de mesclar en la proporció 1:2 (per cada part del 30% dues parts del 3%).

3. CUB AMB TRIANGLE

Solució: L'àrea del triangle és $\mathbf{2\sqrt{2}}$ u.s. L'angle té aproximadament 38,94° d'amplitud.

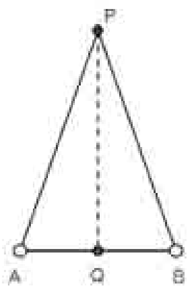


El triangle ΔAPB és isòsceles.

Siga Q el punt mitjà de l'aresta $\overline{AB}$: $\overline{PQ} = \overline{FB}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle ΔFGB: $\overline{PQ} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

L'àrea del triangle ΔAPB és:



$$S_{APB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PQ}}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ u.s.}$$

L'angle no es pot obtenir sense utilitzar trigonometria:

$$\alpha = 2 \arctan \frac{\overline{QB}}{\overline{PQ}} = 2 \arctan \frac{1}{2\sqrt{2}} \cong 38{,}94°$$

4. DE COMPRES

Solució: Les compres van costar 9,60 €.

Tenia 14,40 € al principi (14 monedes d'1 € i 2 de 20 cèntims) i 4,80 € en tornar (2 monedes d'1 € i 14 de 20 cèntims):

Si abans de la compra tenia x monedes d'1 € i y monedes de 0,20 €, la quantitat total es pot expressar com $x + 0{,}20y$.

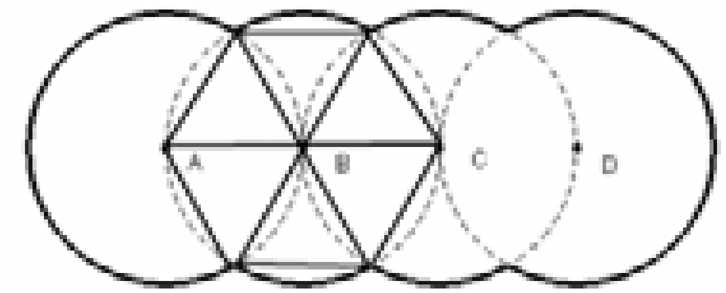
En acabant la quantitat de diners restant era $y + 0{,}20x$, igual a la tercera part dels diners inicials. Per tant:

$$x + 0{,}20y = y + 0{,}20x \;\rightarrow\; x = 7y$$

Provant amb $y = 1 \rightarrow x = 7,$ i amb $y = 2 \rightarrow x = 14.$

5. CERCLES

Solució: La longitud de la trajectòria és aproximadament 31,42 cm.



Traçant les línies del dibuix es veu que cada arc és 1/6 de la circumferència. Per tant, la longitud total és la de dues circumferències completes.

$$L = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 2{,}5) = 10 \cdot \pi \approx 31{,}42 \text{ cm}$$

6. DE FESTA

Solució: És imposible.

Si canviem dues copes amb la mateixa orientació, la paritat no canvia mai. Tindrem un nombre imparell de copes boca per amunt i un nombre parell (que pot ser zero) de copes boca per avall.

Si canviem dues copes amb diferent orientació tampoc canvia la paritat. El nombre de copes boca per amunt i el nombre de copes boca per avall romanen inalterables.

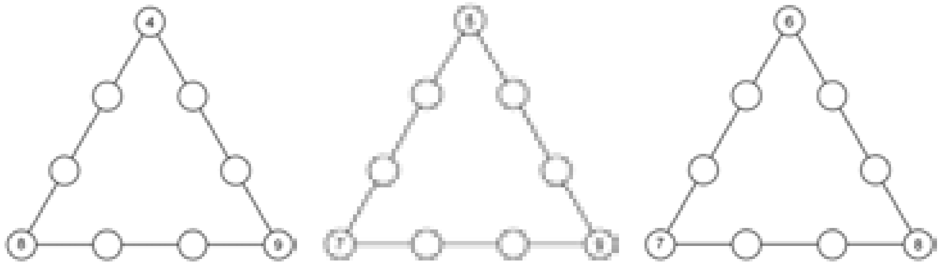
PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. NÚMEROS EN TRIANGLES

Solució: És imposible, no té solució.

