S. E. M. C. V.

AL-KHWARIZMI

Problemes Olímpics

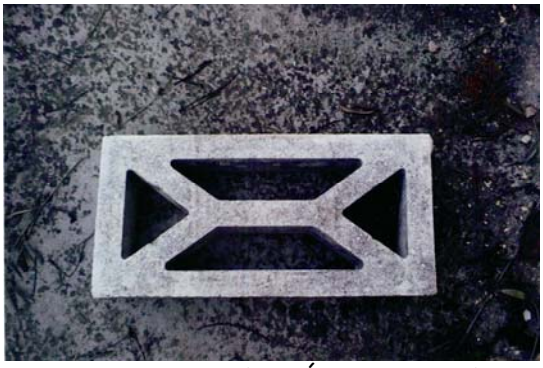


Revista de problemes de Matemàtiques
Número 58. Febrer 2011

GALERIA DE FOTOS PARTICIPANTS AL XII CONCURS DE FOTOGRAFIA "MATEMÀTICA A LA VISTA"



"Geometria viva".
Aitana Infante. IES Bocairent (València)



"Trapezis i triangles". Óscar Domenech.
Col·legi Paidos (Dènia)



"Espiral logarítmica"
Anaïs Biquet. Col·legi Paidos (Dènia)



"Molts"
Ainhoa Flores. Col·legi Paidos (Dènia)



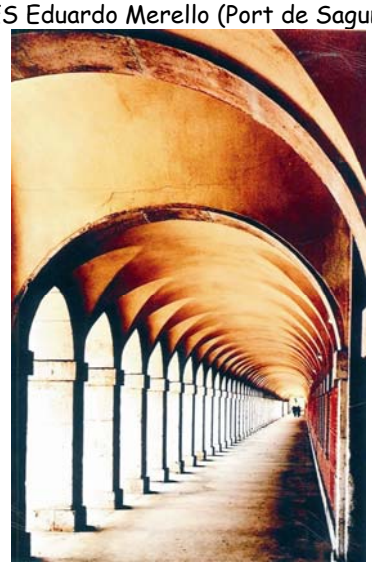
"Esferes entre blaus" Jesús Roca
IES S. Vicent Ferrer (València)



"Semejanzas en el porche". Andrea Esturla.
IES Eduardo Merello (Port de Sagunt)



"Simetría. El llanto del cilindro".
Almudena Torres. IES María Moliner(Port de Sagunt)



"Simetría infinita". Mireia Olid.
Col·legi Sant Bertomeu (Godella)

Presentem el número 58 de **PROBLEMES OLÍMPICS** corresponent al mes de febrer de 2011. El present número inclou més activitats per a treballar la resolució de problemes a la classe de matemàtiques.

Heu visitat la nostra pàgina web? Tenim un nou disseny i una presentació més àgil, moderna i interactiva. A la pestanya "Olimpíades Matemàtiques" teniu tota la informació organitzada segons la província a la que pertany el vostre Centre Educatiu, amb el formulari d'inscripció a l'Olimpíada Matemàtica del 2011. Enguany les dates de celebració són:

- Fase comarcal, 16 d'abril
  - Província d'Alacant:
    - IES Alfàs (Alfàs del Pi)
    - IES L'allusser (Mutxamel)
    - CEIP Reina Sofia (Petrer)
  - Província de València:
    - IES Lluís Simarro (Xàtiva)
    - IES Orriols (València)
    - IES La Vereda (Pobla de Vallbona)
    - Col·legi Madre Sacramento (Torrent)
  - Província de Castelló: no hi ha fase comarcal.
- Fase provincial, 21 de maig
  - Província de Castelló: IES Llombai (Borriana)
  - Província de València: IES Lluis Simarro (Xàtiva)
  - Província d'Alacant: Casa de la Cultura de Xixona
- Fase autonòmica, 11 i 12 de juny, a l'Oceanogràfic de València. Els participants podran gaudir de les matemàtiques i tindre l'experiència de dormir amb els taurons.

PROBLEMES OLÍMPICS
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana, "Al-Khwarizmi"
Apartat 22.045
46071-València

Director: Tomás Queralt Llopis.
Coordinador de redacció: Mauricio Contreras del Rincón.
Consell de redacció: Pedro Alarcón Melero, Mª Dolors Arnal Bertomeu, Maria Jesús Asensio Monedero, Alejandro Barona Hernández, Vicente Diago Ortells, Irene Ferrando Palomares, Nicasio García Alfaro, Verónica García Ruiz, Francisco Gascón Carrillo, Lorena Gimeno Hernández, Mónica Laparra Ibáñez, Antonio Ledesma López, Encarna López Gómez, Eduardo Llopis Castelló, Miguel Marco Cotaina, Josep Manuel Martínez Canet, Encarnación Moreno Ruiz, Mari Carmen Olivares Iñesta, Ruth Orts García, Silvia Quilis Marco, Mª Jesús Ruiz Maestro, Mª Isabel Terraes Bentel.

D.L.: V-3026-2001
ISSN: 1578-1771

Portada: "Epicentro" Autor: Mario Montalbán. IES Eduardo Merello (Port de Sagunt)

Te falta algun exemplar de la revista Problemes Olímpics? Si vols ens la pots demanar i te l'enviem a la teua adreça.

S. E. M. C. V. AL-KHWARIZMI

SOL·LICITUD D'ENVIAMENT DE NÚMEROS ANTERIORS DE "PROBLEMES OLÍMPICS"

Nom_____ Cognoms_____

Adreça_____ Telèfon_____

C.P. _____ Població_____ Província_____

Correu-e:_____ Tasca docent (curs, nivell, etc.)_____

Desitge rebre els següents números de la revista "Problemes Olímpics" a la meua adreça:

□ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 1	(Exhaurit)		
□ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 2	(Exhaurit)		
□ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 3	(1.2 €)		
□ Problemes Olímpics Nº 1	(Exhaurit)	□ Problemes Olímpics Nº 30	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 2	(1.2 €)	□ Problemes Olímpics Nº 31	(Exhaurit)
□ Problemes Olímpics Nº 3	(1.2 €)	□ Problemes Olímpics Nº 32	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 4	(Exahurit)	□ Problemes Olímpics Nº 33	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 5	(Exhaurit)	□ Problemes Olímpics Nº 34	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 6	(Exhaurit)	□ Problemes Olímpics Nº 35	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 7	(Exhaurit)	□ Problemes Olímpics Nº 36	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 8	(Exhaurit)	□ Problemes Olímpics Nº 37	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 9	(Exhaurit)	□ Problemes Olímpics Nº 38	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 10	(Exhaurit)	□ Problemes Olímpics Nº 39	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 11	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 40	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 12	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 41	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 13	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 42	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 14	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 43	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 15	(2.4 €)	□ Problemes Olímpics Nº 44	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 16	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 45	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 17	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 46	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 18	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 47	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 19	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 48	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 20	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 49	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 21	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 50	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 22	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 51	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 23	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 52	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 24	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 53	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 25	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 54	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 26	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 55	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 27	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 56	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 28	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 57	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 29	(2.0 €)		

Ens envies aquesta butlleta complimentada a la nostra adreça: Societat d'Educació Matemàtica "Al-Khwarizmi", Apartat 22.045, 46071-València, indicant en el sobre "Revista Problemes Olímpics", incloent el justificant d'ingrés del preu total dels exemplars que sol·licites al nostre compte de BANCAIXA: 2077-0347-10-1101056867.

SUMARI

PROBLEMES NIVELL C (TERCER CICLE PRIMÀRIA)..... p. 2

PROBLEMES NIVELL A (PRIMER CICLE ESO)..... p. 8

ELS MONOGRÀFICS DE PROBLEMES OLÍMPICS..... p. 15

PROBLEMES DE GEOMETRIA..... P. 15
Ricard Peirò i Estruch

PROBLEMES NIVELL B (SEGON CICLE ESO)..... p. 43

SOLUCIONS.....P. 50

La selecció de problemes de cada nivell i les solucions ha sigut elaborada per l'equip constituït per: Pedro Alarcón Melero, Alejandro Barona Hernández, Ana Alfonso Caamaño, Mª Dolors Arnal Bertomeu, Maria Jesús Asensio Monedero, Ana María Casas Sanmartín, Maurici Contreras del Rincón, Vicente Diago Ortells, Irene Ferrando Palomares, Nicasio García Alfaro, Verónica García Ruiz, Lorena Gimeno Hernández, Mónica Laparra Ibáñez, Antonio Ledesma López, Encarna López Gómez, Eduardo Llopis Castelló, Miguel Marco Cotaina, Josep Manuel Martínez Canet, Encarnación Moreno Ruiz, Mari Carmen Olivares Iñesta, Ruth Orts García, Tomás Queralt Llopis, Silvia Quilis Marco, Mª Jesús Ruiz Maestro, Mª Isabel Terraes Bentel.

FE D'ERRADES: Al número 56 de Problemas Olímpics cal afegir a la llista de membres de l'equip que ha seleccionat els problemas i solucions a Inés Miralles, Sylvia Bendala i Gil Lorenzo.

PROBLEMES NIVELL C (TERCER CICLE PRIMÀRIA)

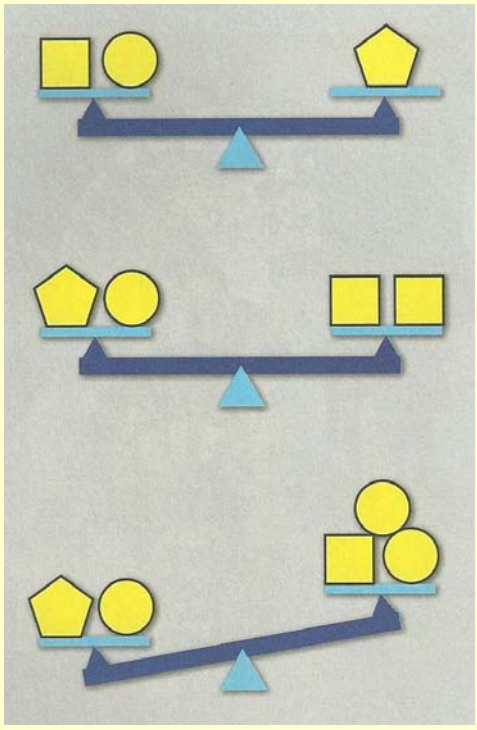
1.- QUATRE DÍGITS

Coloca entre els números els signes + - x per a què siguen certes totes les igualtats. Per exemple, 4 x 3 + 2 – 1 = 13, Intenta trobar més d'una solució en cada fila.

4 3 2 1 = 1
4 3 2 1 = 2
4 3 2 1 = 3
4 3 2 1 = 4
4 3 2 1 = 5
4 3 2 1 = 6
4 3 2 1 = 7
4 3 2 1 = 8
4 3 2 1 = 9
4 3 2 1 = 10
4 3 2 1 = 11
4 3 2 1 = 12
4 3 2 1 = 13
4 3 2 1 = 14
4 3 2 1 = 15
4 3 2 1 = 16

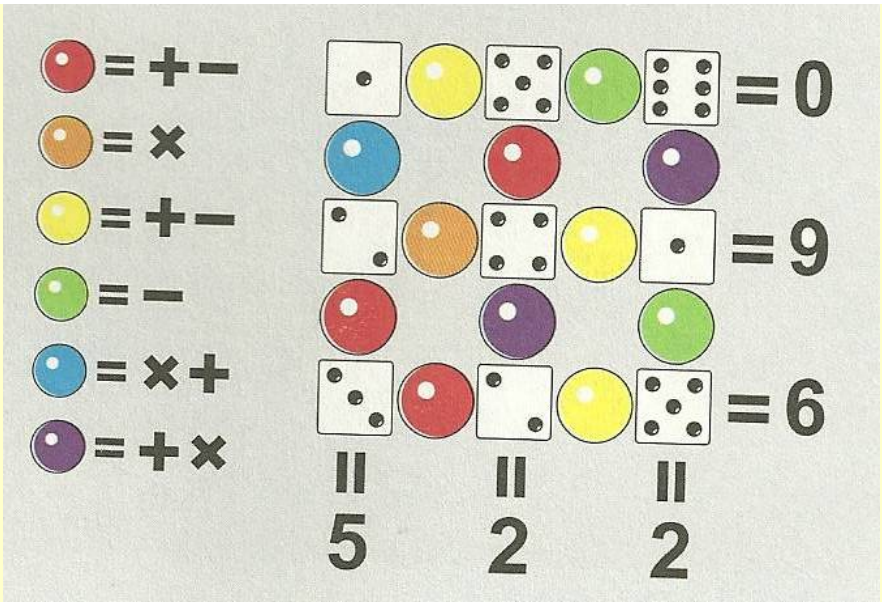
2.- QUADRAT, CERCLE I PENTÀGON

Sabent què el quadrat pesa 2 quilos, quant pesen el cercle I el pentàgon?



