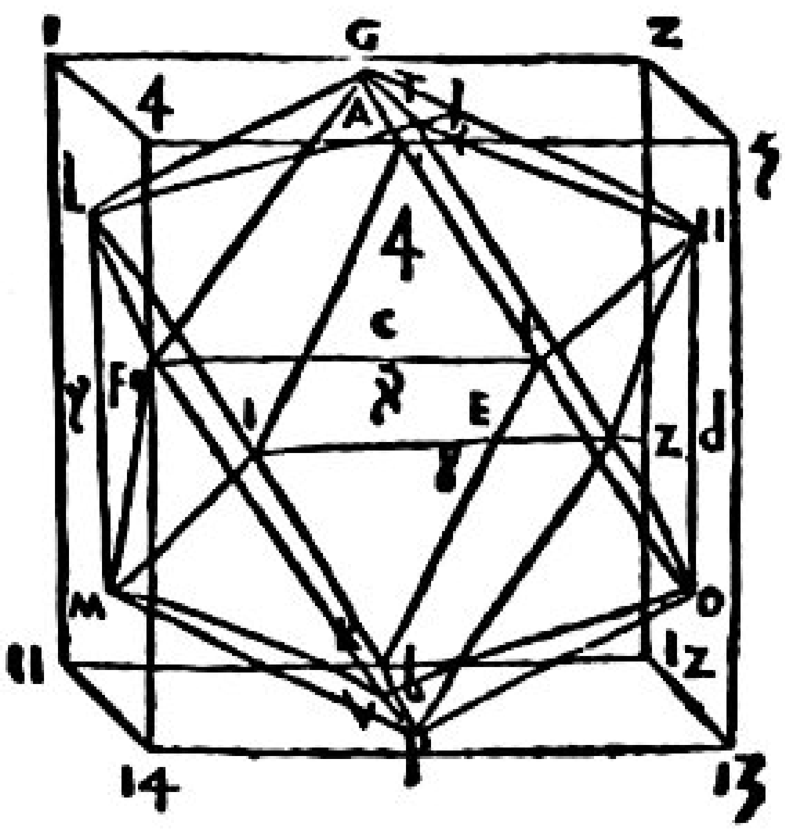
S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

PROBLEMES OLÍMPICS



Revista de problemes de Matemàtiques
Número 8. Febrer 2001

La resolució de problemes és un procés, no un procediment pas-a-pas, o una resposta que cal trobar; és, fonamentalment, un viatge, no una destinació.

Els bons resolutors de problemes es poden identificar per els processos o actituds mentals que desenvolupen. Quatre característiques ajuden a identificar als bons resolutors de problemes: desig, entusiasme, equipament matemàtic i heurístic, i talent per a fer-se preguntes i triar camins que condueixen a les solucions.

Equipament matemàtic vol dir comprensió de conceptes, relacions i processos matemàtics fonamentals. Equipament heurístic vol dir capacitat de conjeturar, resoldre problemes més fàcils, fer dibuixos, gràfiques, taules; trobar regularitats, fer prediccions i aplicar els resultats a situacions noves.

Com passa amb altres coses, la millor manera de fer-se un expert resolutor de problemes és fent molts problemes. I, clar, per a fer-se un expert resolutor de problemes difícils, cal fer molts problemes difícils. La nostra pretensió es contribuir a aquesta tasca, i, de pas, afavorir la preparació dels nostres estudiants per a la seua partipació a la XII Olimpíada Matemàtica de la Societat. En el número anterior varen avançar-vos les dates i llocs de realització de les diferents fases provincials i autonòmica,, així com tota la informació sobre l'Olimpíada.

Ací teniu el número 8 de la nostra revista "Problemes Olímpics". Com en altres ocasions, proposem activitats per al primer cicle (nivell A) i per al segon cicle (nivell B), amb les seues solucions. Indiquem també el grau de dificultat (en una escala creixent de 10 a 50 punts). Esperem que aquesta nova col·lecció d'activitats siga útil per a tots. Eixe és el nostre desig. Bon profit!.

Maurici Contreras del Rincón (coordinador)
Josep Antoni Chaveli Gascón
Mercé Fort Iborra
Encarna López Gómez
Mari Carme Olivares Iñesta
Tomás Queralt Llopis
Francesc Casamitjana Gámez
Mariano De Heredia González
Josep Llorenç Llisó Valverde
Antoni Losas González
Martín Montoya Molina

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- ELS QUATRE APARELLS

A una classe, al menys el 85% dels estudiants té televisió; al menys el 75% té vídeo; al menys el 80%, un aparell de música; al menys el 70%, un ordinador. Quants tenen al menys els quatre aparells anteriors?.

2.- A BEURE ORXATA!

Un home pot beure un bidó d’orxata en 27 dies. Una dona pot beure un bidó d’orxata en 54 dies. Si ambdós beuen del mateix bidó als seus respectives ritmes, quant de temps tardaran en buidar el bidó?.

3.- COLUMNES DE XIFRES

5		
8	9	
2	4	5
7	7	8
4	8	7
9	5	9

Observa les tres columnes de xifres.
Quina de les següents columnes continua la seqüència?

7	8	9	9
8	7	8	7
5	9	5	8
A	**B**	**C**	**D**

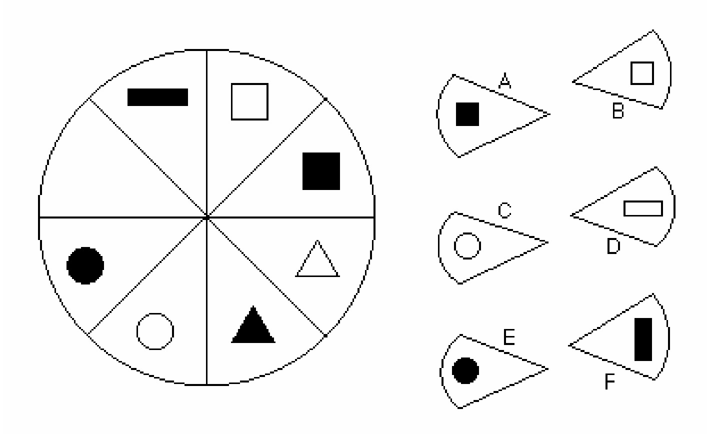
4.- TRENCACLOSQUES NUMÈRIC

5	3	5	7	5
7	5	3	7	7
3	5	3	5	3
5	7	5	3	5
3	7	7	5	7

Cal desplaçar-se d'un quadrat adjunt a un altre horitzontalment o vertical, començant pel quadrat de l'angle inferior esquerre i acabant en el superior dret. Hem d'ajuntar nou nombres i sumar-los. De quantes formes diferents podem sumar 39?.