La suma dels nombres de l'1 al 9 és 45. El total de les tres sumes dels costats del triangle és 66. La diferència 66 – 45 = 21 ha de ser igual a la suma dels tres nombres situats en els vèrtexs del triangle, ja que cada un d'ells intervé en dues sumes. Les úniques combinacions possibles són 4 + 8 + 9 = 5 + 7 + 9 = 6 + 7 + 8 = 21, que apareixen representades en la figura següent:



En el primer triangle la suma 8 + 9 = 17 s'ha de completar necessàriament amb 2 + 3, ja que la combinació 1 + 4 no és possible per estar el 4 en un vèrtex. Però la suma 8 + 4 = 12 s'ha de completar amb 3 + 7, cosa que resulta impossible si el 3 ja s'ha utilitzat en la suma considerada en primer lloc.

En el segon triangle la suma 7 + 9 = 16 sols es pot completar amb 2 + 4, i la suma 5 + 9 = 14, sols amb 2 + 6. Caldria repetir el 2. No es pot completar tampoc.

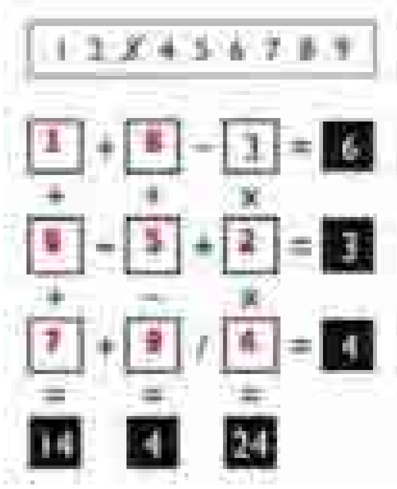
En el tercer triangle el 9 no es pot col·locar en cap dels tres costats, perquè la suma del costat elegit excediria de 22.

2. PRIMERA PROVA LÒGICA

La solució es correspon amb la del problema 8 de la prova de velocitat de nivell C.

3. ENCREUAT NUMÈRIC

Solució:



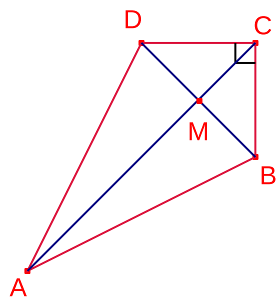
4. L'ÀREA DEL CATXIRULO

Solució: L'àrea del catxirulo és 2 u.s.

El quadrilàter és un estel, les seues diagonals són perpendiculars.

La seua àrea és: $S_{ABCD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$

Siga M la intersecció de les diagonals.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle ΔBCD:

$$\overline{BD} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle ABM:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{CM} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

L'àrea de l'estel ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2 \text{ u.s.}$$

5. IGUALTAT AMB FURGADENTS

La solució es correspon amb la del problema 10 de la prova de velocitat de nivell C.

6. TERTÚLIA

La solució es correspon amb la del problema 5 de la prova de velocitat de nivell C.

7. PARE I FILL

Solució: El pare té 42 anys i el fill 6.

Els primers múltiples de 9 quadrats perfectes són 36 i 81. En el primer cas el fill té 6 anys i el pare 6 + 36 = 42 anys. En el segon cas el fill tindria 9 anys i el pare 9 + 81 = 90 anys. L'enunciat deixa clar que el pare no és un ancià. Per tant sols és vàlida la primera solució.

8. UNA SUMA LITERAL

Solució:

$$\begin{array}{rcccc} & 5 & 7 & 1 & 5 \\ + & & 4 & 7 & 4 \\ \hline & 6 & 1 & 8 & 9 \end{array}$$

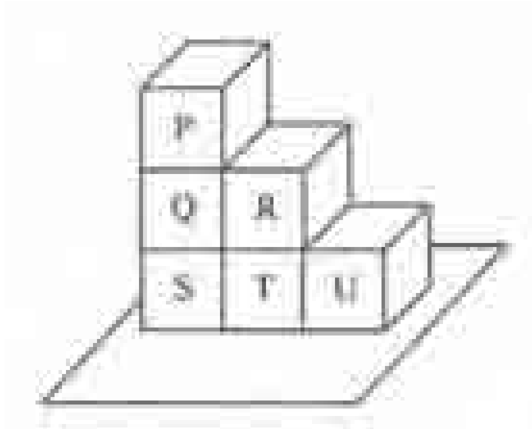
9. SEGONA PROVA LÒGICA

La solució es correspon amb la del problema 9 de la prova de velocitat de nivell C.