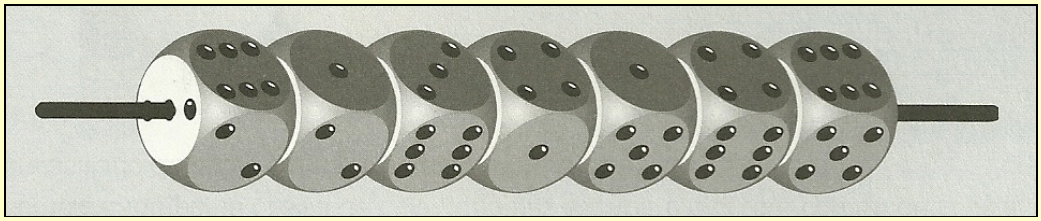
3.- BOLES I DAUS

Sustituix les boles situades entre els daus per els signes correctes, per tal de conseguir què siguen certes les igualtats verticals i horitzontals.



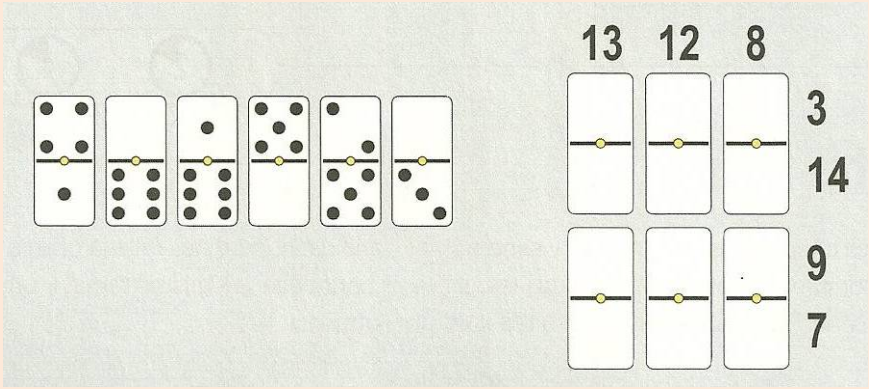
4.- PINXO DE DAUS

Hem ensertat set daus com si fora un pinxo. Pots deduïr a la vista d'ells quant sumen els punts què no es veuen?



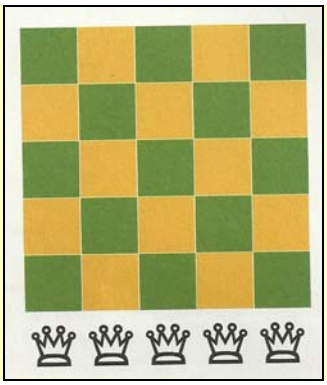
5.- FITXES EN BLANC

Has de colocar les fitxes de l'esquerra sobre les què aparéixen en blanc, de forma què els punts sumen les quantitats assenyalades en ambdós marges.



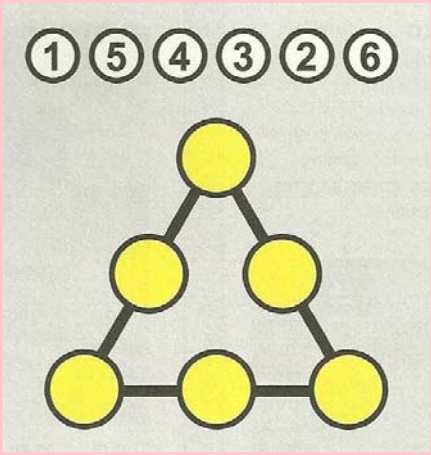
6.- CINC REINES

La reina, en un tauler d'escacs, té una capacitat de moviment máxima, ja que domina la columna, la fila i les diagonals que confluixen en la seua casella. L'objectiu d'aquesta activitat és colocar les cinc reines en el tauler sense què s'amenacen entre si.



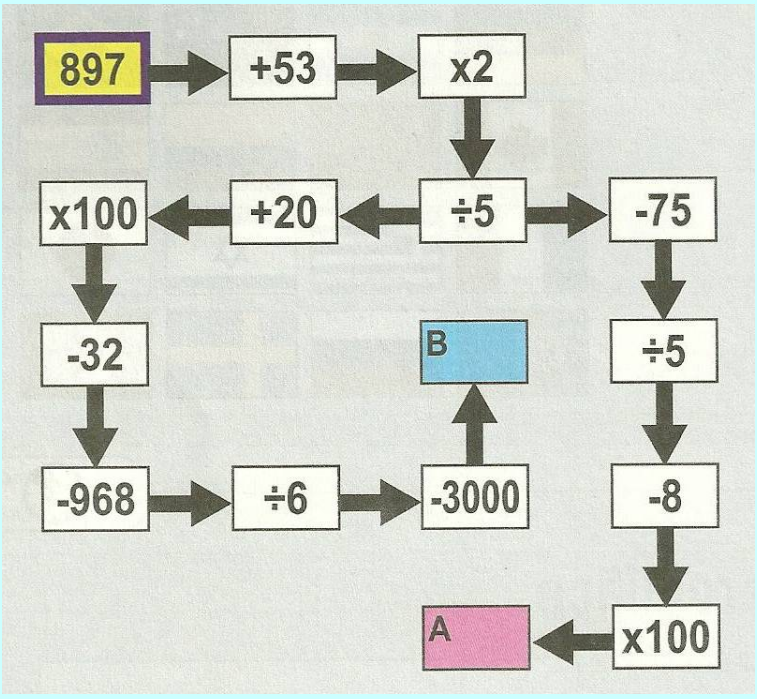
7.- TRIANGLE MÀGIC

Ompli el triangle amb els numerous de l'1 al 6 de forma què la suma dels tres números de cada costat done el mateix resultat, el qual rep el nom de suma del triangle màgic.



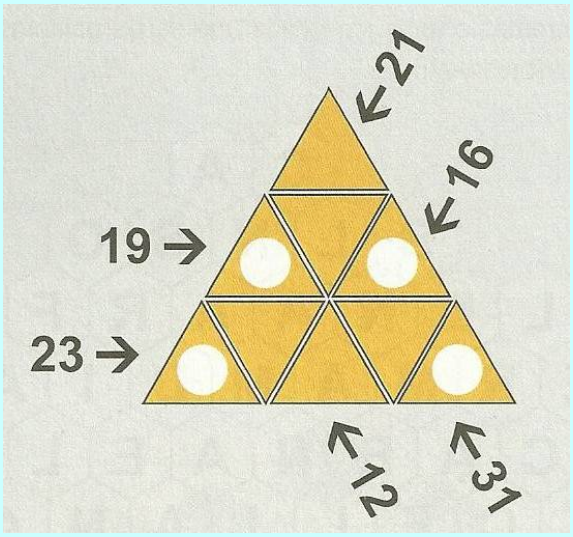
8.- CIRCUÏT

Has de recorrer un circuït en el sentit assenyalat per les fletxes, partint de la xifra de la part superior esquerra, y cal anar fent les operacions indicades en cada casella fins arribar a la què paréix només conté una lletra, en la qual hauràs de posar el resultat. Molt de cura amb les bifurcacions.



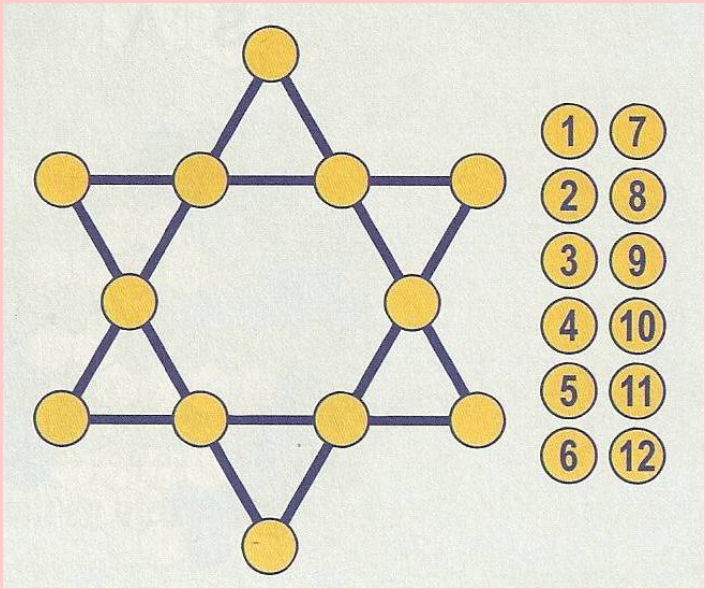
9.- TRIANGLES NUMÈRICS

Has de colocar els números de l'1 al 9, de forma què no se repetisca ningú i què es complixen les sumes indicades. Les caselles amb forat només contenen nombres parells.



10.- ESTELA MÀGICA

Al costat d'aquesta estela figuren els nombres que has de colocar perquè la suma dels nombres de cada linia siga la mateixa.



11.- CORBATES

Totes les corbates del meu armari menys cinc són ratllades, totes menys cinc són marrons llises, totes menys cinc són vermelles llises, totes menys cinc són amb puntets, totes menys cinc són verdes llises i totes menys cinc són negres llises. Quàntes corbates tinc en el meu armari?



12.- INTERROGANT

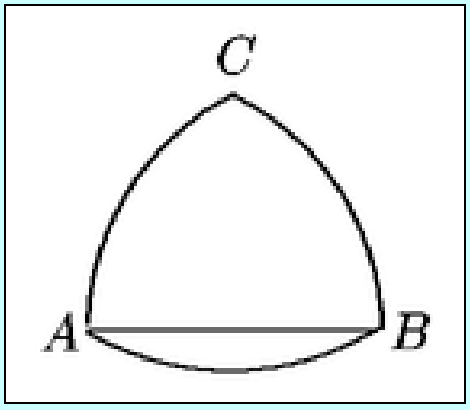
Quin nombre pot sustituir el interrogant?

2	2	3	2	1	3
2	2	1	3	1	6
1	3	2	2	2	5
2	1	4	3	2	7
3	2	3	9	11	?

PROBLEMES NIVELL A (PRIMER CICLE ESO)

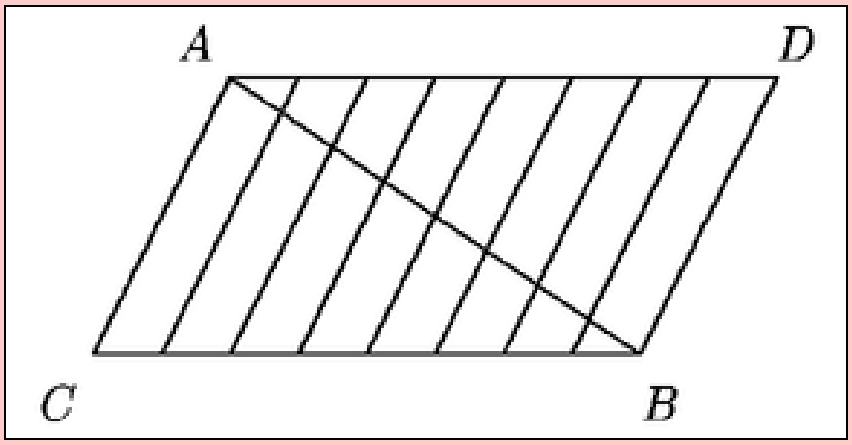
1.- TRIANGLE CURVILINI

En la figura, AB és l'arc d'un cercle centrat en C, BC és l'arc d'un cercle centrat en A, AC és l'arc d'un cercle centrat en B. Si la recta AB mesura 1, quina és l'àrea de la figura?