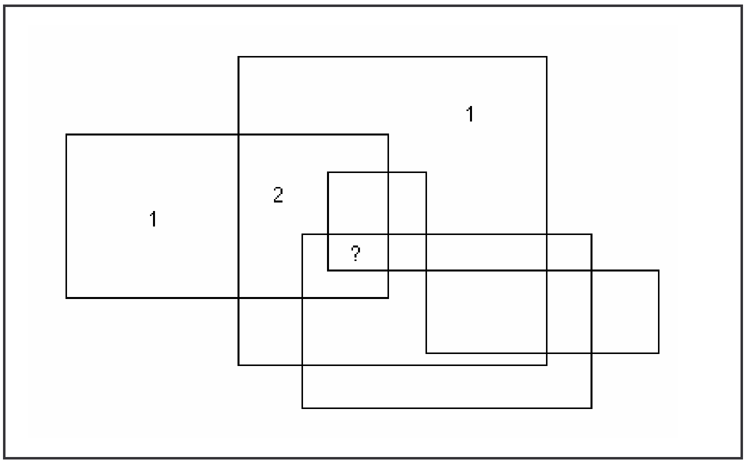
5.- LA COCA

Quin és el sector que li falta a la coca?



6.- QUIN NOMBRE FALTA?

Aquesta figura ha sigut parcialment farcida amb nombres següent una llei. Pots descobrir la lògica del sistema i substituir l'interrogant per un nombre?.



7.- ELS BANDOLERS

Uns bandolers varen furtar una bossa de diamants. El cap va proposar el següent repartiment:

-El menys antic de nosaltres s'emportarà un diamant, el següent dos, el següent tres i així successivament.

Però els demés no varen acceptar i proposaren un altre repartiment:

-Cadascun de nosaltres s'emportarà cinc diamants.

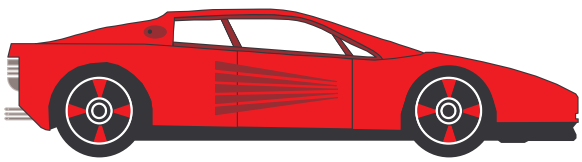
Quants diamants es varen repartir i quants eren els bandolers?.

8.- ELS TELETUBBIES

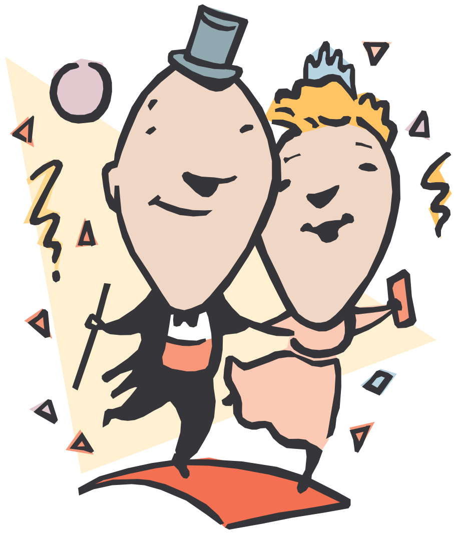
41 teletubbies reunits en una cova decideixen saludar-se amistosament. Es col·loquen en cercle i contant des d'un cert lloc abracen al que fa tres successivament. Flavio i el seu amic, que no es poden veure, quins llocs han d'ocupar per a no saludar-se?.

9.- LES VACANCES DELS MINERS

Set miners se'n anaren de vacances a la platja. Sis integrants del grup gastaren 120 euros cadascun, però Raimon era més gastador, i es va gastar 36 euros més que la mitjana del grup. A quant varen pujar exactament les despeses de Raimon?.



10.- FESTA FAMILIAR



Una festa familiar va reunir a un avi, una avia, dos pares, dues mares, quatre fills, tres nets, un germà, dues germanes, dos fills xics, dues filles dones, un sogre, una sogra, una nora. Vint-i-tres persones en total?. No. Solament hi havia set persones presents. Com és possible?.

11.- EDATS

En una ocasió, tres dones parlaven de les seus edats.

Glòria.- Tinc 22 anys. Soc 2 anys més jove que Llúcia. Soc 1 any major que Maria.
Llúcia.- No soc la més jove. Hi ha 3 anys de diferència entre Maria i jo. Maria té 25 anys.
Maria.- Soc més jove que Glòria. Glòria té 23 anys. Llúcia és tres anys major que Glòria.
Evidentment no diuen la veritat. Únicament dues de les afirmacions que fa cadascuna d'elles son certes. Quina és l'edat de cadascuna d'elles?.

12.- EL NOMBRE DE LA MEUA VIVENDA

El nombre és tal que si l'elevem al quadrat, el resultat el torne a elevar al quadrat i aquest últim resultat el torne a multiplicar pel nombre del principi, en resulta un nombre de set xifres acabat en 7. Quin nombre és?.

13.- CREÏLLES

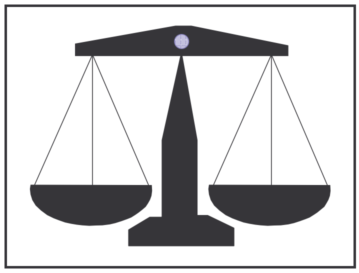
Una mare té 6 xiquets i 5 creïlles. Com pot distribuir les creïlles en parts iguals entre els seus 6 fills?. (No valen fraccions).

