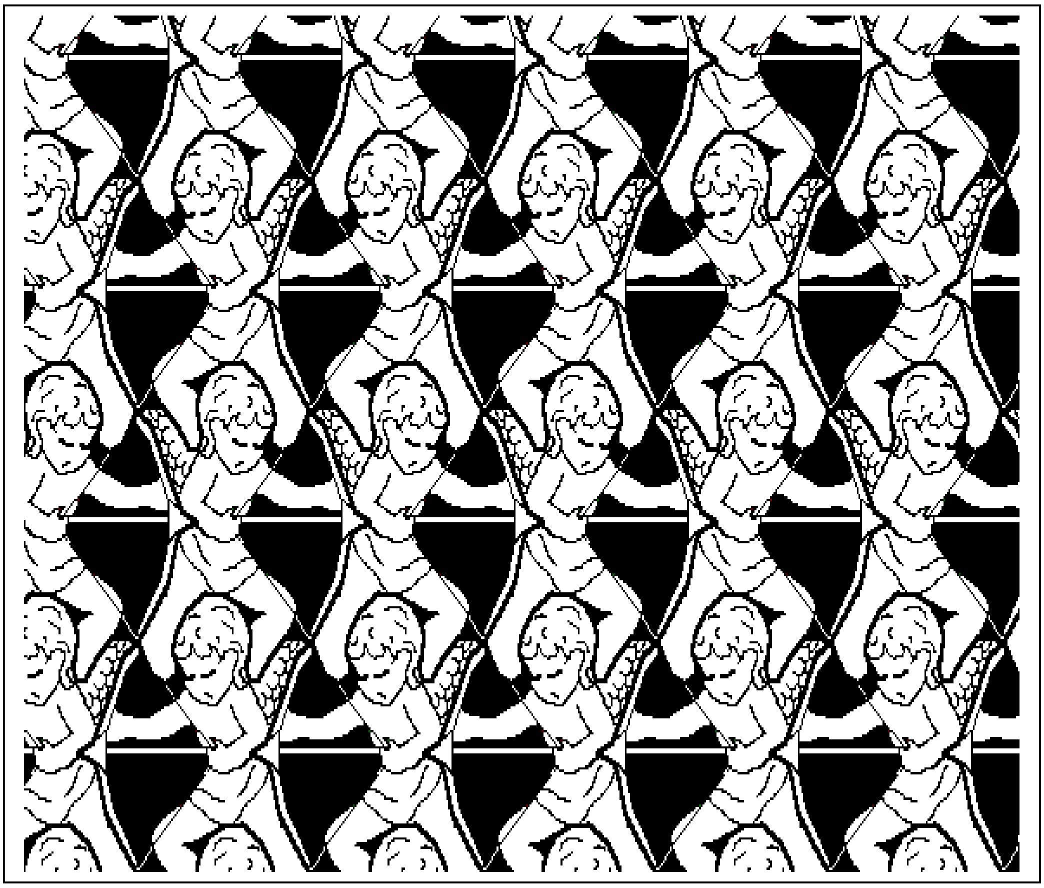
S.
E.
M.
C.
V.

AL-KHWARIZMI

PROBLEMES OLÍMPICS



Revista de problemes de Matemàtiques
Número 2. Desembre 1999

Com ja sabeu tots, hem format un equip de professors i professores per a preparar activitats que ens servisquen per a treballar amb els nostres alumnes la resolució de problemes, i també per a preparar la XI Olimpíada Matemàtica de la Societat "Al-Khwarizmi", que aquest curs tindrà una especial rellevància, per ser l'any mundial de les Matemàtiques.

Considerem que les activitats que es proposen a l'Olimpíada ham de tenir les següents característiques:

- Que siguen un repte a les capacitats personals.
- Que no deixen bocabadat al resolutor, i que la situació proposada estiga al seu abast.
- Amb un interès implícit.
- Que estimulen el desig de proposar-les a altres companys.
- Que no siguen "de truc".
- Que la situació que es proposa siga oberta i tinga diverses possibilitats de resolució.
- Que no siga una situació tancada, on únicament cal aplicar un recepta de forma mecànica.
- Que siguen divertides; és a dir, que el context siga extret, per exemple, de trencaclosques, jocs o matemàtiques recreatives.
- Que permeten posar en pràctica diverses estratègies de resolució, com ara: fer una taula, buscar regularitats, codificar i descodificar, fer analogies, fer diagrames, subproblemes, etc.
- Que es posen en marxa diversos processos mentals: abstraure, generalitzar, particularitzar, etc.
- Que es puguen plantejar diverses etapes de resolució.

Així mateix, pensem que els objectius d'aquestes activitats han de ser:

- Potenciar l'afició per la resolució de problemes.
- Fomentar l'afició per les Matemàtiques, com a repte mental.
- Difondre una visió lúdica i recreativa de les Matemàtiques.

Ací teniu el número II de la nostra revista "Problemes Olímpics". Com en altres ocasions, proposem activitats per al primer cicle (nivell A) i per al segon cicle (nivell B), amb les seues solucions. Indiquem també el grau de dificultat (en una escala creixent de 10 a 50 punts). Esperem que aquesta primera col·lecció d'activitats siga útil per a tots. Eixe és el nostre desig.