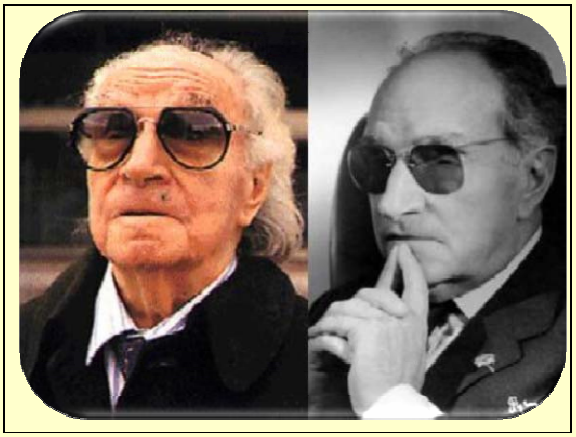
2.- SET SEGMENTS

En un triangle ABC, set segments paral·lels al costat AC i amb extrems en els altres dos costats del triangle divideixen en 8 parts iguals al costat BC. Si AC = 4, quina és la suma de les longituts dels set segments?



3.- JOAQUÍN RODRIGO

El compositor valencià Joaquín Rodrigo va nàixer l'any 1901 a Sagunt. Si agafem les tres últimes xifres d'enguany (2011) i les donem la volta obtenim 110...exactament el nombre d'anys que han transcorregut des de que va nàixer el mestre Rodrigo. Quants anys hauran de passar fins que torne a produir-se de nou aquesta curiosa circumstància?



4.- LA MONEDA FALSA

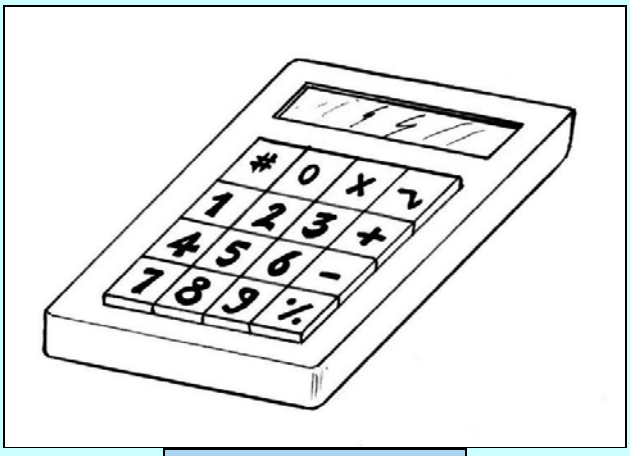
Tenim 24 monedes iguals i una balança, però una de les monedes és falsa i pesa lleugerament menys que la resta de les 23 monedes. Quin és el mínim nombre de pesades que hem de fer per a descobrir la moneda falsa?

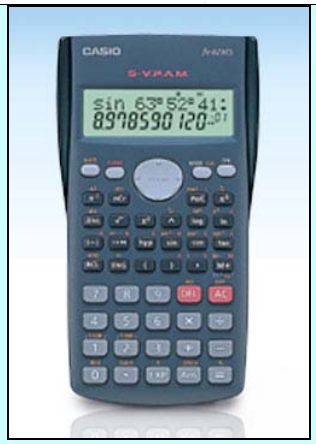
Si en comptes de 24 monedes, ens donen 3072 monedes i només una és falsa. Quin serà llavors el menor nombre d'intents necessaris per a detectar la moneda falsa?



5.- PRODUCTE D'ENTERS

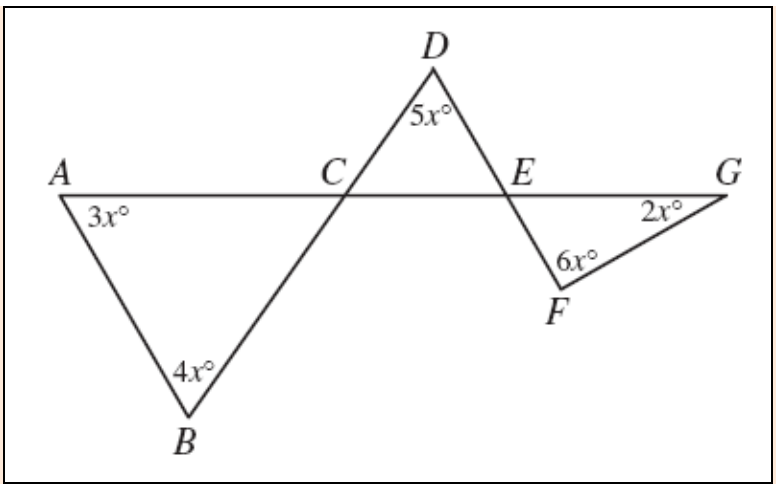
Quin és el major dels productes que es pot obtindre multiplicant nombres enters amb la condició que aquestos nombres sumen 20?





6.- QÜESTIÓ D'ANGLES

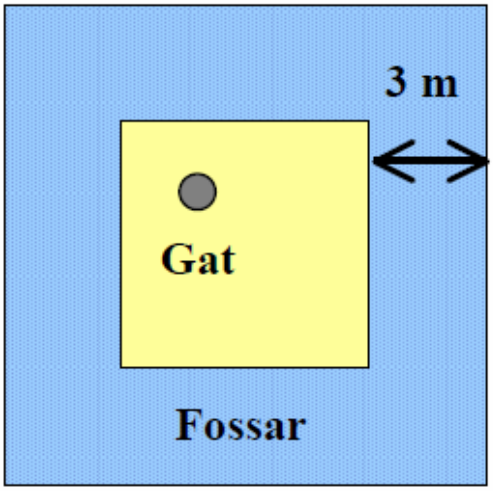
En la figura que es mostra, quin és el valor de X?



7- RESCATEM EL GAT

El malvat bruixot Caliquenyo ha segrestat el nostre gat i l'ha col·locat (ben lligat de potes perquè no puga saltar) a una plataforma envoltada per un fossar de 20 m de profunditat i ple de caimans famolencs. Només hem trobat un parell de taulons de fusta de 2,99 m de llargada i 10 cm d'amplada. El problema és que el fossar té 3 m d'amplada.
No disposem de claus, ni martells... A més estem un poc lesionats per la persecució que li vam fer al bruixot i no podem emular el salt amb perxa ni cap cosa semblant.

Com ens ho farem per entrar i eixir de la plataforma?





8.- ENTRENANT-SE AL LLAC

Pau Bombolles és l'entrenador de natació del Jep Plom. Cada dia agafen la barca i remen fins un punt qualsevol del llac circular del seu poble. Allà el Pau li diu al Jep que es llence a l'aigua i nade fins a la riba, en línia recta, pel camí més llarg. Com que el Jep, al llençar-se a l'aigua, sempre provoca un bon sacseig a la barca, el Pau té por que un dia aquesta es bolque i trobar-se amb una "remullada forçosa". Per això el Pau sempre busca quin és el camí més curt cap a la riba per si ha de tornar nadant.

Com troba el camí més llarg el Jep? I com troba el més curt el Pau?



9.- MEITATS PERSISTENTS

Busca un nombre més menut que 100 que acompleisca les següents condicions.
- si li sume 1 i faig la meitat acaba en la mateixa xifra que abans (per exemple, si acabava en 5 continua acabant en 5)
- si li torne a sumar 1 i torne a fer la meitat encara continua acabant en la mateixa xifra.
- si faig el mateix per tercera vegada (sumar 1 i dividir per 2) continua acabant en la mateixa xifra que al començament.

De quin número es tracta?

$$\frac{?+1}{2}$$

10.- LES LLUMS

En un saló hi ha 20 interruptors que encenen o apaguen 20 llums. Hi ha 20 empleats codificats amb els nombres de l'1 al 20. Un dia i sense saber l'estat dels llums cada empleat a l'eixida pressiona els interruptors que són múltiples del seu codi, és a dir l'1 pressiona tots, el 2 pressiona 2, 4, 6,…, 20 i així cada un dels empleats. Si inicialment estaven apagats tots els llums, quina quantitat de llums queden enceses al final?



11.- TAULER

En un tauler de 8x8 les línies i les columnes estan enumerades d'1 a 8. Si en cada casella Alex col·loca fitxes segons la regla següent: suma el número de línia i columna corresponent a la casella i col·loca en la casella tantes fitxes com el resultat de la suma. Quantes fitxes col·loca Alex en total?

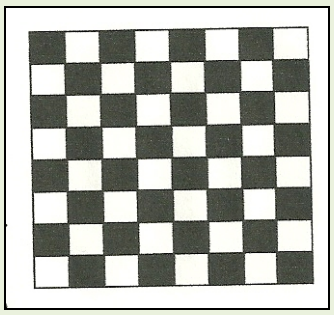


12.- ESCACS?

En un quadrat de 8 cm de costat s'han dibuixat 64 quadrats de longitud 1 cm; alguns dels quals estan pintats de color negre, com ho mostra la figura.
Es vol descompondre la figura en rectangles que satisfan les condicions següents:

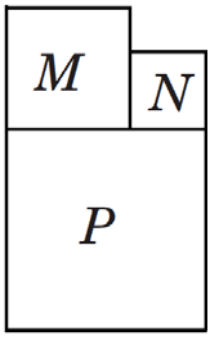
Les àrees dels rectangles són distintes entre si.
Cada rectangle comprén un nombre enter de caselles.
Cada rectangle cobrix el mateix nombre de caselles blanques que de caselles negres.

Quin és el màxim nombre de rectangles que pot tindre la descomposició del quadrat que satisfaça les condicions indicades?



13.- PERÍMETRES

En la figura adjunta és tenen els quadrats M, N i P. Amb x, y, i, z és denoten respectivament els seus perímetres.



Quin és el valor del quocient (x + y) / z ?

ELS MONOGRÀFICS DE PROBLEMES OLÍMPICS

PROBLEMES DE GEOMETRIA

per RICARD PEIRÒ I ESTRUCH

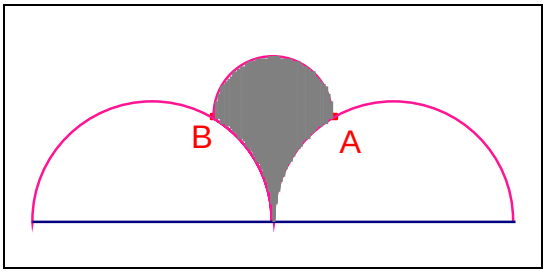
Continuem amb la secció dedicada als problemes de Geometria aportats pel nostre company Rcard Peirò i Estruch.

Des de la redacciò de Problemes Olimpics, recolzem l'ensenyament i aprenentatge de la Geometria, sense la qual no podem considerar seriosament les matemàtiques. La Geometria afavorix el pensament inductiu i deductiu, l'exploració, la formulació i contrast de conjectures, la resolució de problemes i la realització de investigacions. Pensem que caldria adequar les programacions dels centres per a conseguir què totes les parts de les matemàtiques tingueren el seu lloc en el currículum. No és presentable què acabe un curs sense haver treballat cap situació de Geometria.

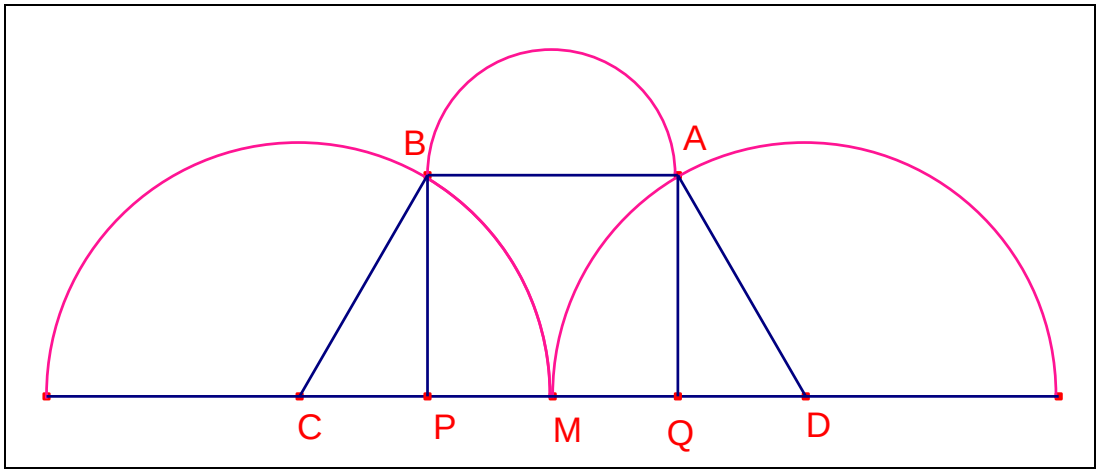
Des d'ací us fem la proposta de què vostres alumnes s'inicien més prompte en l'estudi de la Geometria i en la resolució dels seus problemes.