10. DAUS

Solució: La màxima suma és 89.

Anomenem els sis daus com es mostra a continuació:



La màxima suma guanyadora exposada s'obté quan la suma de les cares exposades en cada dau és màxima. El dau P té 5 cares exposades. La suma d'eixes cares és un maxim quan l'1 està ocult, per tant, la màxima suma exposada en el dau P és 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20.

Cadascun dels daus Q i S té 3 cares exposades. Dos d'elles son oposades una de l'altra, per tant tenen una suma de 7. Per tant, per a maximizar la suma exposada en eixos daus, els posicionem amb el 6 com la cara exposada no emparellada (està situada al costat esquerre del muntó). Cadascun d'aquestos daus té una suma maxima exposada de 6 + 7 = 13.

Cadascun dels daus R i U té 4 cares exposades. Dos d'aquestes són oposades una de l'altra, per tant tenen una suma de 7. És a dir, per a maximitzar la suma exposada en aquestos daus, els posem amb el 6 i el 5 com a cares exposades no emparellades (en la part superior i dreta del muntó). Cadascun d'aquestos daus té una suma maxima exposada de
5 + 6 + 7 = 18.

El dau T té 2 cares exposades, les quals són oposades una de l'altra. Aleshores, té una suma de 7.

Per tant, la suma màxima possible de les cares exposades és:

20 + 13 + 13 + 18 + 18 + 7 = 89.

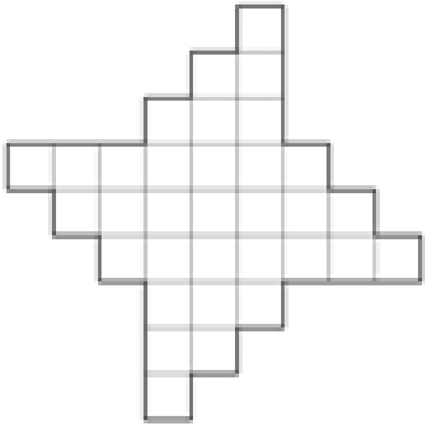
PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. PERÍMETRE

Solució: El perímetre de la figura és de 144 unitats de longitud.

Com que tots els costats més curts són de la mateixa longitud, la figura es pot subdividir en 33 quadrats xicotets, com es mostra a la figura.

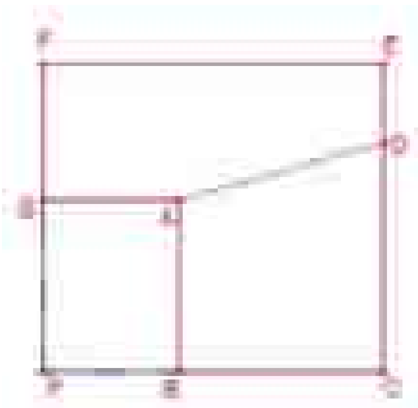


Cadascun d'aquestos quadrats té d'àrea 528/33=16 unitats d'àrea, i la longitud de cada costat és $\sqrt{16} = 4$

En total trobem 36 costats i un perímetre de 36 × 4 = 144 unitats de longitud.

2. CREANT ESPAIS

Solució: La longitud del segment CD és aproximadament 13,33 m.



Siga $x = \overline{AG} = \overline{GF}$

$\overline{BC} = 20 - x$

L'àrea de total de l'habitació és:

$$S_{PCEF} - S_{PBAG}$$

$$280 = 20 \cdot (10 + x) - 10x$$

Resolent l'equació, s'obté $x = 8$.

Aleshores, $\overline{BC} = 12$.

L'àrea del trapezi ABCD és la meitat de l'àrea de l'habitació:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{280}{2}$$

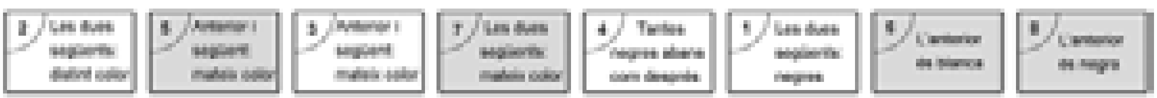
$$\frac{10 + \overline{CD}}{2} \cdot 12 = 140$$

$$\overline{CD} = \frac{40}{3} \approx 13{,}33 \text{ m}$$

3. TARGETES DESORDENADES

Solució: 2-5-3-7-4-1-6-8 en fila.

