

XXXIII OLIMPIADA MATEMÀTICA 2023

NIVELL B 3r. i 4t. de Secundària

ATENCIÓ

- ESCRIU LES TEUES DADES PERSONALS ÚNICAMENT EN AQUEST FULL.
- EN LA RESTA DE FULLS ÚNICAMENT CONTESTA LES PREGUNTES. COM MÉS EXPLIQUES EL PROCÉS DE RESOLUCIÓ, SERÀ MILLOR PER A VALORAR LA TEUA RESPOSTA.
- PROCURA QUE LA CONTESTACIÓ A CADA PREGUNTA ESTIGA EN EL MATEIX FULL DE LA PREGUNTA, JA SIGA PER DAVANT O PER DARRERE.
- NO ARRANQUES CAP FULL DEL BLOC.

ATENCIÓN

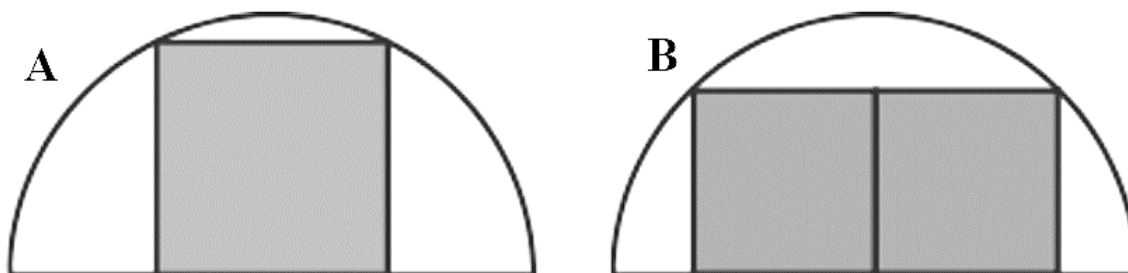
- ESCRIBE TUS DATOS PERSONALES ÚNICAMENTE EN ESTA HOJA.
- EN EL RESTO DE LAS HOJAS ÚNICAMENTE CONTESTA A LAS PREGUNTAS. CUANTO MÁS EXPLIQUES EL PROCESO DE RESOLUCIÓN, SERÁ MEJOR PARA VALORAR TU RESPUESTA.
- PROCURA QUE LA RESPUESTA A CADA PREGUNTA ESTÉ EN LA MISMA HOJA QUE LA PREGUNTA, YA SEA POR DELANTE O POR DETRÁS.
- NO ARRANQUES NINGUNA HOJA DE ESTE BLOQUE.

COGNOMS / APELLIDOS:

NOM / NOMBRE:

1. ELS DOS CAMPS

A un poblet de l'Horta Sud un pare ha deixat en herència, als seus dos fills, dos camps que tenen la següent forma:



El camp A és un quadrat i el camp B és un rectangle format per dos quadrats juxtaposats. Sabem que el més gran té una superfície de $14\,400\text{ m}^2$. Per a repartir l'herència de forma equilibrada, el notari et contracta per tal que determines:

- Quin dels dos camps és el més gran i per què.
- L'àrea del camp més xicotet.

2. TAULA DE NOMBRES

Tenim la següent taula de nombres:

0	2	4	6	8	10	12	14
3	5	7	9	11	13	15	17
6	8	10	12	14	16	18	20
9	11	13	15	17	19	21	23

Ens fixem en el rectangle assenyalat en la trama de nombres, format per dues files i dues columnes consecutives. Si multipliquem en creu els nombres que formen el rectangle, i al major dels valors li restem el menor, s'obté el resultat 6.

$$14 \cdot 13 - 11 \cdot 16 = 6$$

- Ocorrerà el mateix amb qualsevol rectangle de la trama, format per dues files i dues columnes consecutives? Explica raonadament la teua resposta.
- Ens fixem ara en qualsevol rectangle format per tres files i tres columnes consecutives; multipliquem en creu els nombres que ocupen els vèrtexs i al major dels resultats li restem el menor, com en l'exemple següent:

$$15 \cdot 13 - 9 \cdot 19 = 195 - 171 = 24$$

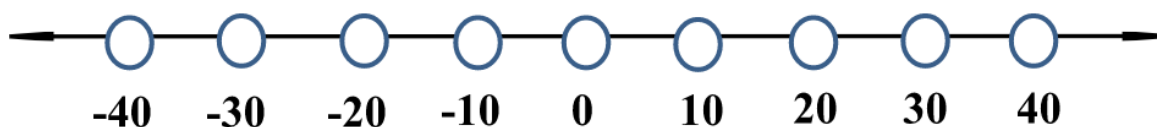
Obtenim sempre el mateix resultat, també en aquest cas?

3. LA GRANOTA SENSE TRELLAT

Hi ha una granota que fa sempre un bot de 10 cm. Unes vegades bota cap a la dreta i altres cap a l'esquerra. No n'hi ha un patró, elegeix dreta o esquerra de forma aleatòria.