- **PROBLEMA 1**

Tenim tres semicercles situats tal com mostra la figura.
El diàmetre $\overline{AB}$ del semicercle superior és paral·lel als diàmetres dels dos semicercles inferiors.
Si el radi d'aquests semicercles inferiors és 2cm i $\overline{AB} = 2cm$, quina és en cm^2 l'àrea de la regió ombrejada?.



Solució:



Siguen C i D els centres dels semicercles inferiors.

$\overline{CD} = 4$, $\overline{BC} = \overline{AD} = 2$.

ABCD és un trapezi isòsceles.

Siga P la projecció de B sobre $\overline{CD}$, Q la projecció de A sobre $\overline{CD}$.

Aleshores, $\overline{CP} = \overline{DQ} = 1$.

Aleshores, $\angle BCP = \angle ADQ = 60^\circ$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$:
$\overline{BP} = \overline{AQ} = \sqrt{3}$.

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{4+2}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,.$$

L'àrea del sector de centre C i arc BM és la sisena part de l'àrea del cercle de radi 2:

$$S_{\text{sec}tor} = \frac{1}{6}\pi 2^2 = \frac{2}{3}\pi\,.$$

L'àrea ombrejada està formada per un semicercle de radi 1 més l'àrea del trapezi ABCD menys 2 sectors de centre C i arc BM.

$$S_{omb} = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 + 3\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = 3\sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi\,.$$

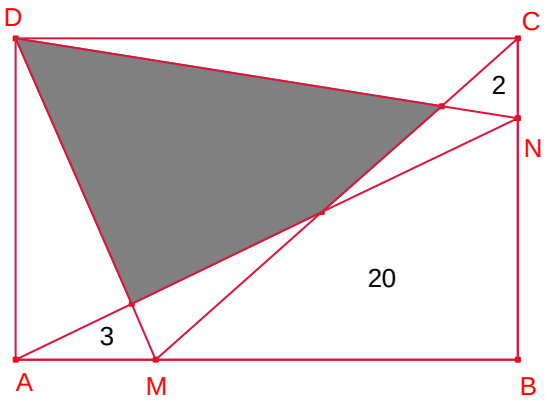
- **PROBLEMA 2**

En el rectangle ABCD de la figura hem dibuixat dos punts M, N en els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, respectivament.

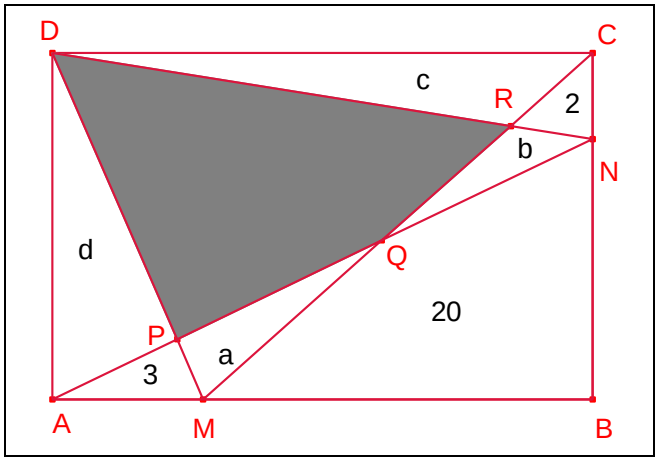
Hem dibuixat els segments que podeu veure a la figura de manera que el rectangle ha quedat dividit en 8 parts.

Hem mesurat les àrees de tres d'aquestes parts, que tenen els valors que podeu veure a la figura, 2, 3, i 20.

Quina és l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



Siga S l'àrea del rectangle ABCD.
Els 4 segments dibuixats determinen els punts P, Q, R.
Siga $a = S_{PMQ}$, $b = S_{QNR}$, $c = S_{CDR}$, $d = S_{APD}$.
Volem calcular l'àrea del quadrilàter DPQR.
Siga $x = S_{DPQR}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AND}$ és la meitat de l'àrea del rectangle ABCD:

$b + d + x = \frac{S}{2}$.

La suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AMD}$, $\overset{\Delta}{MBC}$ és la meitat del rectangle ABCD:

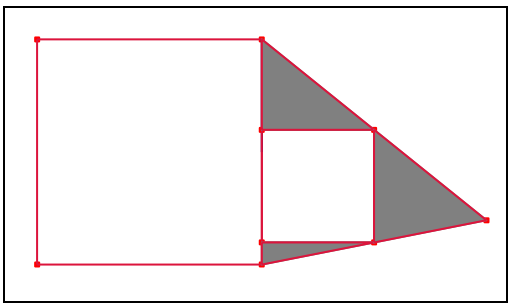
$b + d + 25 = \frac{S}{2}$.

Aleshores, $x = 25$.



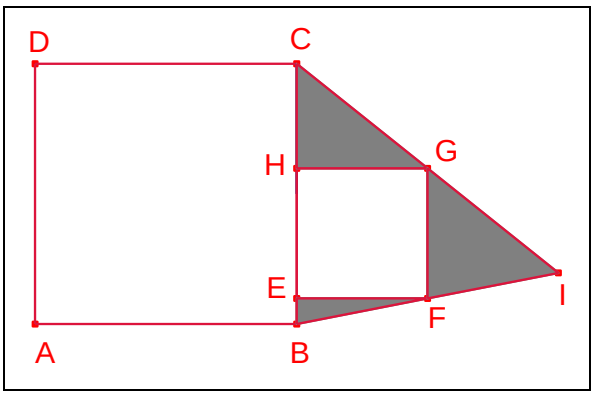
- **PROBLEMA 3**

El dibuix mostra dos quadrats. La longitud del costat d'un és 2 metres, i l'altre, 1 metre. Quina és la mesura de l'àrea ombrejada?



Solució:

Siguen ABCD, EFGH quadrats de costats $\overline{AB} = 2$, $\overline{EF} = 1$.
Siga I la intersecció de les rectes BF, CG.



Els triangles $\overset{\Delta}{BIC}$, $\overset{\Delta}{FIG}$ són semblants i la raó de semblança $\frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}=\frac{2}{1}$.

Siga h l'altura del triangle $\overset{\Delta}{FIG}$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{BIC}$ és $h+\overline{EF}=1+h$.

Aplicant el teorema de tales als triangles $\overset{\Delta}{BIC}$, $\overset{\Delta}{FIG}$:

$\frac{1+h}{h}=2$. Resolent l'equació: $h=1$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{BIC}$ és 2.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BIC}$ menys l'àrea del quadrat EFGH.

$S_{ombra}=S_{BIC}-S_{EFGH}=\frac{1}{2}(2\cdot 2)-1^2=1m^2$.



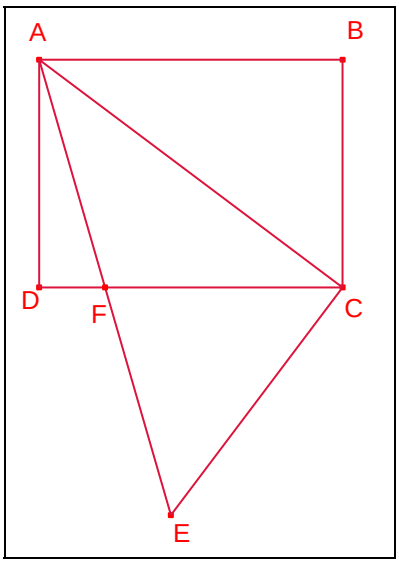
- **PROBLEMA 4**

En la figura, ABCD és un rectangle amb $\overline{AB}=16cm$ i $\overline{BC}=12cm$.

$\overset{\Delta}{ACE}$ és un triangle rectangle amb $\overline{AC}\perp\overline{CE}$ i $\overline{CE}=15cm$.

Si F és el punt d'intersecció dels segments $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACF}$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = 20$.

$\overline{CE} = 15$.

$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACE}$ són semblants.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$. $\overline{AE} = \frac{15}{12} \cdot 20 = 25$.

$\angle EAC = \angle CAB = \angle DCA$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACF}$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{CF}$.

$\angle FCE = 90º - \angle EAC = \angle AEC$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CFE}$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{FE}$.

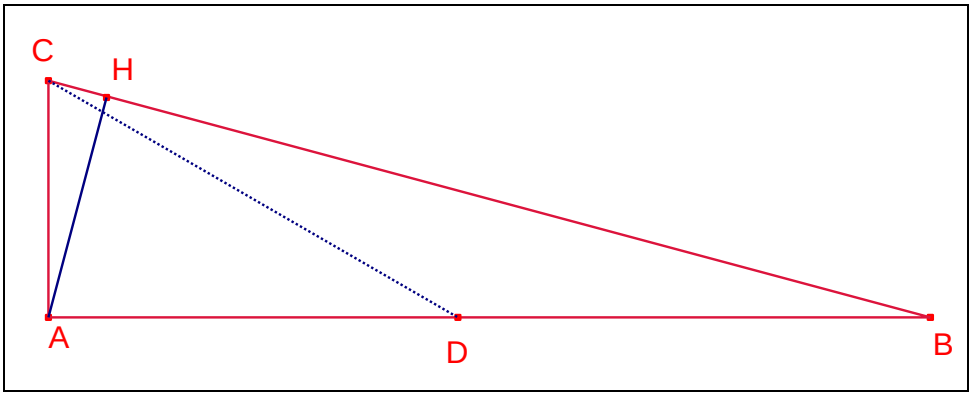
Aleshores, F és el punt mig de $\overline{AE}$.

$\overline{FC} = \overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{25}{2}$.

$S_{ACF} = \frac{\overline{FC} \cdot \overline{BC}}{2} = 75cm^2$.

- **PROBLEMA 5**

Els angles d'un triangle estan en proporció 1:5:6.
La longitud del costat més gran és 6cm.
Calculeu l'altura corresponent a aquest costat.



Solució:

Siguen $\alpha, 5\alpha, 6\alpha$ els angles d'un triangle que estan en proporció 1:5:6.
La suma dels angles d'un triangle és 180º, aleshores: $\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 180^o$.
Resolent l'equació: $\alpha = 15^o$.
Aleshores els angles del triangle són 15º, 75º, 90º.

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $A = 90^o$, $B = 15^o$, C=75º
Siga $h = \overline{AH}$ l'altura sobre la hipotenusa.
Siga D un punt del catet $\overline{AB}$ tal que $\angle DCB = 15^o$.
Aleshores, $\angle ACB = 60^o$, $\angle ADC = 30^o$.
Siga $a = \overline{AC}$, aleshores, $\overline{CD} = 2a$, $\overline{AD} = a\sqrt{3}$.

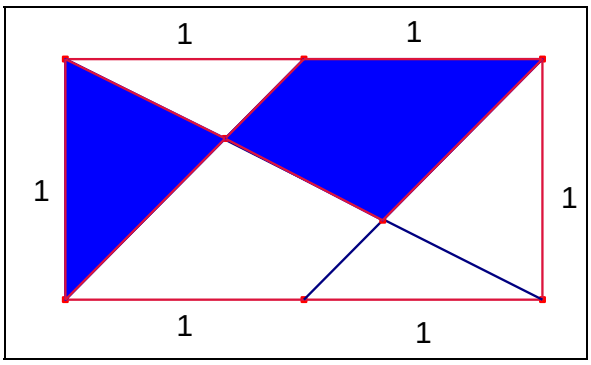
Notem que el triangle $\overset{\Delta}{CDB}$ és isòsceles.
$\overline{BD} = \overline{CD} = 2a$.
Aleshores, $\overline{AB} = \left(2 + \sqrt{3}\right)a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$a^2 + \left(\left(2 + \sqrt{3}\right)a\right)^2 = 6$.
$a^2 = 9\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

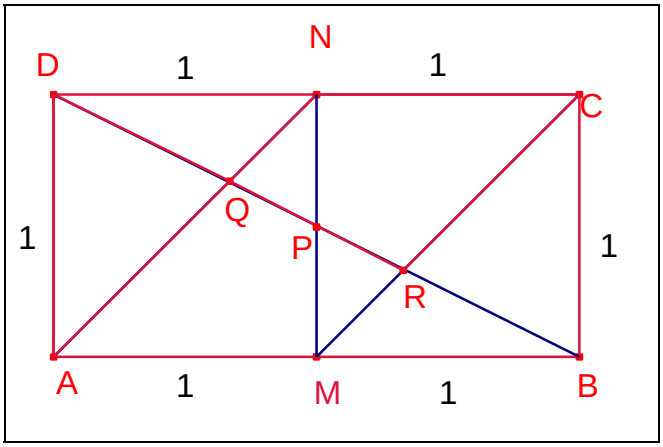
Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\frac{\overline{BC} \cdot h}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2}$.
$\frac{6h}{2} = \frac{\left(2 + \sqrt{3}\right)a^2}{2}$. Resolent l'equació: $h = \frac{3}{2}$.