Maurici Contreras del Rincón (coordinador)
Agustí Ballesteros Colom
Josep Antoni Chaveli Gascón
Mari Carme Olivares Iñesta
Tomás Queralt Llopis

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- FERRAN I FELIP

El rei Ferran el Catòlic va morir 38 anys més tard de que naixquera el rei Felip "el Hermoso". Si la suma de les seues edats al morir era de 92 anys i Felip "el Hermoso" va morir a l'any 1506, en quin any va nàixer Ferran el Catòlic?.

2.- ELLA NO BALLA A SOLES

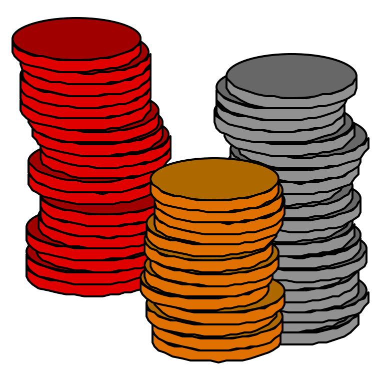
Mireia va convidar a 17 amics a la seua festa d'aniversari. Va donar un número a cadascun i ella se'n va quedar amb el 1. Mireia va observar que la suma dels números de cada parella era un quadrat perfet. Amb qui va ballar Mireia?.

3.- VA DE LLIBRES

A la biblioteca del meu barri estaven venent llibres vells. Jo vaig comprar 12 per 1200 ptes. Alguns costaven 50 ptes, altres 150 ptes i altres 200. Quants llibres de cada preu vaig comprar?.

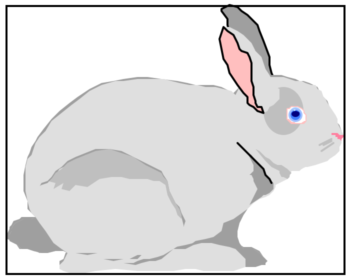
4.- EL TESTAMENT

Un home malalt va deixar al seu testament 14 milions de pessetes a la seua dona i al fill que aquesta esperava per a que ho repartisquen de la següent forma: si es tractava d'una xiqueta, la xiqueta tindria el doble que la mare, però, si era un xiquet, la mare tindria el doble que el xiquet. Quan van passar uns mesos, la dona va tindre bessons, un xiquet i una xiqueta. Com han de repartir-se l'herència segons els desitjos del pare?.

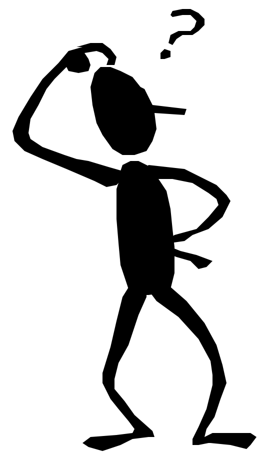


5.- LES MONEDES MISTERIOSES

Dos ramaders que venien conills al mercat del poble, varen ajuntar els seus llocs per a anar cadascun al mercat la meitat de les dies i així tindre més temps per a atendre la seua hisenda. Com que un venia dos conills per una moneda i l'altre tres conills per dos monedes, van decidir de vendre cinc conills per tres monedes. Abans d'ajuntar els seus llocs, cadascun venia 30 conills al dia, així que el primer guanyava 15 monedes i el segon 20. Per tant, ajuntant els dos llocs haurien de guanyar 35 monedes al dia, però en realitat guanyaven 36. D'on procedeix la moneda de més?.



6.- ELS LLUMINS



A la taula tenim tres grups de llumins, cadascun amb un número diferent d'unitats. El número total de llumins és 48. Del primer grup, Mireia mou al segon tants llumins com hi ha al segon grup. Després, del segon grup mou al tercer tants llumins com hi ha al tercer grup. Finalment, del tercer grup mou al primer tants llumins com hi ha, en eixe moment, al primer grup. Amb aquests moviments, Mireia aconsegueix que els tres grups tinguen el mateix número de llumins. Quants llumins tenia cada grup al principi?.

7.- ELS REGALS

Carles i Mireia anaren junts a comprar regals. Portaven en total 26400 ptes, entre els dos. Mireia portava 2400 ptes més que Carles, però se'n va gastar el doble que Carles i se'n va quedar amb les dues terceres parts del que li va quedar a Carles. Quants diners es va gastar Carles?.

8.- ACTIVITATS

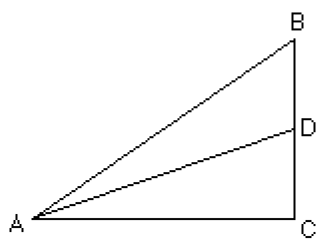
La propera setmana aniré a dinar amb un amic, a veure una nova galeria d'art, a l'administració de la Seguretat Social i al metge a fer-me una revisió. El meu amic no pot quedar amb mi el dimecres, el despatx de la Seguretat Social tanca els caps de setmana, la galeria d'art tanca els dimarts, dijous i els caps de setmana; el metge únicament té consulta els dimarts, els divendres i els dissabtes. Puc fer tot el que tinc previst algun dia de la setmana?.