14.- PRODUCTE

El producte de tres nombres enters consecutius és 357840. De quins nombres és tracta?

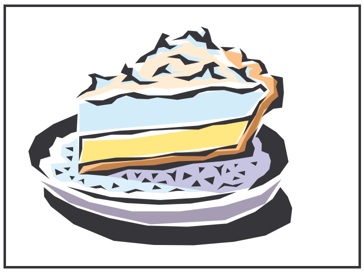
15.- SUCRE!

Disposem d'una balança de plats de precisió i dues peces, una de 200 g i altra de 50 g. Volem pesar 375 g. de sucre. Com ho faries?.



16.- PASTISSOS

Carme va arribar a sa casa amb 12 pastissos. Pel camí s'ha trobat amb un amic al que li dona la meitat dels pastissos que havia comprat. Després es va trobar amb la seua germana a la que li va donar la meitat dels que li quedaven. Quants pastissos havia comprat?.



17.- QUADRAT MÀGIC

Cadascuna de les files, columnes i dues diagonals composades per cinc nombres, ha de sumar 20. Quin nombre ha de substituir al signe d'interrogació?.

5	2		2	5
1		?		1
5	8	4		3
	2		2	
3	2		10	3

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

1.- EL 1 I EL 2

És 1=2?. Si penses que no, fixa't en aquest raonament. A veure si et fa canviar d'opinió. Esperem que no, ja que com molt bé sabem, 1 és 1 i 2 és 2 i no pot ocórrer que 1 siga 2 i 2 siga 1. On es troba l'error d'aquest raonament?

Siga $x = y$:

$$x^2 = x \cdot y$$
$$x^2 - y^2 = x \cdot y - y^2$$
$$(x+y)\cdot(x-y) = (x-y)\cdot y$$
$$x + y = y \qquad \text{Com que } x = y:$$
$$x + x = x$$
$$2\cdot x = x$$
$$2 = 1$$

2.- EL PROBLEMA DE MONTY HALL

Abunden cada vegada més eixos concursos sàdics en que, en quan el concursant ha guanyat un premi, el pervers presentador li ofereix canviar-lo per altre, afegint diners a més a més.

El problema seria el següent:

Un presentador de la TV et dona a elegir entre tres enormes caixes numerades iguales. Una d'elles conté un cotxe, i les altres estan buides. Però, independentment de la teua elecció, el presentador, abans de que veges la teua caixa, obri una de les altres dues, que resulta estar buida, i t'ofereix la possibilitat de canviar la teua elecció. Et convé fer el canvi?.

3.- TRENCACLOSQUES NUMÈRIC

Hi ha una relació entre les columnes de nombres d'aquest diagrama. Les lletres de dalt de la quadrícula serveixen d'ajuda. Quin nombre cal posar als quadrats buits?.

A	B	C	D	E
9	0	6	9	
8	1	6	9	7
7	2	6	9	8
7	1	5	8	
3	1	1	4	2

4.- UN ALTRE TRENCACLOSQUES

La figura de cadascun dels quadrats té un valor. El total apareix junt a una fila o baix d'una columna. Quin nombre cal substituir als signes d'interrogació?.

5.- ELS BANDOLERS

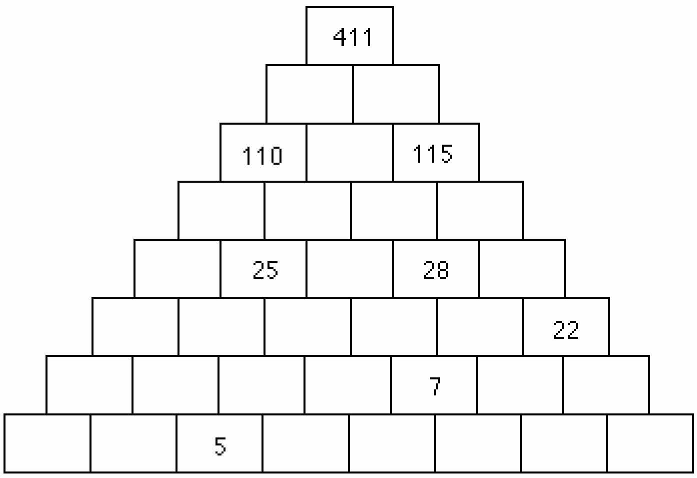
Uns bandolers varen furtar cavalls. El cap va calcular com fer el repartiment i va dir:

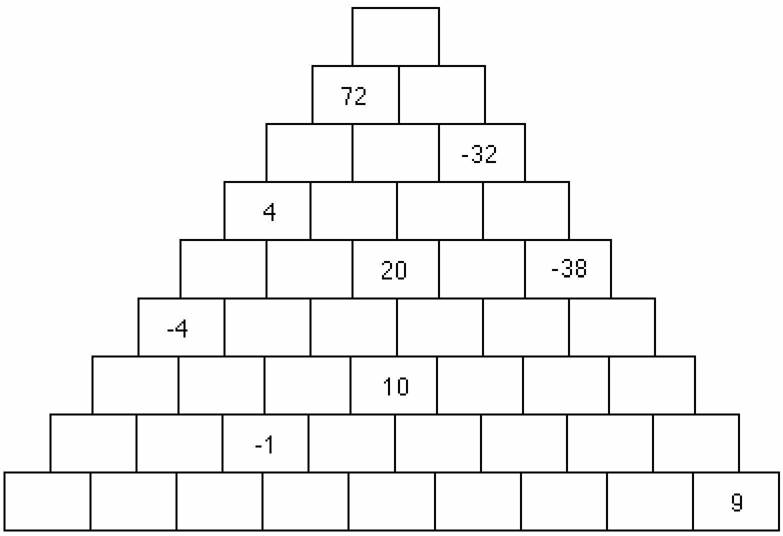
Si ens quedem sis cadascun, en sobren cinc, i si ens quedem set, aleshores falten vuit.