- **PROBLEMA 6**

Quina és la proporció entre l'àrea acolorida i l'àrea total del rectangle.



Solució:



Siga ABCD el rectangle la seua àrea és 2.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.
El segemnt $\overline{MN}$ talla la diagonal $\overline{BD}$ en el punt mig P dels dos segments.
Siga Q la intersecció del segment $\overline{AN}$ i la diagonal $\overline{BD}$.
Siga R la intersecció del segment $\overline{MC}$ i la diagonal $\overline{BD}$.
Notem que els quadrilàters AMPQ, CNPR són iguals.

L'àrea acolorida és igual a l'àrea del quadrat AMND menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DQN}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DQN}$, $\overset{\Delta}{BQA}$ són semblants i la raó de semblança és 1:2

Aleshores, l'altura del triangle $\overset{\Delta}{DQN}$ referida al vèrtex Q és la meitat de l'altura del triangle $\overset{\Delta}{BQA}$ referida al vèrtex Q.

Aleshores, l'altura del triangle $\overset{\Delta}{DQN}$ és la tercera part del costat $\overline{AD}=1$.

La superfície del triangle $\overset{\Delta}{DQN}$ és:

$S_{DQN}=\frac{1}{6}$.

Aleshores, la superfície de la zona acolorida és:

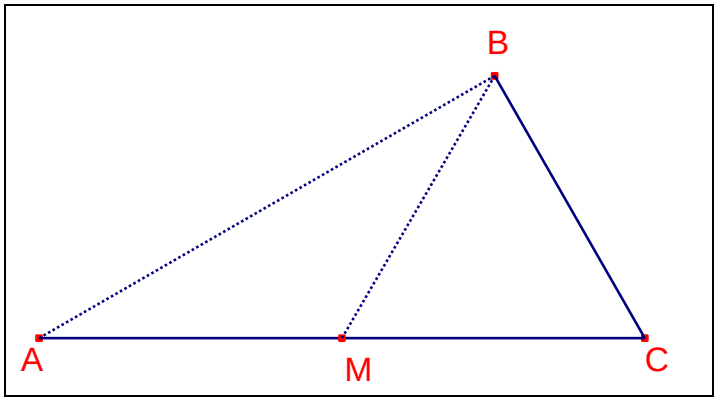
$S_{Acolorida}=S_{AMND}-S_{DQN}=\frac{5}{6}$.

La proporció entre l'àrea de la zona acolorida i l'àrea del rectangle ABCD és:

$p=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$.

- **PROBLEMA 7**

Resoleu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coneguts $a=1$, $b=2$, $C=60^o$.



Solució 1:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}=2$.
$\overline{CM}=\overline{CB}=1$, $C=60^o$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MCB}$ és equilàter.
Per tant, $\overline{BM}=1$.

En un triangle si la mitjana referida a un vèrtex mesura la meitat del costat oposat al vèrtex aleshores el triangle és rectangle en aquest vèrtex.
$\overline{CM}=\overline{CB}=\overline{BM}=1$, aleshores, $B=90^o$.

Aleshores, $A=30^o$, $\overline{AB}=\sqrt{3}$.

Solució 2:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}=2$.
$\overline{CM}=\overline{CB}=1$, $C=60^o$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MCB}$ és equilàter.
Per tant, $\overline{BM}=1$, $\angle AMB=120^o$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AMB}$ és isòsceles, $\overline{AM}=\overline{BM}=1$.
Aleshores, $\angle MAB=\angle MBA=\frac{180^o-120^o}{2}=30^o$.

Aleshores, $B=90^o$, $A=30^o$, $\overline{AB}=\sqrt{3}$.

Solució 3:

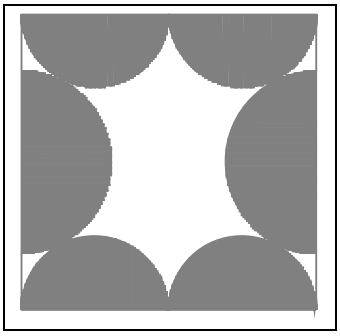
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $c^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^o$.
$c = \sqrt{3}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^o} = \dfrac{2}{\sin B}$.

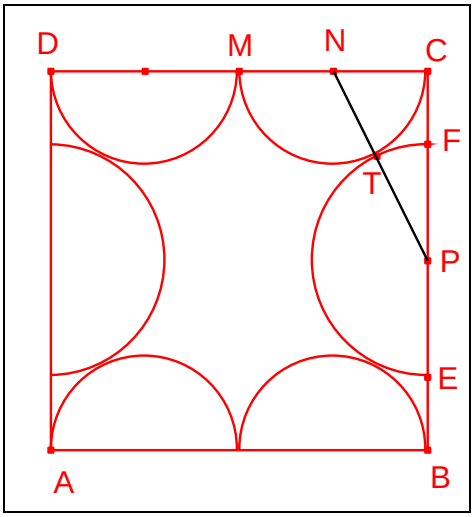
Aleshores, $\sin B = 1$, aleshores, $B = 90^o$, $A = 30^o$.

- **PROBLEMA 8**

Calculeu l'àrea total dels 6 semicercles ombrejats del quadrat de costat 4.



Solució:



Siga el quadrat ABCD de costat 4
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga N el centre del semicercle de diàmetre $\overline{CM}$.
Siga P el centre del semicercle de diàmetre $\overline{EF}$.
P és el punt mig del costat $\overline{BC}$.

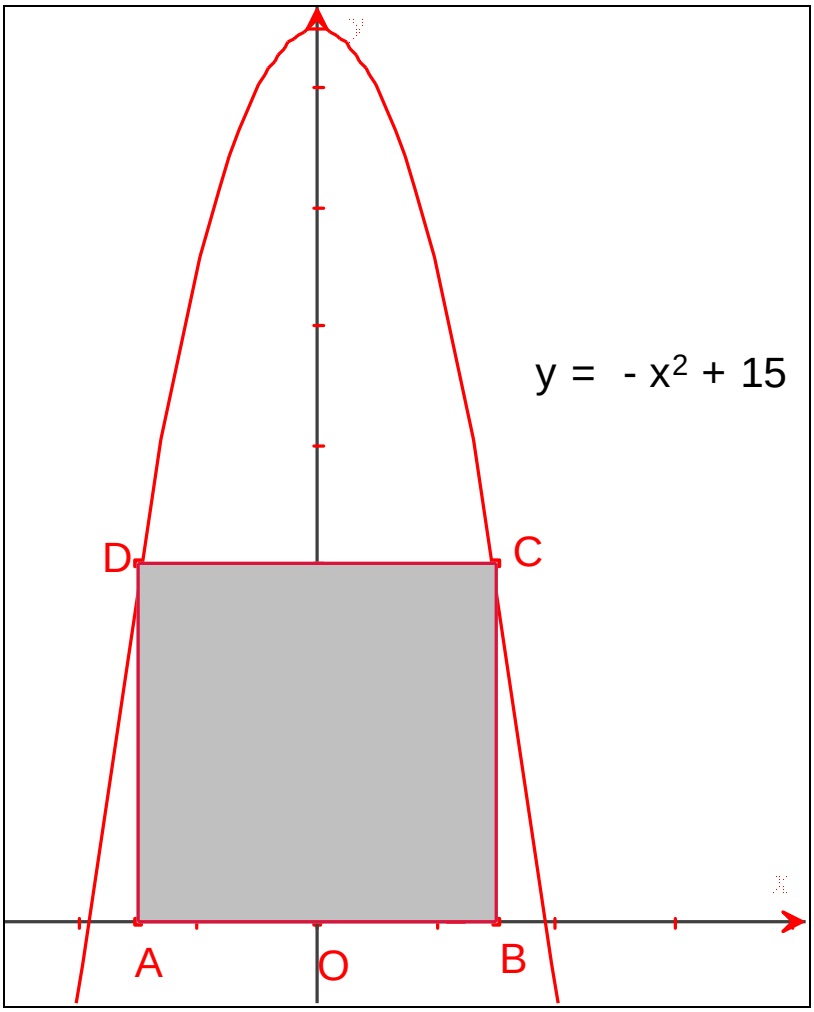
El segment $\overline{PN}$ passa pel punt T de tangència dels dos semicercles.
$\overline{CN} = \overline{NT} = 1$, $\overline{CP} = 2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCN}$: $\overline{PN} = \sqrt{5}$.
El radi del semicercle de centre P és: $\overline{PT} = \overline{PN} - \overline{NT} = \sqrt{5} - 1$.

L'àrea dels 6 semicercles és: $S = 4\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{2}\right) + 2\left(\frac{\pi\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2}\right) = \left(8 - 2\sqrt{5}\right)\pi$.

- **PROBLEMA 9**

Dos vèrtexs consecutius d'un quadrat estan situats a l'eix d'abscisses i els altres dos en punts de la gràfica de la funció $y = 15 - x^2$, un d'ells al primer quadrant. Quina és l'àrea d'aquest quadrat?

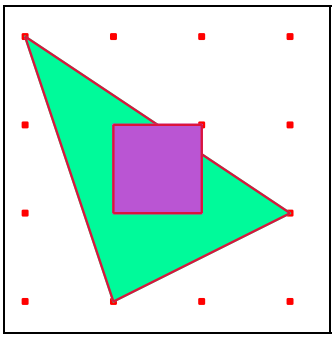


Solució

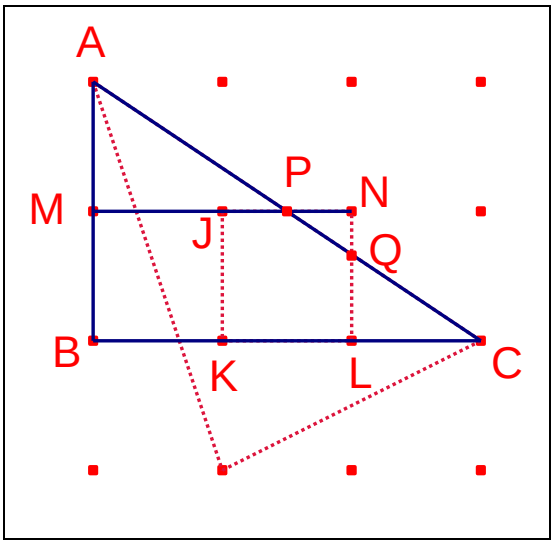
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = \overline{BC} = 2a$.
$\overline{OB} = a$.
Com que el punt C pertany a la paràbola $y(a) = 15 - a^2$.
Aleshores, $\overline{BC} = 15 - a^2$.
$15 - a^2 = 2a$.
Resolent l'equació $a = 3$.
L'àrea del quadrat ABCD és:
$S_{ABCD} = (2a)^2 = 6^2 = 36$.

- **PROBLEMA 10**

La distància en horitzontal o en vertical entre dos punts de la graella adjunta és 1. Quina és l'àrea de la part comuna al triangle i al quadrat?



Solució:



Siguen A i Q les interseccions del quadrat JKLN i el segment $\overline{AC}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AMP}$ són semblants i la raó de semblança 2:1.

Aleshores $\overline{MP} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{3}{2}$.