9.- DESPESES

Un home aposta 2400 ptes i guanya la seua aposta original més 4800 ptes. Després gasta un 25% dels seus guanys a un restaurant per a celebrar-ho, i un 50% també dels seues guanys en un regal per a la seua dona per arribar tard. Tenint en compte que el seu salari es de 240000 ptes, de les quals va destinar una part per a l'aposta original, quants diners li van quedar quan, per fi, arriba a la seua casa?.

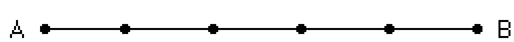
10.- TRIANGLE

El triangle ABC té ∠C=90º, AC=20, AB=101. Siga D el punt mig de CB. Trobar l'àrea del triangle ADB.



11.- LA PUÇA

En una recta es marquen els punts A i B tals que AB=5 cm. Una puça es mou sobre la recta i en cada bot es desplaça 1 cm. a la dreta o a l'esquerra. La puça vol anar de A a B en exactament 9 bots.



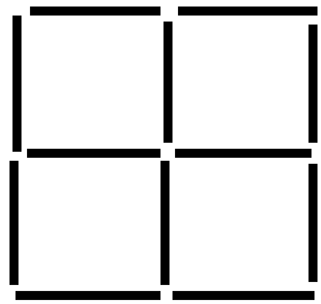
De quantes maneres pot fer-ho?.

12.- VIATGE EN TREN

Un tren comença el seu recorregut en l'estació A i l'acaba en l'estació F. Entre l'estació A i la F estan les estacions B, C, D i E. Es vol anar de l'A a la F fent parada en una o més de les estacions intermèdies. De quantes maneres distintes es pot organitzar el viatge en tren?. Enumera-les.

13.- PALETS

En la següent figura, si mous 4 palets cal deixar 3 quadradets iguals. Com ho faries?.



14.- ESCURABUTXAQUES

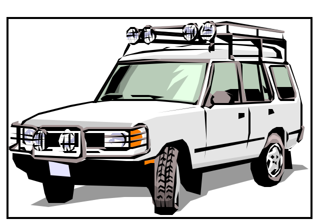
Josep, Carles i Xavier juguen amb una màquina escurabutxaques. Entre els tres gasten 40 monedes. Carles gasta 12 més que Xavier. Xavier gasta la meitat que gasta Josep. Quantes monedes gasten cadascun?.

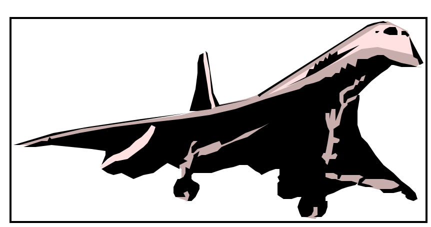
15.- NÚMEROS SENARS

Amb els dígits 1 – 2 – 3 – 4 – 6 es volen formar tots els números senars de 3 xifres distintes que siguen múltiples de 7 però no de 3. Quants són?.

16.- ESTALVIAR EN VACANCES

Jordi i Bruno tenien cadascun la mateixa quantitat de diners per a gastar durant 2 setmanes de vacances. Jordi va gastar 1/3 la primera setmana, 1 / 2 la segona i la resta s'ho va estalviar. Bruno va gastar 1 / 4 la primera setmana però va estalviar el doble del que va estalviar Jordi. Si Bruno va estalviar 156 euros, quants euros va gastar Bruno en la segona setmana?.





PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

1.- QUINS NÚMEROS?

Si sumem dos números naturals el resultat és 715. Si eliminem l'última xifra –un zero- d'un dels números, obtinguem l'altre número. De quins números estem parlant?.

2.- ADDICIÓ MÚLTIPLE

Quins números han de substituir a A i B per a que la següent operació d'addició siga correcta?.

$$\begin{array}{r} A \\ BBB \\ BBB \\ BBB \\ +\ BBB \\ \hline ABBB \end{array}$$

3.- DIVISIBILITAT

Per quines xifres han de substituir-se les lletres a i b en 19a9b per a que el número de cinc xifres siga divisible per 36?.

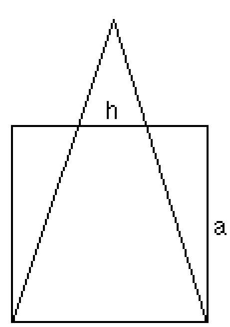
4.- SET PER TRES IGUAL A CENT

De quina forma caldrà escriure tres vegades la xifra 3, de manera que aparega el 4 com a resultat?. Utilitza en total set, vuit i nou vegades la xifra 3 en tres operacions per a que resulte 100 en cada cas.

Alerta!: En cada cas, únicament pots utilitzar les quatre operacions bàsiques (suma, resta, multiplicació i divisió).