Quants cavalls i quants bandolers hi havia?.

6.- PIRÀMIDES NUMÈRIQUES

Si cada casella és la suma dels dos nombres que té baix, saps omplir les següents piràmides numèriques?.



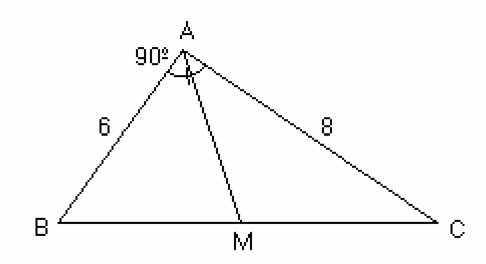


7.- EDATS

L'edat del meu marit es representa invertint les xifres de la meua edat. Ell és major que jo, i la diferència de les nostres edats és igual a la onzena part de la suma d'ambdues. Quina edat tenim?.

8.- MEDIANA

Calcula el valor de la mediana AM corresponent a la hipotenusa d'un triangle rectangle ABC de catets 8 i 6 cm.

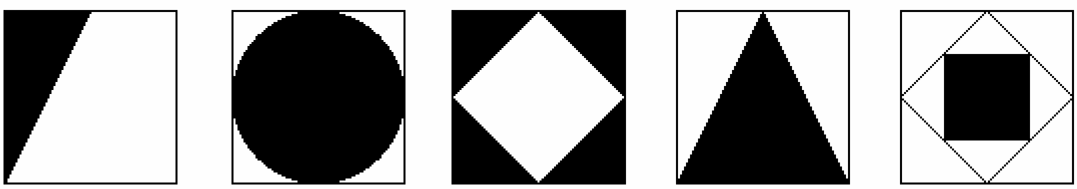


9.- ELS TRES AMICS

Albert, Bernat i Carles es reparteixen les seues vesprades entre estudi i cinema. Si Albert es queda estudiant, Bernat se'n va al cinema. Cada vesprada un dels dos, Albert o Carles, es queda estudiant, però no els dos. Bernat i Carles no van la mateixa vesprada al cinema. Quin creus que va poder anar ahir al cinema i qui es quedarà hui estudiant?.

10.- ÁREES I

Si l'àrea ombrejada en cadascuna de les figures val 1 unitat, quant val l'àrea del quadrat corresponent?.



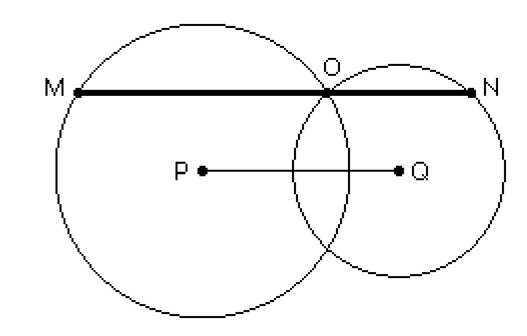
11.- QUADRAT MÀGIC

Ompli les caselles buides d'aquest quadrat màgic per a que tinga tots els nombres de l'1 al 25, de forma que cada fila, cada columna i cadascuna de les dues diagonals sumen 65.

	1		22				65
	7		3	11			65
		21		17	5		65
		2		23			65
	25		16				65
65						65	
	65	65	65	65	65		

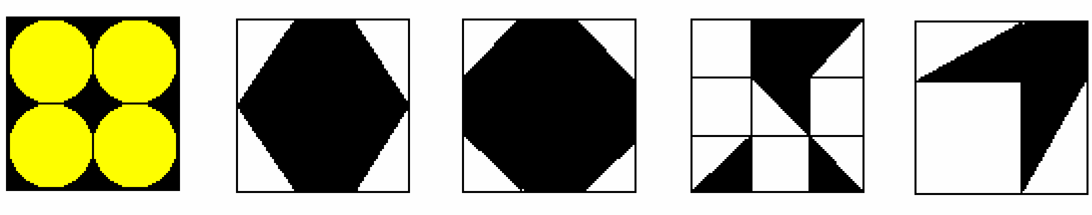
12.- COLP D'ULL

Dues circumferències secants tenen per centres P i Q respectivament. El segment PQ mesura 3 centímetres. Per un dels punts (O) on es tallen les circumferències dibuixem una recta paral·lela al segment PQ. Siguen M i N els punts on talla eixa recta a les circumferències. Quina es la llargària del segment MN?.



13.- ÁREES II

Si l'àrea ombrejada en cadascuna de les figures val 1 unitat, quant val l'àrea del quadrat corresponent?.