Designem les targetes amb B1, B2, B3, B4, N5, N6, N7 i N8.



B1 indica que hi ha dues targetes negres seguides, i B4 que no poden haver tres targetes negres consecutives. Per tant N5, que ha d'estar entre dues targetes del mateix color, ha d'estar entre dues blanques; i N7 ha de precedir dues targetes blanques. Aleshores sols hi ha una parella de targetes negres: com N8 és la següent d'una targeta negra, la parella és N6-N8. Tenim establida ja la seqüència B1-N6-N8.

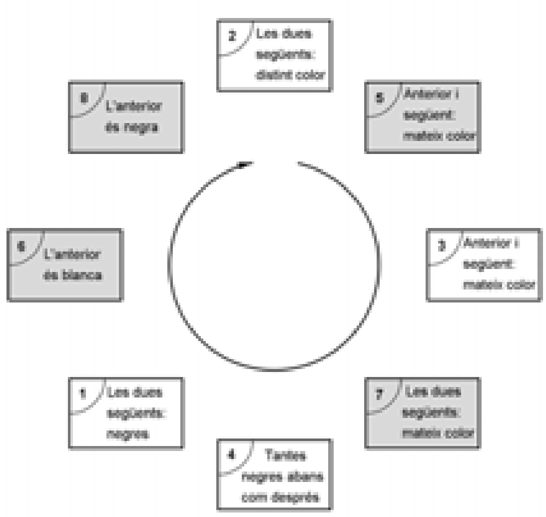
D'una altra banda, les úniques targetes que podrien ocupar la vuitena posició són N6 i N8. Les demés han de tenir totes alguna que les segueix. Com N8 va darrere de N6, tenim que les tres últimes són B1-N6-N8.

Si pensem ara en la primera posició, les úniques targetes que poden ocupar-la, descartada B1, són B2 i N7, ja que les altres fan referència a una targeta anterior. Si és N7, a continuació han d'anar dues blanques. Entre aquestes no pot estar B4 perquè tindria més negres darrere que davant. Les dues blanques haurien de ser B2 i B3. Tindríem N7-B2-B3 o N7-B3-B2. La segona combinació no pot ser perquè B3 ha d'estar entre dues del mateix color. Però, per la mateixa raó, N7-B2-B3 hauria de continuar amb una blanca. En eixe cas seria B4, que no compliria la condició que té impresa. Arribem a la conclusió que la primera targeta no pot ser N7. Provem amb B2:

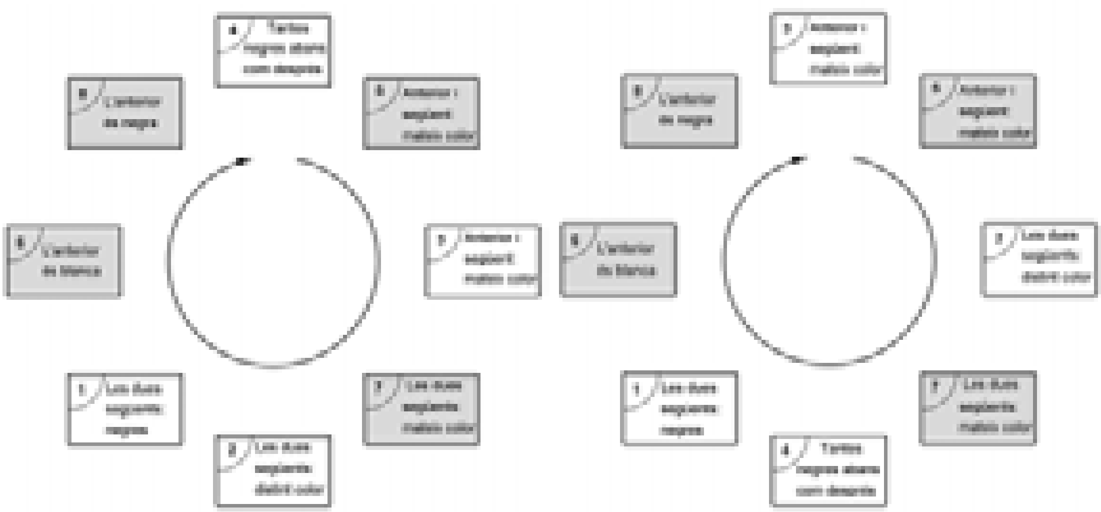
B2 ha d'estar seguida de dues targetes de diferent color. Sabem ja que la blanca no pot ser B4. Haurà de ser B3. La negra no pot ser N7 perque en el parell de blanques que li seguiria hauria d'estar B4. Per tant les tres primeres són B2-N5-B3 (B3 no pot estar entre dues de diferent color). Per la condició que ha de complir B3, la següent és negra: N7. I es completa amb B4.