$\overline{JP} = \overline{MP} - \overline{MJ} = \frac{1}{2}$. $\overline{PN} = \frac{1}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMP}$, $\overset{\Delta}{QNP}$ són semblants i la raó de semblança 3:1 ja que $\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$.

Aleshores, $\overline{NQ} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{1}{3}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QNP}$ és:

$S_{QNP} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}$.

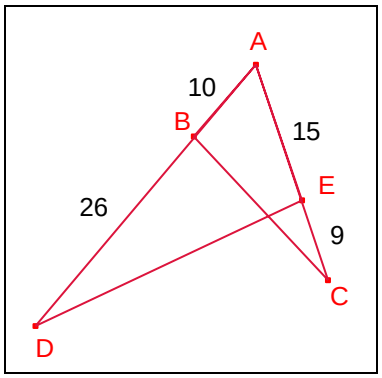
L'àrea de la part comuna al triangle i al quadrat del problema és igual a l'àrea del quadrat menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QNP}$.

$S = 1^2 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

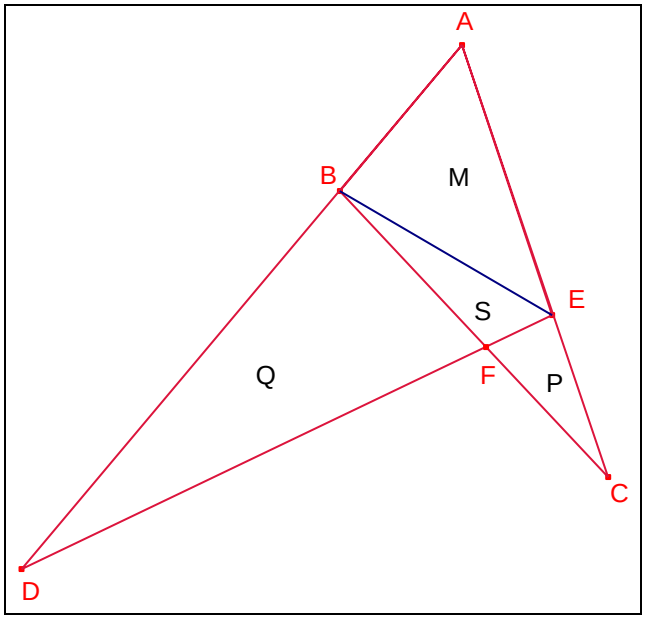


- **PROBLEMA 11**

Determineu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució 1:



Siga F la intersecció dels segments $\overline{BC}$, $\overline{DE}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga M l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$. Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BFE}$.
Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CFE}$. Siga Q l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DFB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CEB}$, $\overset{\Delta}{EAB}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$\frac{P+S}{M}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. Aleshores, $P+S=\frac{3}{5}M$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEB}$, $\overset{\Delta}{EAB}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$\frac{Q+S}{M}=\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}=\frac{26}{10}=\frac{13}{5}$. Aleshores, $Q+S=\frac{3}{5}M$.

Determinem la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{Q+S+M}{P+S+M}=\frac{\frac{15}{3}M+M}{\frac{3}{5}M+M}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$$

Solució 2:

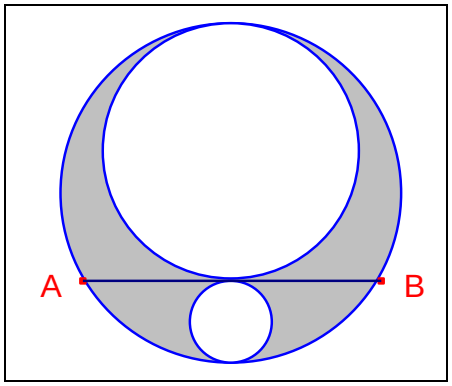
Siga $\alpha = \angle CAD$.

Utilitzem la fórmula trigonomètrica de l'àrea d'un triangle:

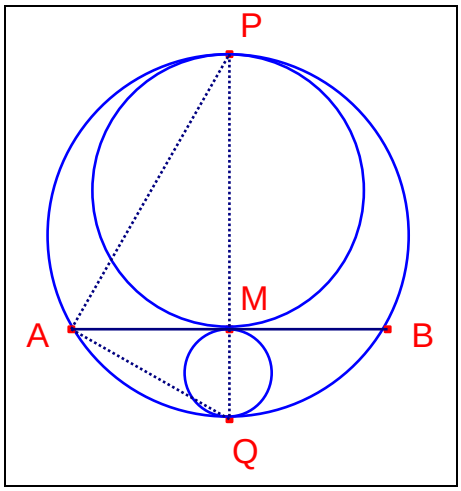
$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AE}}{2}\sin\alpha}{\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\sin\alpha} = \frac{36\cdot 15}{10\cdot 24} = \frac{9}{4}.$$

- **PROBLEMA 12**

L'àrea ombrejada de la figura és igual a 2π.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$



Solució:



Siga R el radi de la circumferència exterior.
Siga r el radi de la circumferència gran tangent interior.
Siga s el radi de la circumferència menuda tangent interior. $R = r + s$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del cercle de radi R menys la suma de les àrees dels cercles de radis r i s.

$\pi R^2 - \left(\pi r^2 + \pi s^2\right) = 2\pi$.

Simplificant:

$R^2 - r^2 - s^2 = 2$.

$(r+s)^2 - r^2 - s^2 = 2$. Simplificant:

$rs = 1$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$ que és el punt de tangència de les dues circumferències interiors.

El triangle $\overset{\Delta}{PAQ}$ és rectangle ja que l'angle A abraça mitja circumferència de radi R.

$\overline{\text{AM}}$ és perpendicular a $\overline{PQ}$.

Aplicant el teorema de l'altura d'un tr iangle rectangle $\overset{\Delta}{PAQ}$:

$\overline{AM}^2 = \overline{PM} \cdot \overline{QM}$.

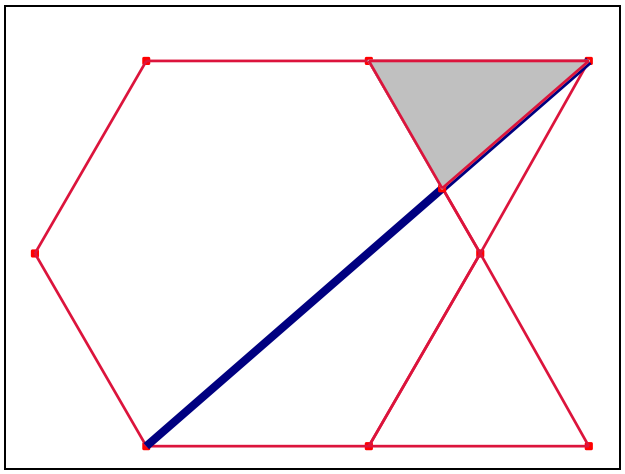
$\overline{AM}^2 = rs = 1$.

Aleshores, $\overline{AM} = 1$.

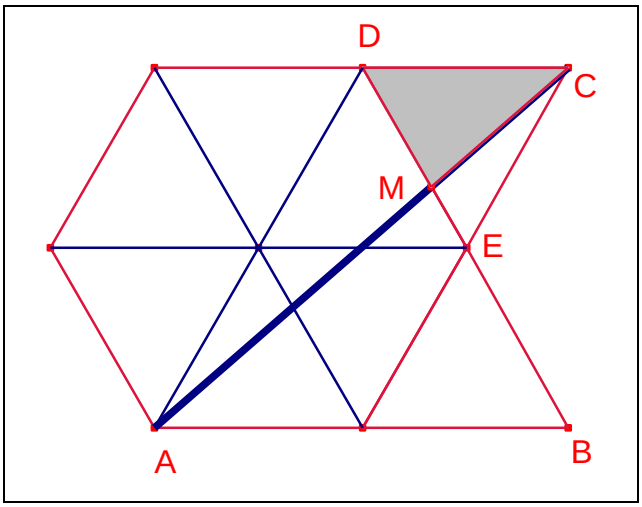
$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2$.

- **PROBLEMA 13**

Amb 10 segments de la mateixa longitud hem dibuixat la figura adjunta, que té una àrea total de 24cm^2 (sumant la de l'hexàgon regular i la dels dos triangles equilàters). Després, hem traçat el segment gruixut que uneix dos vèrtexs de la figura. Quina és l'àrea del triangle ombrejat?



Solució:



La figura traçant les diagonals de l'hexàgon regular ha quedat dividida en 8 triangles equilàters iguals (6 formen l'hexàgon).

Cadascun d'aquests triangles té àrea $\frac{24}{8} cm^2$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{CDM}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1.
Siga $x = \overline{DM}$.

Aleshoes, $\overline{BM} = 2x$, $a = \overline{DE}$.
$\overline{BM} = \overline{BD} - \overline{DM} = 2a - x$.

Aleshores, $2x = 2a - x$. Resolent l'equació en x:
$x = \frac{2}{3}a$.

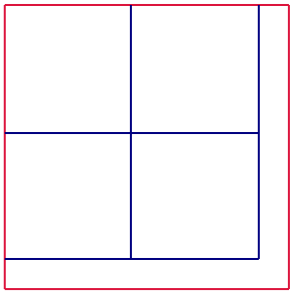
Els triangles $\overset{\Delta}{DEC}$, $\overset{\Delta}{DMC}$ tenen la mateixa altura, les àrees són proporcionals a les bases:

$\frac{S_{DMC}}{S_{DEC}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DE}}$.
$\frac{S_{DMC}}{3} = \frac{x}{a} = \frac{2}{3}$.

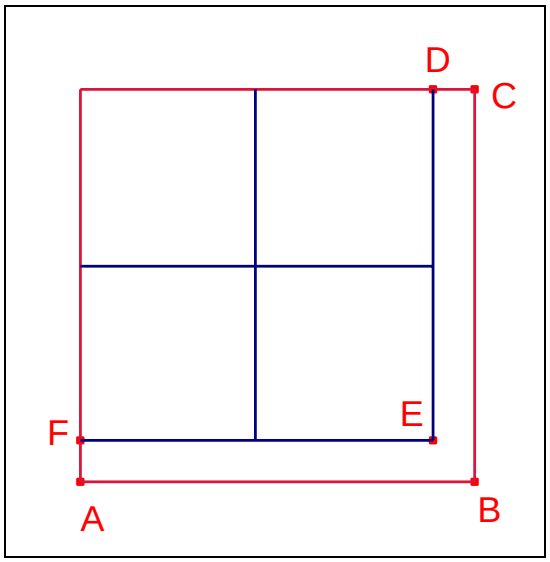
Aleshores, $S_{DMC} = 2$.

- **PROBLEMA 14**

Un quadrat d'àrea $125cm^2$ està descompost en cinc parts de la mateixa àrea: quatre quadrats i una figura en forma de L, com es pot veure a la figura. Calculeu el perímetre de la figura en forma de L



Solució:



Cadascuna de les 5 figures descompostes del quadrat gran té àrea $25cm^2$. Aleshores, el costat dels 4 quadrat menuts és 5 cm.

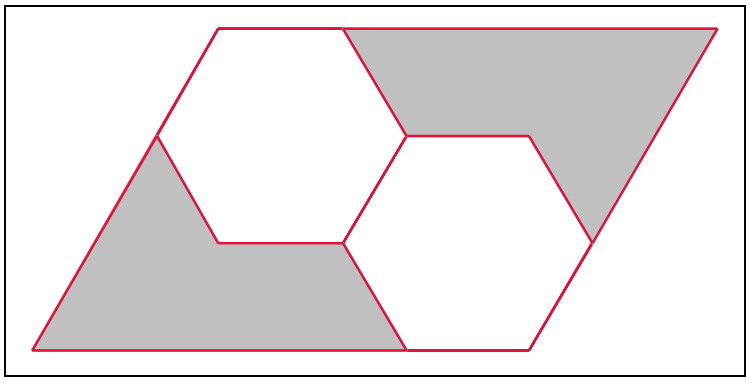
Siga $x = \overline{AF} = \overline{CD}$. Aleshores: $\overline{FE} = \overline{DE} = 10$.

L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és: $S_{ABCDEF} = x^2 + 20x \rightarrow x^2 + 20x = 25$.
Resolent l'equació: $x = 5\left(\sqrt{5} - 2\right)$.