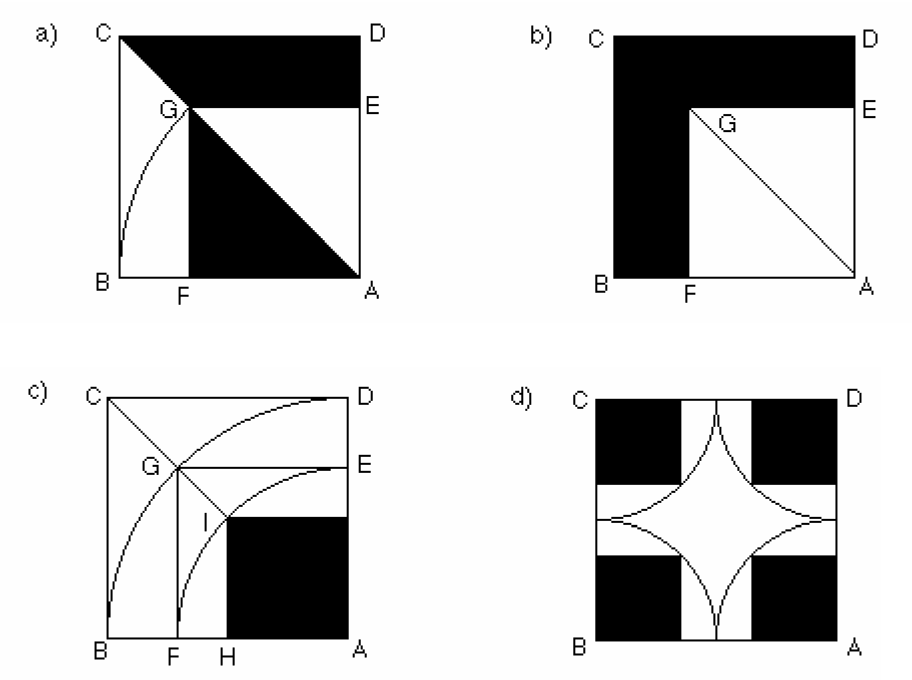


14.- PERE I MARIA

Maria diu "*He llançat 20 vegades una moneda i m'han eixit 20 cares*", a la qual cosa Pere respon "*Això que t'ha passat és tan probable com que el resultat hagués estat CC++C+++CCCC++C++++C*". Maria replica "Llavors és igualment probable que apareguen 20 cares o que apareguen 9 cares i 11 creus". Justifica si és o no certa la afirmació de Maria, i calcula les probabilitats dels dos successos que va comparar Maria.

15.- ÁREES OMBREJADES

Calcula les següents àrees ombrejades, tenint en compte que el quadrat ABCD té una unitat d'àrea, i utilitzant l'arc DB, amb centre en el vèrtex A.



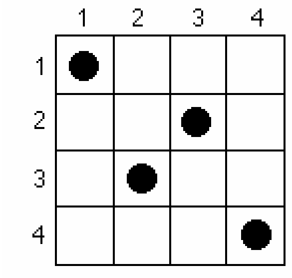
16.- ELS FORMATGES

Un foraster va donar 16 monedes a dos pastors per haver compartit el seu dinar amb ell. Però els pastors havien contribuït al dinar de forma desigual. Un pastor havia posat 4 formatges i l'altre 2. El primer pastor pensava que li corresponia el doble de monedes, però l'altre va protestar perquè pensava que eixe repartiment no era just. Varen plantejar el cas a un amic d'ambdós que els va recomanar que no feren cas de les matemàtiques en aquest cas. Però els dos pastors varen insistir en fer el repartiment que indicara la freda lògica dels nombres. Si tu fores el jutge, com ho faries?.

17.- TAULER

De quantes formes podem col·locar quatre fitxes en un tauler 4×4 de forma que cada fila i columna tinga únicament una fitxa?.

Si numerem les caselles de l'1 al 16, d'esquerra a dreta i de dalt a baix, i sumem el nombre corresponent a les caselles ocupades en cadascuna de les col·locacions anteriors, obtenim sempre la mateixa suma. Quin és el valor d'eixa suma?.



SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- ELS QUATRE APARELLS

El percentatge d'estudiants que tenen al menys els quatre aparells és el producte dels percentatges: $0.85\times0.75\times0.80\times0.70=0.357\approx36\%$
DIFICULTAT: 30

2.- A BEURE ORXATA!

En 1 dia l'home beu 1/27 del bidó i la dona 1/54. Aleshores, en 1 dia l'home i la dona junts beuen 1/27+1/54=1/18 del bidó. Per tant, ambdós junts buiden el bidó de cola en 18 dies.
DIFICULTAT: 20

3.- COLUMNES DE XIFRES

La columna que continua la seqüència és la C, ja que acaba en 5 i comença en 9. DIFICULTAT: 10

4.- TRENCACLOSQUES NUMÈRIC

Hi ha dues solucions:

5	3	**5**	**7**	**5**
7	5	**3**	7	7
3	**5**	**3**	5	3
5	7	5	3	5
3	7	7	5	7

5	3	5	7	**5**
7	5	3	7	**7**
3	**5**	**3**	**5**	**3**
5	7	5	3	5
3	7	7	5	7

DIFICULTAT: 30

5.- LA COCA

Falta el sector D.
DIFICULTAT: 10

6.- QUIN NOMBRE FALTA?

Cadascun dels nombres indiquen la quantitat de rectangles a la que pertany eixe nombre. Per exemple, el sector 2 està en dos rectangles, el sector 1 està únicament en un rectangle, etc. D'eixa forma, la interrogació cal substituir-la per 4, ja que pertany a quatre rectangles.
DIFICULTAT: 20

7.- ELS BANDOLERS

En total hi ha 9 bandolers. En efecte, utilitzant el procediment proposat pel cap, el nombre de diamants és: 1+2+3+4+5+---+n=n·(n+1)/2. (Es pot fer la suma pel mètode de Gauss). D'altra banda, utilitzant l'altre procediment, el nombre de diamants és: 5+5+5+---+5=5·n. Per tant, ha de ser:

$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=5\cdot n$ Resolent aquesta equació, tenim: n=9 bandolers.

ALTRE MÈTODE: Fer una taula:

Nº bandolers	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Total diamants Procediment I	1	3	6	10	15	21	28	36	45
Total diamants Procediment II	5	10	15	20	25	30	35	40	45

Per tant, hi ha 9 bandolers.
DIFICULTAT: 20

8.- ELS TELETUBBIES

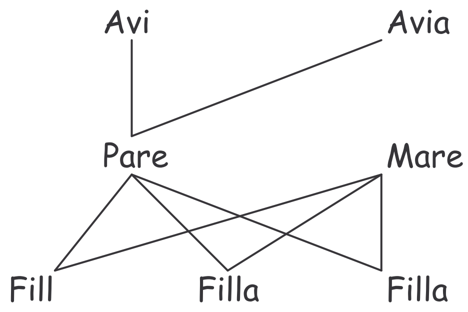
Si numerem els teletubbies del 1 al 41, els posem en cercle i comencem a comptar des del que porta el nombre 1, podem comprovar que els que porten el nombres 16 i 31 no son saludats per ningú. Per tant, Flavio i el seu amic ha d'ocupar les posicions 16 i 31.
DIFICULTAT: 20