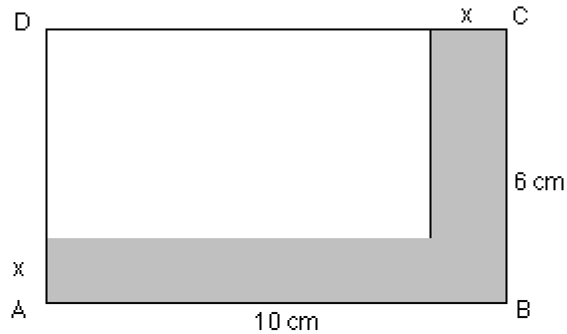
5.- QUADRAT I TRIANGLE

El quadrat i el triangle isòsceles que veus a la figura tenen la mateixa àrea (son equivalents). Escriu l'expressió de l'altura h en funció del costat a.



6.- RECTANGLE

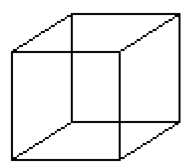
El rectangle ABCD té unes dimensions de 10 cm per 6 cm.



Es retallen els laterals ombrejats, ambdós d'amplitud x. Si les dimensions del rectangle resultant són els tres quarts de l'àrea de ABCD, calcula x.

7.- CONTRACCIÓ D'UN CUB

Quan l'aresta d'un cub es redueix en 1 cm, el seu volum decreix 91 cm^3. Quina es la mesura de l'aresta original?.



8.- TALLANT UN TETRÀEDRE

Afegim tres punts en les tres rectes que concorren en un vèrtex d'un tetràedre, a la mateixa distància del vèrtex. Tallem el tetràedre pel pla que passa per eixos punts. Repetim aquesta operació amb tots els vèrtex del tetràedre, obtenint un sòlid regular.

a) Quin és el cos resultant?.
b) Quant mesura l'aresta del nou cos?.
c) Quin és el seu volum?.

9.- LLOGUER DE COTXES

Per a contractar el lloguer d'un cotxe per a set dies disposem de l'oferta de preus de tres companyies:

Autoviatges	Lloguimòvil	Rentacar
1700 ptes per setmana sense cap límit de quilòmetres	1000 ptes per dia més 6'5 ptes per km	6000 ptes per setmana, 500 km sense cost més 22 ptes per km després dels primers 500.

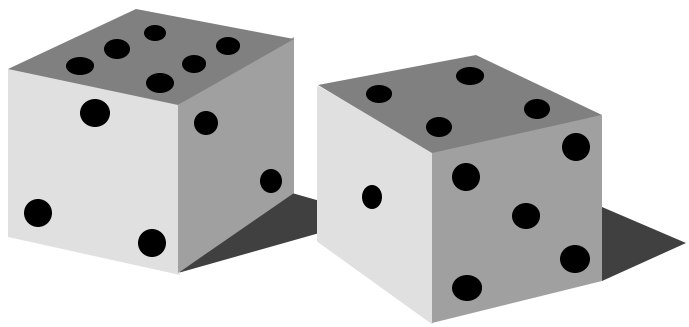
Quina de les tres companyies has d'elegir?.

10.- VELOCITAT

En una carrera de motos, van sortir tres simultàniament. La que va arribar en segona posició va córrer a 15 km/h menys que la primera i a 3 km/h més que la tercera, i va arribar a la meta 12 minuts més tard que la primera i 3 minuts abans que la tercera. Quina velocitat portava cada moto?.

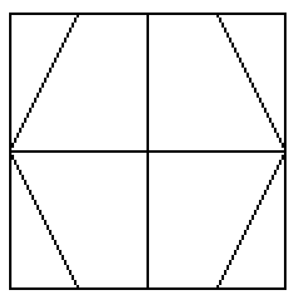
11.- JOC INTERROMPUT

Dos jugadors A i B aposten cadascun 1000 ptes en un joc en el que eixirà guanyador el primer que guanye tres partides. Quan A ha guanyat una partida i B encara no ha guanyat mai, tenen que suspendre el joc. Com han de repartir-se els diners?.



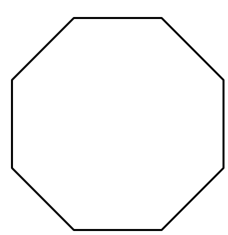
12.- PARTS D'UN QUADRAT

Retallem un quadrat en vuit parts, tal com mostra la següent figura. A continuació tornem a unir les peces per a obtenir el quadrat complet. De quantes maneres podem reproduir el quadrat inicial?.



13.- OCTÒGON MÀGIC

Escriu els dígits del 1 al 8 en cadascun dels vèrtex del següent octògon, de manera que:



- els veïns del 4 sumen 9.
- els veïns del 5 sumen 11.
- els veïns del 6 sumen 10.
- els veïns del 7 sumen 8.

14.- QUINA CUA MÉS NATURAL !