El perímetre de l'hexàgon ABCDEF és:
$P_{ABCDEF} = 2\left(\overline{AB} + \overline{FE}\right) = 2(10 + x + 10) = 20\sqrt{5}$.

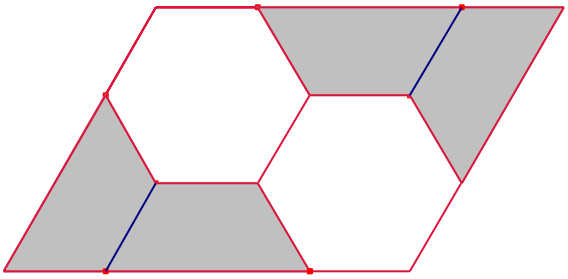
- **PROBLEMA 15**

En la figura, els dos hexàgons regulars són iguals. Quina és la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i la del paral·lelogram exterior.



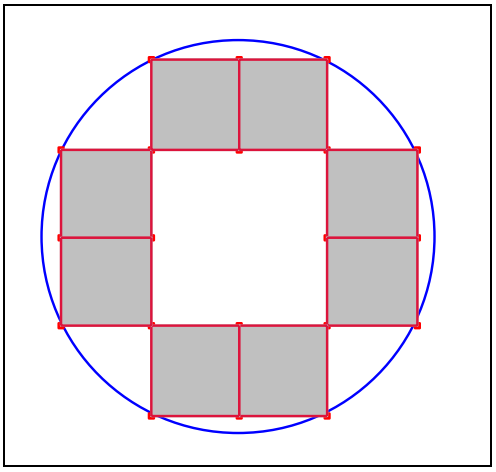
Solució:

La proporció entre l'àrea ombrejada i la del paral.lelogram és 1/2

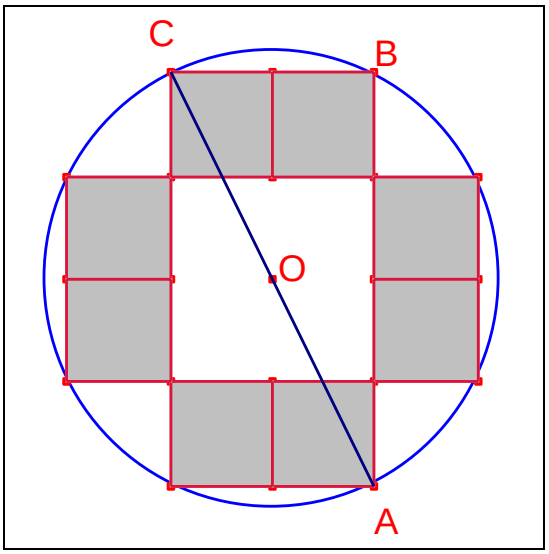


- **PROBLEMA 16**

En el dibuix del costat hi ha 9 quadrats dins d'un cercle d'àrea π.
Quina és l'àrea de la regió ombrejada?



Solució:



Calculem el radi del cercle d'àrea π.

$\pi r^2 = \pi$. Resolent l'equació: $r = 1$.

Siga O el centre del cercle. Siga c la mesura dels costats menuts.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $B = 90^o$.

$\overline{AB} = 4c$, $\overline{BC} = 2c$.

$\overline{AC} = 2$, per ser un diàmetre del cercle.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

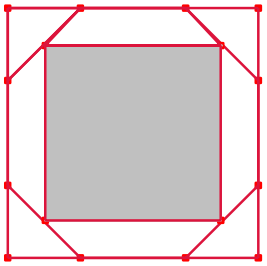
$(2c)^2 + (4c)^2 = 2^2$. Simplificant, $c^2 = \frac{1}{5}$.

L'àrea ombrejada està formada per 8 quadrats de costat c.

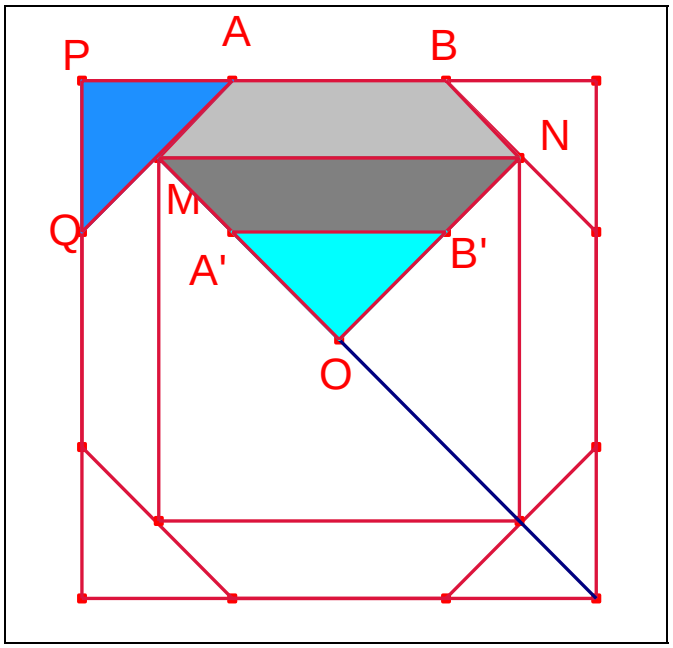
$S_{ombrejada} = 8c^2 = \frac{8}{5}$.

- **PROBLEMA 17**

Un octògon regular està inscrit en un quadrat.
En els punts mig de l'octògon s'ha dibuixat un altre quadrat.
Calculeu la raó entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:

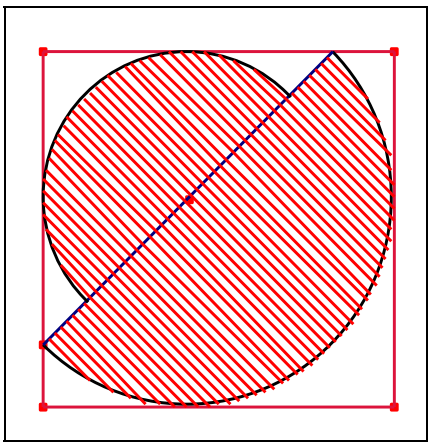


Siga A' el simètric de A respecte de la recta MN. Siga B' el simètric de B respecte de MN. Els quadrilàters ABMN, A'B'NM són iguals.

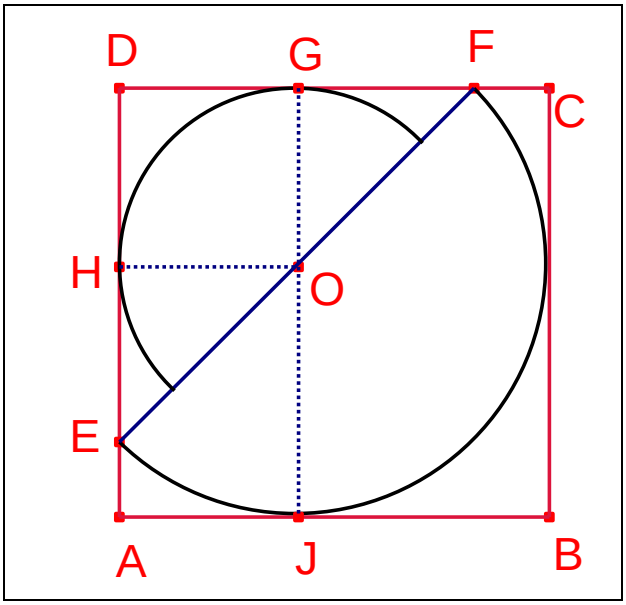
$\overline{A'B'} = \overline{AB}$ aleshores, els triangles rectangles isòsceles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{A'B'O}$ són iguals. Aleshores, la proporció entre les àrees del quadrat interior i exterior és 1:2.

- **PROBLEMA 18**

En la figura s'han inscrit dos semicercles en un quadrat de costat 2.
Els centres dels semicercles estan en la diagonal del quadrat.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:



Siga el quadrat ABCD de costat 2.
Si el centre O de les dues circumferències pertany a la diagonal $\overline{BD}$.
El diàmetre $\overline{EF}$ és paral·lel a la diagonal $\overline{AC}$.
Siga $r = \overline{OE}$ radi del semicercle gran.
El semicercle gran és tangent al costat $\overline{AB}$.
Siga J el punt de tangència. Aleshores, $\overline{OJ} = r$
El semicercle menor és tangent als costats $\overline{CD}$, $\overline{AD}$.
Siguen G i H els punts de tangència amb els dos costats, respectivament.
Aleshores, $\overline{OG} = \overline{OH} = 2 - r$ és el seu radi.

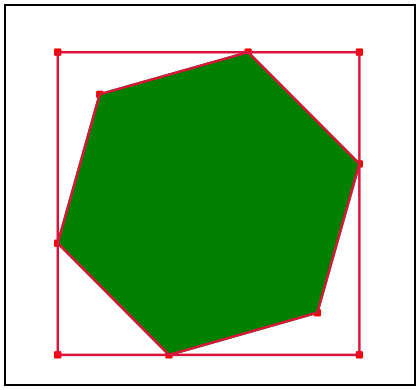
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHE}$ és rectangle i isòsceles, aleshores:
$\overline{HE} = \overline{OH} = 2 - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHE}$:
$r^2 = 2(2-r)^2$.
Resolent l'equació:
$r = 2\left(2 - \sqrt{2}\right)$.
El radi del semicercle menut és:
$2\left(-1 + \sqrt{2}\right)$.
L'àrea de la zona ombrejada és la suma de les àrees dels dos semicercles:

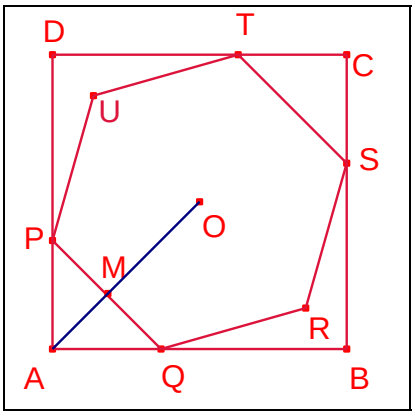
$$S_{ombrejada} = \frac{\pi}{2}\left(2\left(2-\sqrt{2}\right)\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(2\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)^2 = 6\pi\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

- **PROBLEMA 19**

En la figura hi ha dibuixat un hexàgon regular de costat 1 inscrit en un quadrat. Dos vèrtex de l'hexàgon estan sobre una diagonal del quadrat i els altres 4 sobre els costats. Determineu l'àrea del quadrat.



Solució:



Siga PQRSTU l'hexàgon de diagonal $\overline{RU}$ sobre la diagonal $\overline{BD}$ del quadrat ABCD.

$\overline{PQ}$ és paral·lel a la diagonal $\overline{BD}$.

Siga O el centre del quadrat ABCD i de l'hexàgon PQRSTU.

Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}=1$.

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\overline{AM}=\overline{MQ}=\frac{1}{2}$.

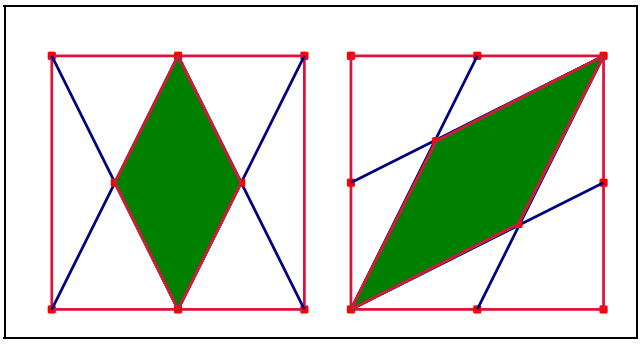
$\overline{OA}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

$\overline{AB}=\sqrt{2}\left(\overline{OA}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

L'àrea del quadrat ABCD és: $S_{ABCD}=\overline{AB}^2=2+\sqrt{3}$.