Definitivament: B2-N5-B3-N7-B4-B1-N6-N8.

Si pensem d'ordenar-les en una seqüència circular, ja no n'hi haurà primera ni última i la condició que ha de complir B4 queda un poc imprecisa. En qualsevol posició de B4 respecte les fitxes negres es pot considerar que té "tantes negres abans com després". Tanmateix, si acceptem aquesta possibilitat, l'ordenació anterior continua sent vàlida:



I se'n poden trobar almenys aquestes dues més, derivades de l'anterior, on s'han intercanviat B2 i B4 en la primera variant, i B2 i B3 en la segona:



4. COMPTANT BÉ

Solució:

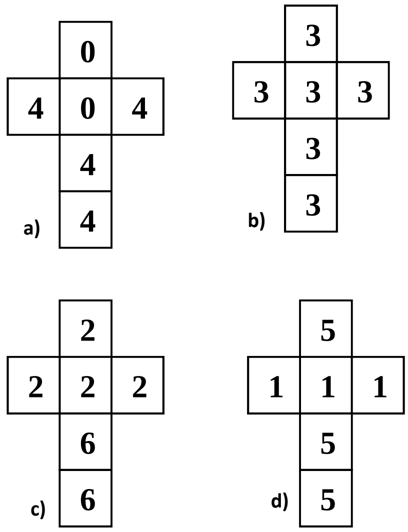
Traçant totes les rutes de lectura:

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = \\ = 128$$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35			
1	5	15	35				
1	6	21					
1	7						
1							

5. DAUS DE BRADLEY EFRON

Solució: Convé escollir sempre en segon terme, ja que sempre es podrà trobar un dau que guanye a un altre escollit prèviament.



En efecte, si el primer jugador tria el dau *b*, el segon jugador pot triar el dau *a*, amb el qual té probabilitat 2/3 d'obtenir un 4 i guanyar al 3 que, amb tota seguretat, obtindrà el primer.

Si el primer jugador tria el dau *c*, el segon haurà de triar-ne el *b*. Si el primer obté un 2, guanyarà el primer, que obtindrà un 3. I això passa també amb probabilitat 2/3.

Si el primer tria el dau *d*, el segon haurà d'escollir-ne el *c*. La probabilitat que el primer obtinga un 1 en llançar el dau *d* és 1/2. És a dir, des del punt de vista de la probabilitat, en la meitat d'ocasions la puntuació del dau *c* serà amb seguretat major que la del dau *d*. Si tenim en compte que en l'altra meitat de possibilitats (eixir un 5 en el dau *d*) encara té probabilitat 1/3 de guanyar amb un 6, la probabilitat total torna a ser $1/2 + 1/2 \cdot 1/3 = 2/3$.

Finalment, si el primer juga amb el dau *a*, el segon pot jugar amb el dau *d*. En el dau *a* la probabilitat d'obtenir un 0 és 1/3 i, en eixe cas guanya el segon jugador amb qualsevol resultat que obtinga en el dau *d*. En altre cas (el primer obté un 4, succés que té una probabilitat de 2/3), el segon té encara una probabilitat d'1/2 de traure un 5 i guanyar. En total, la tercera part de les possibilitats, més la meitat de les dues terceres parts restants: $1/3 + 1/2 \cdot 2/3 = 2/3$.

Com veiem, elegit un dau pel primer jugador, el segon té sempre l'oportunitat d'escollir-ne un que oferisca una probabilitat de 2/3 de guanyar. Aquests daus, la invenció dels quals es deu al reconegut estadístic Bradley Efron, mostren un exemple de no transitivitat en una relació de caràcter probabilístic: *a* guanya a *b*, *b* guanya a *c*, *c* guanya a *d* i, tanmateix, *d* guanya a *a*.