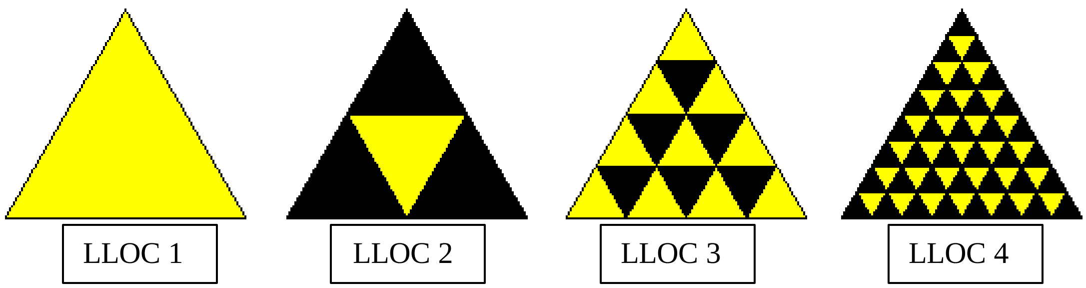
Si escrivim els números naturals seguits, de la següent manera:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ...

quina xifra estarà a la posició cent-mil?.

15.- BLANC I NEGRE

Les següents figures estan formades per triangles equilàters. A l'interior de cada triangle blanc afegim tres triangles equilàters negres. A l'interior de cada triangle negre afegim tres triangles equilàters blancs. I així repetim el procés successivament.



a) Quina és l'àrea blanca i l'àrea negra de la figura situada al lloc 5?.
b) Quina és l'àrea blanca i l'àrea negra de la figura que està al lloc 20?.
c) Creus que les àrees blanca i negra seran iguals a la llarga?.

16.- ELS FILLS DE FILIBERT

Els fills de Filibert no són, per suposat, com el seu pare. Conten mentides com a periodistes i, clar, el seu pare no té més que problemes. El major diu: Un de nosaltres diu mentides. El segon diu: Dos de nosaltres diuen mentides. El tercer diu: Tres de nosaltres mentim. I el xicotet diu: Els quatre germans diguem la veritat. Menys mal que Filibert sap que al menys un d'ells diu la veritat i, amb això sap qui o quins diuen la veritat. Ho saps tu?.

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- FERRAN I FELIP

Siguen x, y naixement i mort de Ferran el Catòlic. Siguen x, w naixement i mort de Felip. A les hores: y-z=38, (y-x)+(w-z)=92, w=1506. Per tant, Ferran el Catòlic va nàixer al any 1452. DIFICULTAT: 40

2.- ELLA NO BALLA A SOLES

Mireia va ballar amb el xic que portava el número 15. DIFICULTAT: 30

3.- VA DE LLIBRES

Vaig comprar 7 llibres de 50 ptes, 3 de 150 i 2 de 200. DIFICULTAT: 10

4.- EL TESTAMENT

El xiquet va rebre 2 milions, la mare 4 i la xiqueta 8. DIFICULTAT: 10

5.- LES MONEDES MISTERIOSES

Quan van ajuntar els conills i van vendre cinc conills per tres monedes, varen canviar el seu preu inicial, i per això apareix una moneda de més. El primer venia dos conills per una moneda, es a dir, a mitja moneda cada conill. El segon venia tres conills per dos monedes, es a dir, a 2/3 de moneda per conill. Quan els varen ajuntar, guanyaven 3/5 de moneda per cada conill. El primer ramader guanyava amb el nou preu 1/10 de moneda per cada conill i, per tant, els beneficis de la venda dels 30 conills varen ser 3 monedes més de les obtingudes anteriorment. En canvi, el segon ramader va perdre 1/15 de moneda per cada conill, i amb la venda dels seus 30 conills va rebre 2 monedes menys que abans. DIFICULTAT: 30

6.- ELS LLUMINS

Al primer grup hi havien 22 llumins; al segon grup 14 i al tercer grup 12. DIFICULTAT: 30.

7.- ELS REGALS

Carles se'n va gastar 4800 ptes. DIFICULTAT: 30

8.- ACTIVITATS

L'únic dia possible és el divendres. DIFICULTAT: 10.

9.- DESPESES

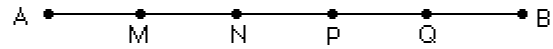
Quan arriba a la seua casa té 241200 ptes. DIFICULTAT: 10.

10.- TRIANGLE

L'àrea del triangle ADB es la meitat que la del triangle ABC, o siga, 1010 unitats quadrades. DIFICULTAT: 10.

11.- LA PUÇA

Es deuen produir 7 avanços i 2 retrocessos. Hi ha 13 solucions, que son les següents:

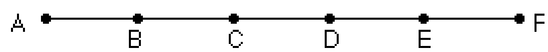


AMAMAMNPQB	AMNMAMNPQB	AMNPNPNPQB	AMNPQPNPQB
AMAMNMNPQB	AMNMNMNPQB	AMNPNPQPQB	AMNPQPQPQB
AMAMNPNPQB	AMNMNPNPQB	AMNPNMNPQB	
AMAMNPQPQB	AMNMNPQPQB		