9.- LES VACANCES DELS MINERS

Si $\overline{x}$ és la mitjana del grup, ha de ser: $\frac{120\cdot 6+\overline{x}+36}{7}=\overline{x}$. Per tant, resolent aquesta equació, tenim: 120·6 + 36 = 6·$\overline{x}$ $\rightarrow$ $\overline{x}$=126. Per tant, les despeses de Raimon varen pujar fins a 126 + 36 = 162 euros.
DIFICULTAT: 30

10.- FESTA FAMILIAR

És possible que n'hi hagen exactament set persones, sempre que l'arbre genealògic siga el següent:



DIFICULTAT: 30

11.- EDATS

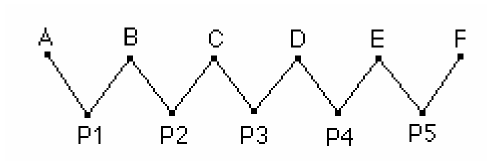
Glòria té 23 anys, Llúcia té 25 anys i Maria té 22 anys. Cadascuna d'elles fa una afirmació falsa. Aquestes afirmacions falses son les següents:
Glòria: Tinc 22 anys.
Llúcia: Maria té 25 anys.
Maria: Llúcia és tres anys major que Glòria.
DIFICULTAT: 30

12.- EL NOMBRE DE LA MEUA VIVENDA

Per les condicions del problema ha de ser: $(x^2)^2 \cdot x = abcdef7$. És a dir: $x^5 = abcdef7$. Com l'última xifra del resultat ha de ser 7, el nombre de la meua vivenda ha d'acabar en 7. Provem:
$7^5 = 16807$. No té set xifres.
$17^5 = 1419857$.
$27^5 = 14348907$. No té set xifres. Per tant, el nombre de la meua vivenda és 17.
DIFICULTAT: 10

13.- CREÏLLES

La mare fa el repartiment de forma que cada dos germans comparteixen una creïlla. Així, si A, B, C, D, E i F són els germans i P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5 les creïlles, el repartiment es farà de forma que: A i B comparteixen P_1; B i C comparteixen P_2; C i D comparteixen P_3; D i E comparteixen P_4 i E i F comparteixen P_5. En resum:



DIFICULTAT: 10

14.- PRODUCTE

Ha de ser: $(n-1)\times n\times(n+1)=357840$. Hem de trobar tres nombres enters el producte dels quals ens done 357840. Si fem la descomposició factorial del nombre 357840, tenim: $357840 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$. D'aquesta forma, com que $2\cdot5\cdot7 = 70$ i $2^3 \cdot 3^2 = 72$, resulta que $70 \times 71 \times 72 = 357840$. Per tant, els nombres buscats són 70, 71 i 72.
DIFICULTAT: 40

15.- SUCRE!

En un recipient anem posant el sucre corresponent als 200 g. de sucre dues voltes, de manera que tindrem 400 g. A continuació, posem en un plat la peça de 50 g. fins a tindre eixa quantitat de sucre en l'altre plat. Una volta equilibrada, llevem la peça i repartim el sucre fins equilibrar de nou la balança, de manera que tindrem 25 g. en cada platet. A continuació, llevarem el sucre d'un platet, i anirem traient sucre del recipient on estan els 400 g. fins aconseguir que els platets s'equilibren. Així, obtindrem en el recipient 375 g. de sucre.
DIFICULTAT: 30

16.- PASTISSOS

Siga x el nombre de pastissos que va comprar. Després de donar la meitat al seu amic, li resten x/2 pastissos. Després de donar la meitat de la meitat a la seua germana, li resten $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}$ pastissos. Per tant, ha de ser: $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=12$.
Resolent aquesta equació, tenim: x = 48. Carme va comprar 48 pastissos.
DIFICULTAT: 20

17.- QUADRAT MÀGIC

Completant el quadrat màgic, amb la condició de que totes les files, les columnes i les dues diagonals sumen 20, obtenim:

5	2	**6**	2	5
1		**?**	**6**	1
5	8	4	**0**	3
6	2	**2**	1	**8**
3	2	**2**	10	3

Per tant, per a que la suma de la tercera columna done 20, ha de ser ? = 6. Hem de substituir el signe d'interrogació per un 6. És a dir, la resposta correcta es la D.
DIFICULTAT: 10

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

1.- EL 1 I EL 2

L'error del raonament es troba al pas de l'expressió $(x+y)\cdot(x-y)=(x-y)\cdot y$ a l'expressió x + y = y. Per a fer aquest pas, hem de dividir per x – y. Però com x = y, resulta que x – y = 0, i... NO ES POT DIVIDIR PER ZÈRO!. Per tant, el raonament es incorrecte.
DIFICULTAT: 40

2.- EL PROBLEMA DE MONTY HALL

La resposta és que és convenient canviar. En efecte, observa que 1/3 de les vegades elegiràs correctament la primera vegada, i canviar seria una errada. Per tant, les 2/3 de vegades guanyaràs el cotxe. L'estratègia és rentable, encara que no sempre el presentador obrirà la caixa després de la teua primera elecció. El fet de canviar millora sempre les teues possibilitats de 1/3 a 2/3. Únicament no hauries de fer-ho quan el presentador fa trampes, és a dir, quan te fa canviar basant-se en que sap que has elegit be la primera vegada. DIFICULTAT: 30

3.- TRENCACLOSQUES NUMÈRIC

Observem les següents relacions per columnes: A+B=D, D–3=E, B+C=E. Per tant, les dos caselles buides deuen ser iguals, ambdues, a 6.
DIFICULTAT: 20

4.- UN ALTRE TRENCACLOSQUES

Fent càlculs es pot comprovar que:

✪=7, ✦=8, ✯=25, ★=17.