6. L'ÀREA DEL QUADRILÀTER

Solució: L'àrea del quadrilàter és 960 u. s.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle ABF:

$$\overline{AF} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle AFD:

$$\overline{FD} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$$

Els triangles BEF, DAF són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} \rightarrow \frac{30}{50} = \frac{9}{\overline{BE}}$$

Aleshores: $\overline{BE} = 15$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle BEF:

$$\overline{FE} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$$

Els triangles $BEF,\ BDC$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \rightarrow \frac{12}{9} = \frac{\overline{CD}}{9 + 30}$$

Aleshores: $\overline{CD} = 52$

El quadrilàter FECD és un trapezi rectangle. La seua àrea és:

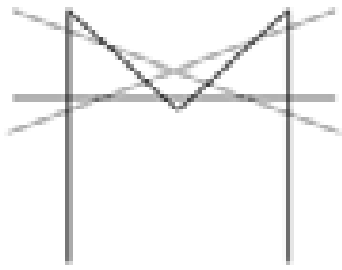
$$S_{FECD} = \frac{\overline{CD} + \overline{FE}}{2} \cdot \overline{FD} = \frac{52 + 12}{2} \cdot 30 = 960 \text{ u.s.}$$

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. UNA GRAN M

Solució:

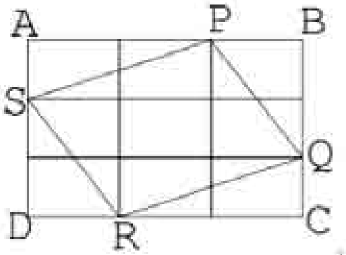


2. DAUS

La solució es correspon amb la del problema 10 de la prova de velocitat de nivell A.

3. ÀREA DEL PARAL·LELOGRAM

Solució: El paral·lelogram PQRS representa els 5/9 de la superfície total.



Dels 9 rectangles en què es divideix el rectangle ABCD, el paral·lelogram PQRS n'ocupa 5. Per tant representa els 5/9 de la superfície total.

4. SISTEMA D'EQUACIONS NO LINEAL

Solució: $\boldsymbol{x = 1.000}$, $\boldsymbol{y = 1}$.

Es tracta d'un sistema d'equacions no lineal, per tant sabem que el mètode més habitual per resoldre'l és el de substitució.

Anomenem les equacions de la següent manera:

$$\begin{cases} x^3 y = 10^9 \quad (1) \\ \dfrac{x}{y^2} = 10^3 \quad (2) \end{cases}$$

Podem raonar, a la vista de (2), que $y \neq 0$. Podem aïllar x en (2):

$$x = y^2 \cdot 10^3$$

I substituïm aquest valor en (1):

$$(y^2 \cdot 10^3)^3 \cdot y = 10^9 \rightarrow y^6 \cdot 10^9 \cdot y = 10^9 \rightarrow y^7 = 1 \rightarrow y = 1$$

Desfem el canvi:

$$x = 1^2 \cdot 10^3 = 1.000$$

5. MATEMÀTIQUES A MART

Solució: El resultat de l'operació és $\frac{10}{3}$.

Anem a calcular, primer, els valors de (3Δ5) i (2Δ4), i després farem l'operació que queda.

$$3\Delta 5 = 5^3 - 5^2 = 100$$

$$2\Delta 4 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

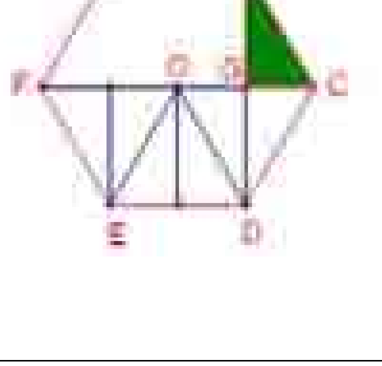
Només ens queda trobar:

$$(3\Delta 5)\nabla(2\Delta 4) = 100 \nabla 9 = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$$

6. COMPARANT ÀREES

Solució: La raó de proporcionalitat entre les dues àrees és 5:1.

Si ens fixem en la superfície del quadrilàter, ens adonarem que la podem dividir en 5 parts iguals, cadascuna de les quals es correspon amb l'area del triangle BGC, tal i com mostra la figura.



Per tant, podem concloure que la raó entre les àrees és 5:1.