DIFICULTAT: 40

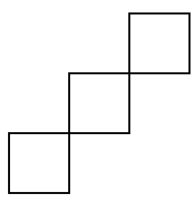
12.- VIATGE EN TREN

Com que son 4 les estacions intermèdies i podem fer parada en 1, 2, 3 ò 4 de les esmentades estacions, el número de recorreguts possibles és: $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=15$, els quals es poden obtenir fàcilment així:



- 1 estació intermèdia: ABF, ACF, ADF, AEF.
- 2 estacions intermèdies: ABCF, ABDF, ABEF, ACDF, ACEF, ADEF.
- 3 estacions intermèdies: ABCDF, ABCEF, ABDEF.
- 4 estacions intermèdies: ABCDEF. DIFICULTAT: 10

13.- PALETS



DIFICULTAT: 20

14.- ESCURABUTXAQUES

Siguen J, C i X les monedes que gasten Josep, Carles i Xavier, respectivament. Es compleix que C=X+12, X=J/2. Per tant, 2X+X+12+X=40 $\rightarrow$ X=7, J=14, C=19. DIFICULTAT: 10.

15.- NÚMEROS SENARS

Únicament hi ha dos números que complisquen totes les condicions, $413=7\times59$ i $623=7\times89$. DIFICULTAT: 20.

16.- ESTALVIAR EN VACANCES

Bruno se'n va gastar 195 åla segona setmana de vacances. DIFICULTAT: 20.

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

1.- QUINS NÚMEROS?

Busquem un número de 2 xifres i un altre de 3. Les unitats del de 2 xifres son 5 i les desenes del de 3 xifres també. Per tant, $*50 + *5 = 715$. Així, els números buscats son 650 i 65. DIFICULTAT: 10.

2.- ADDICIÓ MÚLTIPLE

Hi ha tres solucions: a) A=1, B=3; b) A=2, B=6; c) A=3, B=9. DIFICULTAT: 20.

3.- DIVISIBILITAT

El número que busquem ha de ser divisible per 4 (dos últimes xifres divisibles per 4, per tant, b=2 ó b=6) i 9 (la suma de les xifres ha de ser divisible per 9). Per tant, les possibles solucions son 19692 i 19296. DIFICULTAT: 30.

4.- SET PER TRES IGUAL A CENT

3:3+3=4	33∗3+33:33=100
33+33+33+3:3=100	33∗3+333:333=100

DIFICULTAT: 20

5.- QUADRAT I TRIANGLE

Ha de complir-se $a^2 = \frac{1}{2}a(a+x)$, on x és l'alçaria del triangle isòsceles xicotet. Per semblança de triangles: $\frac{x}{h} = \frac{a+x}{a}$. D'on obtenim: $x = \frac{a \cdot h}{a - h}$. Per tant, ha de ser: $a^2 = \frac{1}{2} a \cdot \left(a + \frac{a \cdot h}{a - h}\right)$. Per mig d'operacions algebraiques, deduïm que $h = \frac{a}{2}$. DIFICULTAT: 40.

6.- RECTANGLE

Traduïm l'enunciat en una equació: $(10 - x)\cdot(6 - x) = \frac{3}{4}\cdot 60$. Per tant, cal resoldre l'equació de segon grau: $x^2 - 16x + 15 = 0$. Les solucions son x=15, x=1. Però x=15 no pot ser, perquè ha de ser $x \angle 6$. Per tant, ha de ser x=1 cm. DIFICULTAT: 20.

7.- CONTRACCIÓ D'UN CUB

Deu ser $(x-1)^3 = x^3 - 91$. D'on: $x^2 - x - 30 = 0$. Les arrels d'aquesta equació de segon grau son x=6 i x=–5. La solució negativa no té sentit. Per tant, l'aresta el cub és x=6 cm. DIFICULTAT: 20

8.- TALLANT UN TETRÀEDRE

a) El cos resultant es un tetràedre truncat. Està format per quatre cares hexagonals regulars i quatre cares triangles equilàters.
b) L'aresta del tetràedre truncat és a/3, on a és l'aresta del tetràedre inicial.
c) El volum del tetràedre truncat és igual al volum del tetràedre inicial menys la suma dels volums de les quatre tetràedres que es tallen de les cantons. Cada tetràedre de les cantons és semblant al tetràedre inicial. Per tant, com la relació de les seues arestes és 1 / 3, la relació de volums és $(1/3)^3 = 1/27$. Això vol dir que el volum del tetràedre truncat és $1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$ vegades el volum del tetràedre inicial. D'altra banda, el volum del tetràedre inicial és $V = \frac{1}{3} S \cdot H$, on S és l'àrea de la cara i H l'alçaria del tetràedre. Es compleix que $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ i que $H = \frac{\sqrt{23}}{6} \cdot a$. Per tant, el volum del tetràedre inicial és $V = \frac{\sqrt{69}}{72} \cdot a^3$ i el volum del tetràedre truncat és $V' = \frac{23}{27} \cdot \frac{\sqrt{69}}{72} \cdot a^3$. DIFICULTAT: 50.