Per tant, els signes d'interrogació han de substituir-se per 65.
DIFICULTAT: 20

5.- ELS BANDOLERS

Siga n el nombre de bandolers i siga x el nombre de cavalls que van furtar. Aleshores, tenim: $x=6\cdot n+5=7\cdot n-9$. Per a trobar els valor de n i x, fem una taula com la següent:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6n+5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83
7n–8	–1	6	13	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83

Per tant, hi havien 13 bandolers i van furtar 83 cavalls.
DIFICULTAT: 10

6.- PIRÀMIDES NUMÈRIQUES

Les solucions son les següents:

411
203 208
110 93 115
65 45 48 67
40 25 20 28 39
24 16 9 11 17 22
13 11 5 4 7 10 12
7 6 5 0 4 3 7 5

80'5								
72	8'5							
31'5	40'5	-32						
4	27'5	13	-45					
-3'5	7'5	20	-7	-38				
-4	0'5	7	13	-20	-18			
-7'5	3'5	-3	10	3	-23	5		
-12	4'5	-1	-2	12	-9	-14	19	
-18'5	6'5	-2	1	-3	15	-24	10	9

DIFICULTAT: 40

7.- EDATS

Siga xy l'edat de la dona. L'edat del marit serà yx. Per les condicions del problema ha de ser: $yx - xy = \frac{1}{11} \times (yx - xy)$.

D'on tenim: $10y + x - 10x - y = \frac{1}{11} \cdot (10y + x + 10x + y)$.

Fent operacions: 9(y-x)=y+x. Això vol dir que la suma de les xifres y+x ha de ser múltiple de 9, i a més, y > x, per què l'edat del marit és major que la de la dona. Fent proves, obtenim que: x=4 i y=5. És a dir, la dona té 45 anys i l'home té 54 anys.
DIFICULTAT: 20

8.- MEDIANA

Pel teorema de Pitàgoras, $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \rightarrow BC = 10$. Com que M és el punt mig de BC, ha de ser BM=5 i MC=5. D'altra banda, al triangle rectangle ABC tenim: tgB=8/4=1.3333… D'on tenim: $\angle$B=53.130102º. Per tant, cosB=0'6. Aplicant el teorema del cosinus al triangle ABM, obtenim:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos\hat{B} = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 0'6 = 25 \rightarrow AM = 5\,\text{cm}.$$
DIFICULTAT: 50

9.- ELS TRES AMICS

Per les condicions del problema, Albert se'n va al cinema totes les vesprades, ja que si una vesprada es queda a estudiar, Bernat ha d'anar-se'n al cinema i Carles ha de quedar-se a estudiar. Però Albert i Carles no poden quedar-se a estudiar ambdós. Absurd!. Això vol dir que Albert se'n va sempre al cinema, i per tant, Carles es queda sempre a estudiar. L'únic que pot anar ahir al cinema i quedar-se hui estudiant és Bernat.
DIFICULTAT: 30

10.- ÁREES I

Les àrees valen, respectivament: 4, $4/p$, 2, 2 i 4 unitats d'àrea. En el segon cas (cercle inscrit al quadrat), si x és el costat del quadrat, es compleix: $\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=1 \rightarrow \pi\cdot\frac{x^2}{4}=1 \rightarrow x^2=\frac{4}{\pi}$ u. c.
DIFICULTAT: 20

11.- QUADRAT MÀGIC

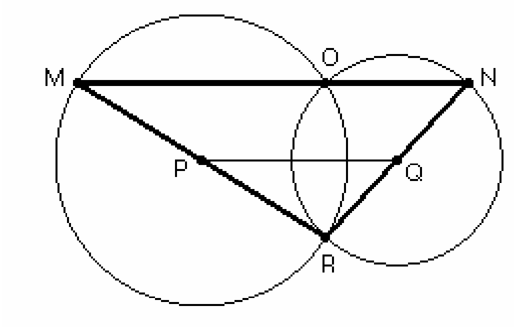
La solució és la següent:

1	14	22	10	18
7	20	3	11	24
13	21	9	17	5
19	2	15	23	6
25	8	16	4	12

DIFICULTAT: 30

12.- COLP D'ULL

Si unim els punts M i N amb el altre punt d'intersecció de les dos circumferències, obtenim el triangle MNR. Els punts P i Q són punts mitjans dels costats MR i NR, ja que aquests son diàmetres, mentre que P i Q son centres de les circumferències. Això vol dir que PQ és la paral·lela mitjana del triangle MNR. Per tant, PQ és la meitat del costat MN. És a dir, MN és dues vegades el segment PQ. Aleshores, MN = 2·PQ = 6 cm.



DIFICULTAT: 30

13.- ÁREES II

Les àrees són, respectivament: $\frac{4}{4-\pi}, \frac{3}{2}, \frac{9}{7}, 3$ i 3 unitats d'àrea. En efecte, si x és el costat del quadrat:

- La primera àrea ombrejada és: $x^2 - 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2 = 1 \rightarrow (4-\pi)\cdot x^2 = 4$. Per tant, l'àrea del quadrat és $x^2 = \frac{4}{4-\pi}$ u. c.

- La segona àrea ombrejada és: $\frac{2}{3}\cdot x^2 = 1$. Per tant, l'àrea és: $x^2 = \frac{3}{2}$ u. c.

- La tercera àrea ombrejada és: $7\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow 7\cdot\frac{x^2}{9} = 1 \rightarrow x^2 = \frac{9}{7}$ u. c.

- La quarta àrea ombrejada és: $\frac{1}{3}\cdot x^2 = 1 \rightarrow x^2 = 3$ u. c.

- La cinquena àrea ombrejada és: $\frac{1}{3}\cdot x^2 = 1 \rightarrow x^2 = 3$ u. c.

DIFICULTAT: 40

14.- PERE I MARIA

Solament hi ha una forma d'obtenir 20 cares al llançar 20 vegades una moneda. En canvi, hi ha més d'una forma d'obtenir 9 cares i 11 creus. Per tant, no és certa l'afirmació de Maria.