7. AMICS EN FILA ÍNDIA

Solució: L'ordre en què es trobaran els amics és el següent: Cèlia, Blanca, Antonio, Darío i Eugènia. Darío dirà 18.495.

Segons les dades de l'enunciat, la seqüencia dels nombres que van dient els 5 amics és la següent:

Amic 1	Amic 2	Amic 3	Amic 4	Amic 5
5	10	15	20	25
30	35	40	45	50
55	...	...	...	...

Com es pot observar, si estudiem el residu de la divisió entre 25 del nombre que diu cada amic, obtenim l'ordre corresponent:

	Amic 1	Amic 2	Amic 3	Amic 4	Amic 5
Residu	5	10	15	20	0

Per tant:

	Antonio	Blanca	Cèlia	Darío
Nombre	140	160	130	170
Residu	15	10	5	20
Ordre	3r	2n	1r	4t

Per descart, Eugènia serà qui ocuparà la cinquena posició en la fila.

Per esbrinar qui ha dit el nombre 18.145 hem de fer el mateix, dividir-lo per 25 i estudiar-ne el residu. Com el residu és 20, sabem que és Darío qui ha dit el nombre.

8. ENGANYANT LA BALANÇA

Solució: Els pesos demanats són 65 kg, 64 kg, 60 kg, 58 kg i 56 kg.

Anomenarem al pes de cada amiga amb una lletra i les escriurem de més pes a menys: P_a és el pes de l'amiga més pesada, i així successivament fins arribar a P_e que es correspon al pes de l'amiga més lleugera.

Totes les amigues es pesen 4 vegades (una amb cada amiga). Per tant, la suma de totes les pesades resultarà ser 4 vegades la suma dels pesos de les amigues:

$$129 + 125 + 124 + 123 + 122 + 121 + 120 + 118 + 116 + 114 = \\ = 1.212$$

$$4 \cdot (P_a + P_b + P_c + P_d + P_e) = 1.212$$

$$P_a + P_b + P_c + P_d + P_e = \frac{1.212}{4} = 303$$

Ja sabem que entre les 5 amigues pesen 303 kg.

La pesada més gran correspon a la de les amigues més pesades, és a dir, $P_a + P_b$ i la pesada més menuda correspon a la de les amigues més lleugeres, $P_d + P_e$:

$$P_a + P_b = 129; \quad P_d + P_e = 114$$

Agafant la relació anterior:

$$P_a + P_b + P_c + P_d + P_e = 303$$

$$129 + P_c + 114 = 303 \ \rightarrow P_c = 303 - 243 = 60$$

Ja sabem el pes d'una de les amigues: 60 kg.

Per correspondència entre pesos i pesades, tenim que:

$$P_c + P_e = 116 \rightarrow P_e = 116 - 60 = 56 \text{ kg}$$

$$P_e + P_d = 114 \rightarrow P_d = 114 - 56 = 58 \text{ kg}$$

$$P_a + P_c = 125 \rightarrow P_a = 125 - 60 = 65 \text{ kg}$$

$$P_b + P_a = 129 \rightarrow P_b = 129 - 65 = 64 \text{ kg}$$

9. TERTÚLIA

La solució es correspon amb la del problema 4 de la prova de velocitat de nivell C.

10. IGUALTAT AMB FURGADENTS

La solució es correspon amb la del problema 10 de la prova de velocitat de nivell C.

ACTUALITZEU ELS VOSTRES CORREUS ELECTRÒNICS...!!!

ATENCIÓ, SOCIS!!

Per tal d'actualitzar la nostra base de dades, us demanem que ens informeu de les possibles variacions en les vostres dades, especialment en les vostres adreces de correu electrònic.

És important tindre aquesta informació per a un millor funcionament de la societat. És suficient que envieu un correu electrònic a:

tresorer@semcv.org

indicant les vostres novetats.

Gràcies per la vostra col·laboració.

CONTACTEU AMB NOSALTRES...!!!