9.- LLOGUER DE COTXES

Les funcions corresponents a cadascuna de les companyies son:
Autoviatges → Y=1700·7=11900 → Y=11900 (a)
Lloguimòvil → Y=1000·7+6'5x → Y=7000+6'5x (b)
Rentacar → $Y = \begin{cases} 6000, & \text{per a } x \le 500 \\ 22x - 5000, & \text{per a } x > 500 \end{cases}$ (c)

Les gràfiques son:

(b)

X	Y
0	7000
100	7650
400	9600
500	10250
700	11550
800	12200

(c)

X	Y
0	6000
100	6000
400	6000
500	6000
700	10400
800	12600

El punt de tall de les gràfiques (a) i (c) s'obté per l'equació: $22x - 5000 = 11900 \rightarrow 22x = 16900 \rightarrow x = 768$. Per tant, si x≤ 768, ens convé elegir la companyia (c) Rentacar; si x > 768, ens convé elegir la companyia (a) Autoviatges. DIFICULTAT: 20.

10.- VELOCITAT

Siguen x, y, z les velocitats de la 1ª, 2ª i 3ª moto, respectivament. Es compleix: $\left.\begin{array}{l} y = x - 15 \\ y = z + 3 \end{array}\right\}$. D'on: z=y-3=x-15-3=x-18. D'altra banda, $v = \frac{e}{t} \rightarrow t = \frac{e}{v}$.

Siguen t_1, t_2 i t_3 els temps respectius de cadascuna de les motos. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} t_2 = t_1 + 12 \\ t_2 = t_3 - 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{e}{y} = \frac{e}{x} + 12 \\ \frac{e}{y} = \frac{e}{z} - 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{e}{x-15} = \frac{e}{x} + 12 \\ \frac{e}{x-15} = \frac{e}{x-18} - 3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} ex = (x-15)\cdot(e+12x) \\ e(x-18) = (x-15)\cdot(e - 3x + 54) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 15e = 12x^2 - 180x \\ -3e = -3x^2 + 99x - 810 \end{array}\right\}$$

Multiplicant la 2ª equació per 5 e igualant:

$3x^2 - 315x + 4050 = 0 \rightarrow x^2 - 105x + 1350 = 0$. Les arrels d'aquesta equació de segon grau son x=90 i x=15.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si } x = 90, \text{ aleshores: } \; y = 75, \; z = 72 \\ \text{Si } x = 15, \text{ aleshores: } \; y = 0 \quad \text{¡No pot ser!} \end{array}\right.$$

Per tant, la solució és: x=90, y=75, z=72. DIFICULTAT: 30.

11.- JOC INTERROMPUT

Si el joc haguera continuat, es donaríen les següents situacions:

Per tant, la probabilitat de que guanye A és:

p(guanye A) = p(AAA)+p(AABA)+p(AABBA)+p(ABAA)+p(ABABA)+p(ABBAA) =

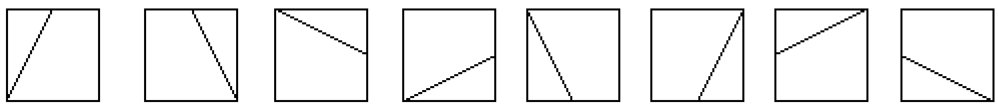
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(1+1+\frac{3}{4}\right)=\frac{11}{16}$$

La probabilitat de que guanye B és: p(guanye B)=1–p(guanye A)=$1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$.

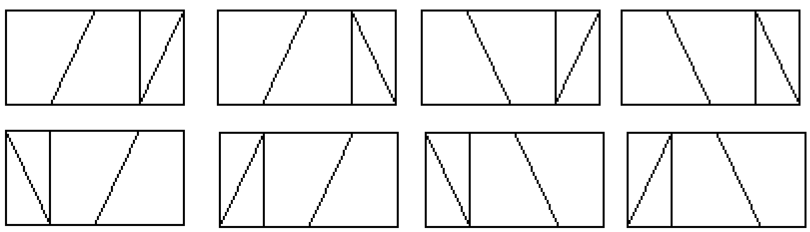
Per tant, el repartiment més just consisteix en que A se'n porta $2000\cdot\frac{11}{16}=1375$ ptes, i B se'n porta $2000\cdot\frac{5}{16}=625$ ptes. DIFICULTAT: 30

12.- PARTS D'UN QUADRAT

Investiguem primer un problema més senzill (dos peces i quatre peces):

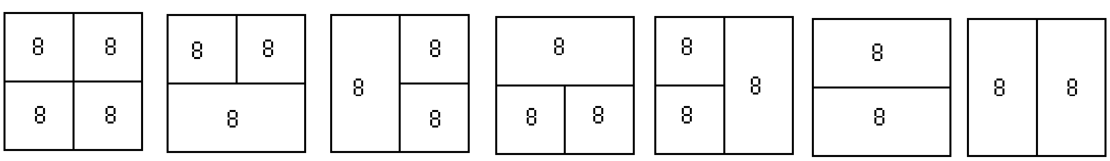


(8 formes)



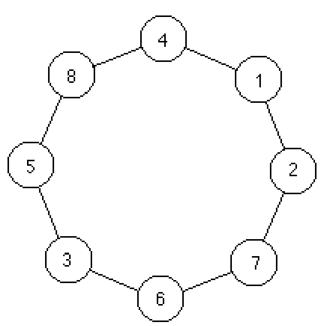
(8 formes)

Per tant, el número de formes en que es pot reproduir el quadrat inicial és:



$N = 8^4 + 4\times 8^3 + 2\times 8^2 = 6272$ DIFICULTAT: 40

13.- OCTÒGON MÀGIC



DIFICULTAT: 30

14.- QUINA CUA MÉS NATURAL!