Si ix d'un lloc concret, que anomenarem posició 0, posant nombres positius per a indicar la dreta i negatius per a l'esquerra, es demana:

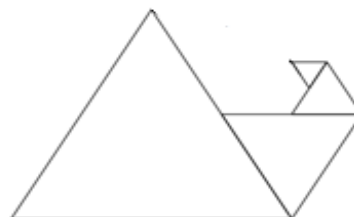
- Després de dos bots, on pot estar la granota?
- Després de tres bots, on pot estar la granota? Quants diferents camins pot haver fet la granota? Hi ha camins diferents que acaben al mateix lloc? En quin o quins llocs acaben més camins?
- Amb quatre bots, quants camins diferents pot recórrer la granota? Escriu quants camins arriben a cada una de les possibles posicions finals de la granota després de quatre bots.
- Amb cinc bots, quants camins diferents pot recórrer la granota? Escriu quants camins condueixen a cada un dels possibles llocs d'arribada de la granota després de cinc bots.
- Si la granota fera 2022 bots, quin creus que seria el lloc més probable en què acabaria el seu camí? I si en fera 2023? Raona la resposta.



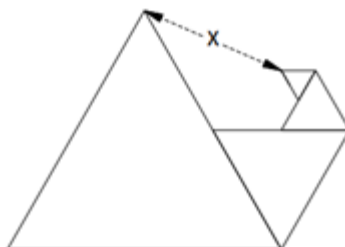
4. ELEMENT MULTITRIANGULAR

A la nova megafactoria que pròximament es construirà a Sagunt es fabricaran bateries per als nous cotxes elèctrics.

Un dels elements d'aquestes bateries és el següent component metàl·lic format per triangles equilàters:

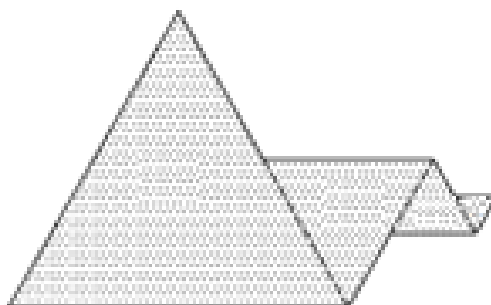


- a. El costat de cada triangle és la meitat del costat del triangle anterior. Si el costat del triangle gran fa 40 mm. Calcula la distància x marcada en la figura següent:



- b. Partim de la mateixa construcció de la figura anterior, amb un nou disseny. Ara el que sabem és que el seu perímetre és 31 mm.

Calcula l'àrea total de la figura.



5. ENTRANT EN L'ATMOSFERA

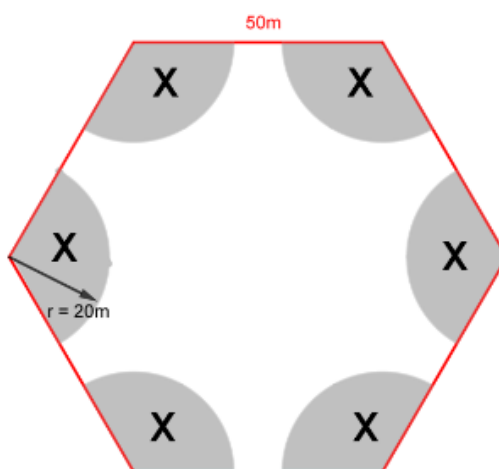
La NASA ha previst retornar la càpsula *Space X* a la Terra després del seu aterratge en Mart. Durant el viatge de tornada, a l'entrada en l'atmosfera, la càpsula alliberarà l'astronauta, que planejarà en paracaigudes fins al punt de recepció.

Per a això s'ha preparat en la costa de Florida un recinte hexagonal regular de 50 m de costat com el de la figura que apareix més avall. A més, en els seus vèrtexs s'han pintat sectors circulars de 20 m de radi marcats amb una X.



Si un astronauta cau aleatòriament dins del recinte, calcula:

- La probabilitat que no caiga en les zones marcades amb una X.
- La probabilitat que caiga en una qualsevol de les zones marcades amb una X.
- Pot caure amb cada un dels peus en zones diferents marcades amb X?



Nota: costat del hexàgon 50 m, radi dels sectors circulars 20 m.

6. FUNCIO POLINÒMICA CURIOSA

Valeria està fent càlculs a la classe de matemàtiques amb una funció $f(x)$, definida per un polinomi de tercer grau.



D'aquesta funció sap que: $f(0) = 2k$, $f(1) = 3k$ i $f(-1) = 4k$.

I la seua professora li ha demanat que calcule $f(3) + f(-3)$.

Ella, amb un càlcul mental, ha contestat $21k$, per una estranya “regla de proporcionalitat amb el triple dels valors”; però la seua professora li diu que no és la contestació correcta i li demana que faça el càlcul detallat i oblide aquest resultat fruit de càlculs i intuïcions poc rigoroses.

- Ajuda-la i calcula el valor exacte de $f(3) + f(-3)$.
- Després de corregir el seu error, Valeria li planteja a la seua professora la següent afirmació: “Si la funció polinòmica és de segon grau, el valor de $f(3) + f(-3)$ serà el mateix.”

Raona si és correcta la seua afirmació.