Si vols enviar-nos solucions de problemes oberts, propostes de problemes o de temes, comentaris i suggeriments, pots enviar una carta a l'adreça:

SEMCV "AL-KHWARIZMI"
PROBLEMA OBERT
APARTAT 22.045
46071 VALÈNCIA

També pots enviar un missatge al correu electrònic:

problemesolimpics@semcv.org

ESPEREM LES VOSTRES COL·LABORACIONS!!!

http://www.semcv.org

XIV CONCURS DE FOTOGRAFIA "MATEMÀTICA A LA VISTA"

B A S E S

1. La Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi" convoca el XIV Concurs de Fotografia "Matemàtica a la vista" amb dos apartats:

   Apartat I: Poden participar totes les alumnes i tots els alumnes que cursen actualment estudis de Primària, Secundària, FPA, FP, Cicles formatius i Batxillerat.

   Apartat II: Pot participar qualsevol persona no inclosa en l'apartat anterior.

2. Les fotografies, originals, en color o en blanc i negre*, en paper*, tindran una grandària d'al menys 10 × 15 per a l'apartat I, i almenys 18 × 24 per a l'apartat II. Cada fotografia es presentarà muntada sobre cartolina amb un títol o peu de foto visible. El títol posarà de manifest la condició matemàtica del concurs. Cada sèrie —tres o més fotos sobre un mateix tema— s'identificarà amb títol únic, si bé cada foto portarà subtítol.

3. El termini de presentació de fotografies acabarà el dia 24/02/2014. Les fotografies –muntades i amb el títol visible– no mostraran dades de qui concursa. El nombre de fotos que pot presentar cada participant és 5, i 2 sèries. S'aportaran, clarament, dades personals i l'apartat (o apartats) a què es concursa. Si es tenen les fotografies en format digital, es prega que s'envien al correu de referència.

4. Els premis, que contemplaran la fotografia i el seu peu de foto, seran:

   Apartat I: 1r : 150 € 2n: 100 € 3r: 75 €.
   4t Tres premis iguals de 30 € Millor sèrie: 150 €.

   Apartat II: (Premi a una fotografia o una sèrie) 1r: 250 € 2n: 150 €

5. Les fotografies rebudes s'exposaran en la Universitat Jaume I de Castelló durant la celebració de les XI Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi,* el març del 2014. Els premis es lliuraran el dia 8, abans d'acabar les Jornades. Posteriorment, les fotografies del concurs, junt amb altres de concursos previs, podran exhibir-se en alguns centres que ho sol•liciten.

6. La participació implica l'acceptació de les bases. El jurat que decidirà el concurs estarà compost almenys per tres membres de la Societat organitzadora. La seua decisió serà inapel·lable.

7. Tota fotografia premiada passarà a ser propietat de la Societat a tots els efectes. Les fotografies participants podran aparéixer en les publicacions de la SEMCV.

Espiral numérica, Begoña Contell Gonzalo, de l'IES Ramón Llull. València.
1r Premi Apartat I - XIII Concurs

Per a qualsevol consulta, caldrà dirigir-se al coordinador de la Societat per a aquest concurs: Salvador Caballero Rubio, e-mail: fotografia@semcv.org

Per realitzar els enviaments: Concurs de fotografia "Matemàtica a la vista"
IES Antonio José Cavanilles
Av del Alcalde Lorenzo Carbonell, 32-34
03007 Alacant

Vols fer-te soci? Ompli la següent butlleta d'inscripció i ens l'envies a la nostra seu. Anima als teus companys o inscriu al teu centre a la nostra societat.

INSCRIPCIÓ I DOMICILIACIÓ BANCÀRIA

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA "Al-Khwārizmī"

Facultat de Magisteri "Ausiàs March"
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Apartat 22.045 46071VALÈNCIA

Cognoms:..Nom:....................................
DNI / NIF:......................................

Domicili particular:

Població:..C.P.:...............
Carrer:... Telèfon:..
Correu-e:.....................................

Centre de treball:

Nom:..
Carrer:...Població:...............................C.P.:............
Telèfon:...Correu-e:...

Entitat bancària (on es lliurarà el cobrament de quotes):

Nom:..
Carrer:...Població:...............................C.P.:...........
Codi Compte Client:

Entitat	Oficina	D.C.	Nº Compte
| | | | |	| | | | |	| | |	| | | | | | | | | | |

....a...........de......................................de 2013.
(signatura)

El titular del compte:...
DNI:...

Esta revista es publica amb el suport de l'Acadèmia Valenciana de la Llengua

Trobaràs tota la informació en la nostra web.

Visiteu-la: www.semcv.org

S.
E.
M.
C.
V.

AL-KHWARIZMI

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"