Anem a contar el número de llocs que ocupa cada número segons el número de xifres que continga, pel que omplint la següent taula, obtenim:

Nº de xifres	Números amb eixe nº de xifres	Llocs que ocupen	Acumulat
1	9	9	9
2	90	180	189
3	900	2.700	2.889
4	9.000	36.000	38.889
5	90.000	450.000	488.889

Com veiem, fins el 9.999 (últim número amb 4 xifres) hem ocupat un total de 38.889 llocs. Significa que fins al lloc 100.000 queden 61.111 llocs. Com corresponen a números amb 5 xifres, si dividim 61.110 entre 5 tindrem quants números de 5 xifres hi ha abans els lloc 61.111, que farà el lloc 100.000 del total. El resultat és que cal contar 12.222 números a partir del 9.999, i obtenim 22.221. Això implica que el lloc 999.999 està ocupat pel número 1. Aleshores, el lloc 100.000 vindrà ocupat pel número 2, que serà la primera xifra del número 22.222. Per tant, **la solució és el 2**.

15.- BLANC I NEGRE

Àrees blanques: 1, $\frac{1}{4},\frac{10}{16},\frac{28}{64}$, ... Àrees negres: 0, $\frac{3}{4},\frac{6}{16},\frac{36}{64}$, ... Si b_n y n_n son, respectivament, el número de triangles blancs i negres en la posició n, es compleix: (1) $b_n = b_{n-1} + 3n_{n-1}$ (2) $n_n = 3b_{n-1} + n_{n-1}$ (3) $b_n + n_n = 4^n$. Amb molt de treball, es pot deduir que $b_n = 3\cdot 4^{n-1} - 2b_{n-1}$ per a n=1, 2, 3, ... D'on es dedueix, amb una bona dosi de paciència, que: $b_n = \frac{4^n + (-2)^n}{2}$ i $n_n = \frac{4^n - (-2)^n}{2}$. Per tant, l'àrea blanca en la posició n és: $B_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ i l'àrea negra en la posició n és: $N_n = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Així, quan n→oo, es compleix que $B_n \to \frac{1}{2}$ i $N_n \to \frac{1}{2}$. DIFICULTAT: 50.

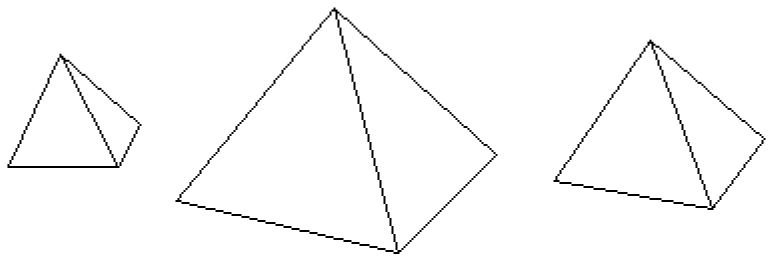
16.- ELS FILLS DE FILIBERT

El tercer fill diu la veritat. Els demés diguen mentides. DIFICULTAT: 30

HUMOR MATEMÀTIC

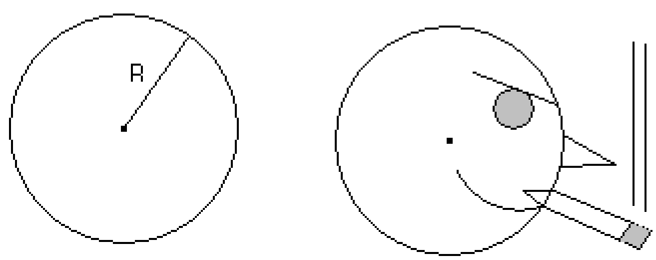
EGIPTE

El secret de les construccions de les piràmides consisteix en que mentre anaven construint-les, s'anava retallant el pressupost, s'anava retallant el pressupost, ...



PERVERSITATS

Pregunta: Si sobem un cercle de radi R, quina figura obtindrem?.
Resposta: Un cercle viciós.



UNA FESTA PER A IRRACIONALS

Saps si vindran els de la premsa?

$\sqrt[3]{6}$

Com vols que vinguen, si no es permet el pas als periòdics?

$\sqrt{7}$

Ara mateix hem expulsat al 2 que se'n havia colat en la festa.

Es va disfressar d'arrel quadrada de 4 per a confondre al porter, que és cegat.

$\sqrt{3}$

Però com pogué colar-se?

$\sqrt[3]{5}$

S.
E.
M.
C.
V.

AL-KHWARIZMI

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"