La probabilitat d'obtenir 20 cares en 20 llançaments és:

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0'00000095.$$

La probabilitat d'obtenir 9 cares i 11 creus en 20 llançaments és:

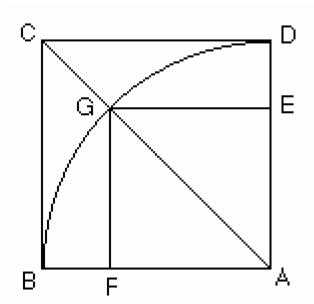
$$p = \binom{20}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0'1601791 \approx 0'16.$$

DIFICULTAT: 30.

15.- ÁREES OMBREJADES

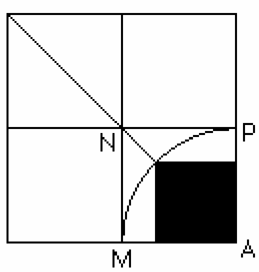
a) L'àrea ombrejada és: $\frac{1}{2}$ u. c.

b) A la figura adjunta observem: AG=AB=1 i FG=AF. Aplicant el teorema de Pitàgoras: $AF^2 + FG^2 = AG^2 \rightarrow AF^2 + AF^2 = 1 \rightarrow 2 \cdot AF^2 = 1 \rightarrow AF^2 = \frac{1}{2}$. Per tant: àrea (AFGE) = $\frac{1}{2}$ u. c. $\rightarrow$ àrea ombrejada = $\frac{1}{2}$ u. c.



c) Utilitzant l'apartat anterior: àrea ombrejada = $\frac{1}{2}$ àrea (AFGE) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ u. c.

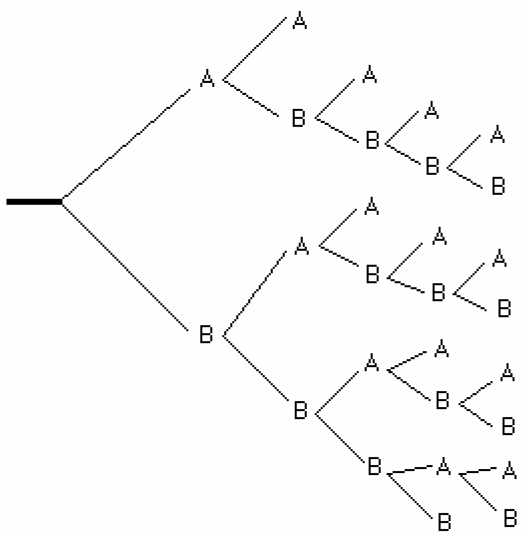
d) Observant la figura, tenim: àrea d'un quadrat ombrejat = $\frac{1}{2}$ àrea (AMNP) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ u. c. Per tant: àrea ombrejada = $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ u. c.



DIFICULTAT: 30

16.- ELS FORMATGES

Suposem que els pastors comparteixen el dinar amb el foraster fent un sorteig (cara o creu) per a veure qui posa el formatge cada vegada. D'aquesta forma, quan el pastor A ha donat quatre formatges i B dos, el dinar es interromput. D'altra banda, si tots els 6 formatges foren del mateix pastor, evidentment eixe pastor hauria de rebre totes les monedes. Per això, podem suposar que els pastors estan jugant un joc en que el primer que pose 6 formatges guanyarà les 16 monedes del foraster. Per tant, per a resoldre el problema farem un diagrama d'arbre que mostre les possibilitats que es donarien si el joc haguera continuat.



Aleshores, la probabilitat de que "guanye" A és:

$$p(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{13}{16}$$

i la probabilitat de que guanye B és $p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$.

Per tant, al pastor A li corresponen 13 monedes i al B únicament 3 monedes.
DIFICULTAT: 40

17.- TAULER

Com únicament pot haver una fitxa per fila, per a col·locar-la a la primera fila, tenim que elegir una columna: n'hi ha 4 possibilitats; una vegada elegida la columna, la fitxa que posarem a la segona fila únicament pot elegir-se entre tres columnes; i així successivament. Hi ha 4! = $4\times3\times2\times1$ = 24 formes de col·locar les fitxes al tauler.

A la 1ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre 0 + a

A la 2ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre 4 + b

A la 3ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre 8 + c
A la 4ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre 12 + d

on els nombres (a, b, c, d) formen una permutació dels nombres (1, 2, 3, 4), ja que les fitxes no poden col·locar-se a la mateixa columna. Per tant, la suma és: S = 1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 4 + 8 + 12 = 34.
DIFICULTAT: 40

Te falta algun exemplar de la revista **Problemes Olímpics**? Si vols ens la pots demanar i te l'enviem a la teua adreça.

S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

SOL·LICITUD D'ENVIAMENT DE NÚMEROS ANTERIORS DE "PROBLEMES OLÍMPICS"

Nom____________ Cognoms____

Adreça____ Telèfon_________________

C.P. _________ Població_______________________________ Província________________

Correu-e:_____________________ Tasca docent (curs, nivell, etc.)__________________

Desitge rebre els següents números de la revista "Problemes Olímpics" a la meua adreça:

X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 1 (200 ptes.)
X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 2 (200 ptes.)
X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 3 (200 ptes.)
Problemes Olímpics Nº 1 (400 ptes.)
Problemes Olímpics Nº 2 (200 ptes.)
Problemes Olímpics Nº 3 (200 ptes.)
Problemes Olímpics Nº 4 (200 ptes.)
Problemes Olímpics Nº 5 (400 ptes.)
Problemes Olímpics Nº 6 (300 ptes.)
Problemes Olímpics Nº 7 (300 ptes.)

Ens envies aquesta butlleta complimentada a la nostra adreça: Societat d'Educació Matemàtica "Al-Khwarizmi", Apartat 22.045, 46071-València, indicant en el sobre "Revista Problemes Olímpics", incloent el justificant d'ingrés del preu total dels exemplars que sol·licites al nostre compte de la CAM: 2090-2842-0040032323.