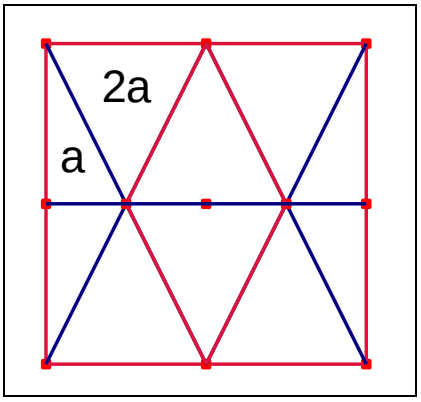
- **PROBLEMA 20**

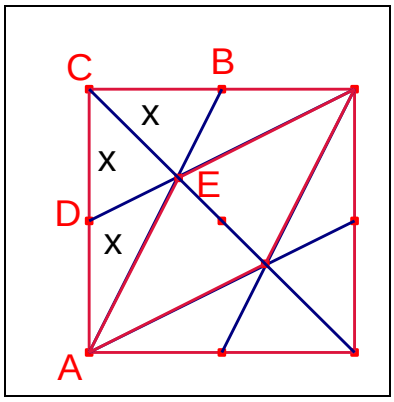
En dos quadrats iguals s'han inscrit dos rombes com mostra la figura. Determineu la proporció entre les àrees del dos rombes.



Solució:

Siga S l'àrea del quadrat.





El rombe de l'esquerra és $\frac{1}{4}S$.

L'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DEC}$ són iguals.

Els triangles $\overset{\Delta}{BEC}$, $\overset{\Delta}{DEC}$, aleshores, tenen la mateixa àrea.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és la quarta part de l'àrea del quadrat.

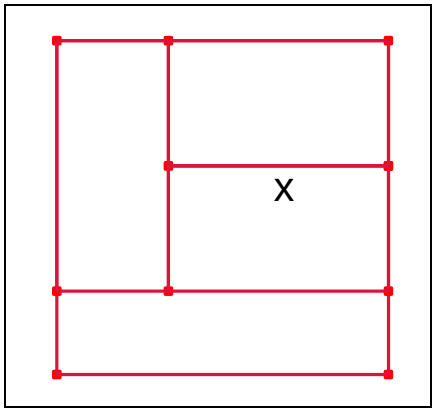
Aleshores, $S_{ADE} = \frac{1}{12}S$.

L'àrea del rombe és: $S - 8 \cdot S_{ADE} = S - \frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S$.

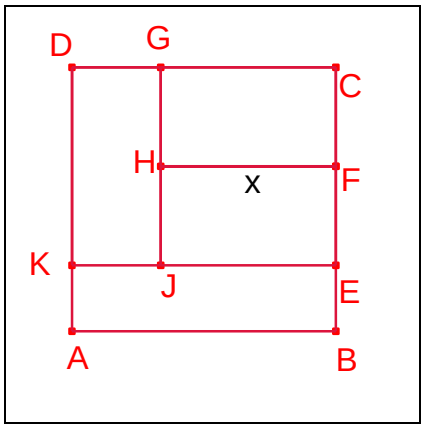
La proporció de les àrees dels dos rombes és: $\frac{\frac{1}{4}S}{\frac{1}{3}S} = \frac{3}{4}$.

- **PROBLEMA 21**

En la figura, el quadrat de costat 1 s'ha dividit en quatre rectangles d'igual àrea. Quant mesura x?.

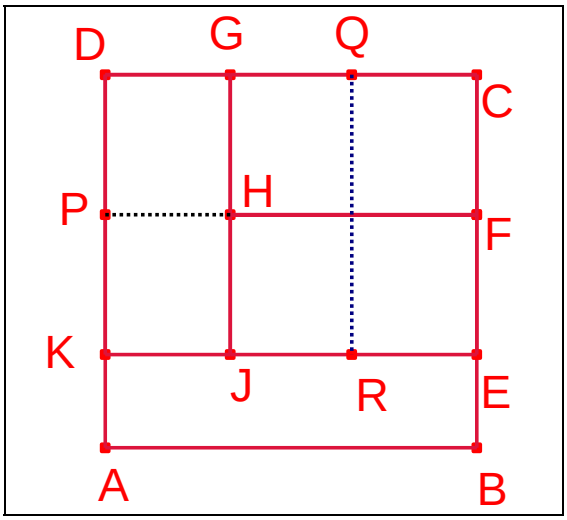


Solució 1:



Si els rectangles JEFH FCGH tenen la mateixa àrea, aleshores, $\overline{CF} = \overline{FE} = a$.
$\overline{DG} = 1 - x$, $\overline{BE} = 1 - 2a$.
Com els rectangles JEFH, KJGD tenen la mateixa àrea: $xa = 2a(1-x)$.
Simplificant: $x = 2(1-x)$. Resolent l'equació: $x = \frac{2}{3}$.
També podem calcular a:
Com els rectangles JEFH, ABEK tenen la mateixa àrea:
$xa = 1(1-2a)$.
$\frac{2}{3}a = 1 - 2a$.
Resolent l'equació: $a = \frac{3}{8}$.

Solució 2:



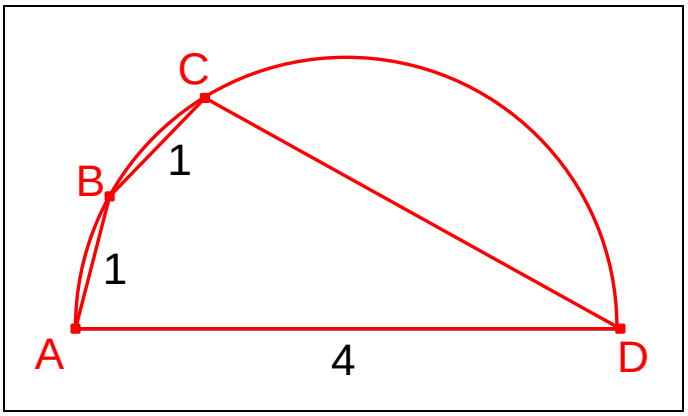
Si els rectangles JEFH FCGH tenen la mateixa àrea, aleshores, $\overline{CF} = \overline{FE}$.
La recta HF talla el costat $\overline{AD}$ en el punt P.

L'àrea del rectangle PHGD és la meitat de l'àrea del rectangle KJGD.
Aleshores, l'àrea del rectangle PHGD és la meitat de l'àrea del rectangle HFCG.

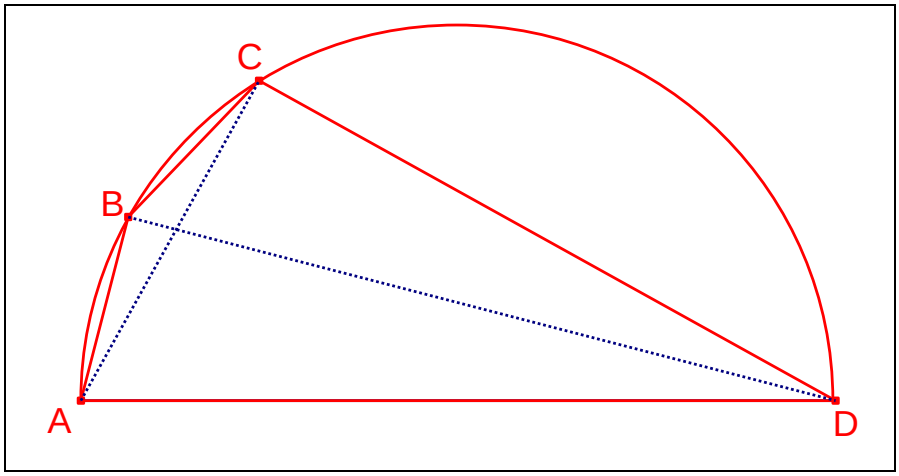
Aleshores, $x = \overline{HF} = 2\overline{PH}$. Aleshores, $x = \frac{2}{3}\overline{AB} = \frac{2}{3}$.

- **PROBLEMA 22**

El diàmetre $\overline{AD}$ de la semicircumferència mesura 4.
Siguen els punts B i C de la semicircumferència tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{CD}$.



Solució:



Siga $x = \overline{CD}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és rectangle ja que C és inscrit en una circumferència i abraça un diàmetre.

Aplicant el teorema de Pitàgores: $\overline{AC} = \sqrt{16 - x^2}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ADB}$ és rectangle ja que B és inscrit en una circumferència i abraça un diàmetre.

$\overline{BD} = \sqrt{15}$.

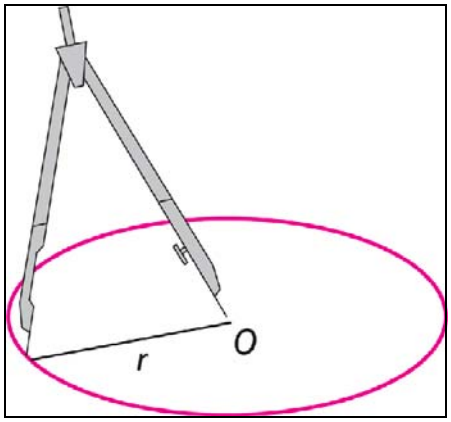
El quadrilàter ABCD és inscriptible en una circumferència.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.

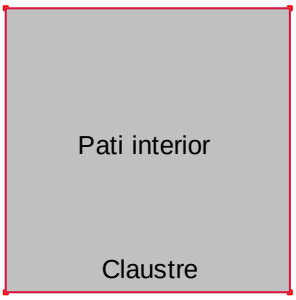
$x + 4 = \sqrt{167 - x^2}\sqrt{15}$.

Resolent l'equació: $x = \frac{7}{2}$.

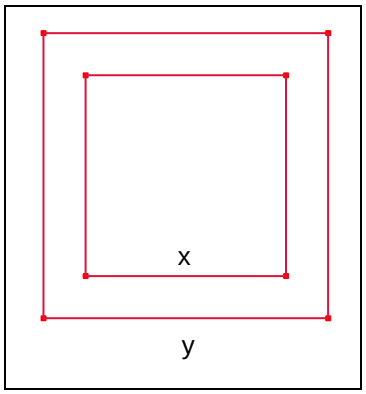


- **PROBLEMA 23**

En la majoria dels monestirs, existeix un patí interior quadrat descobert.
En aquest pati els monjos es reunien quan feia bon temps.
A l'hivern quan plovia els monjos ocupaven el claustre cobert, fent una volta entorn del pati interior.
Quant ha de mesurar la part coberta a fi que capien el mateix nombre de persones que en el pati interior si el costat del pati interior mesura 20m.
Generalitzeu el problema per a un valor qualsevol del costat del pati interior



Solució:



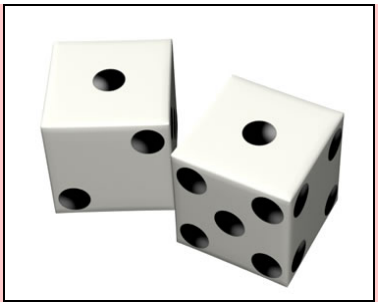
Siga x el costat del pati interior. Siga y el costat del claustre.
L'àrea del claustre és igual a la diferència entre el quadrat de costat y i el de costat x. → $y^2 - x^2 = x^2$ → $y = x\sqrt{2}$. És a dir, el costat del claustre mesura igual que la diagonal del pati.



PROBLEMES NIVELL B (SEGON CICLE ESO)

1.- DAU I MONEDA

Josep i Maria apostaren segons les següents regles: van a llançar un dau i una moneda amb el número 1 marcat en una cara i el número 2 en l'altra. Després multiplicaran el número que isca en el dau amb el que isca en la moneda. Si el resultat és parell guanya Josep, i si és imparell guanya María. Quina probabilitat de guanyar té Josep?



2.- EL JOC DE MERCÉ I SERGI

a) La Mercé i el Sergi estan jugant a un joc que comença amb la peça geomètrica de la Figura 1. La Mercé comença el joc tallant la peça al llarg d'una de les línees i formant dos peces. Després, passa al Sergi la peça que conté el triangle negre i descarta l'altra peça. El Sergi repeteix el mateix procés amb la peça que ha rebut, és a dir, la talla al llarg d'una de les línees i passa la peça que conté el triangle negre a la Mercé, descartant l'altra peça. El procés continua, resultant com a guanyador aquell que al principi del seu torn rep només el triangle negre. Prova, de manera justificada, que sempre hi ha una estratègia guanyadora per al Sergi.

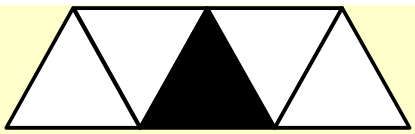


Figura 1

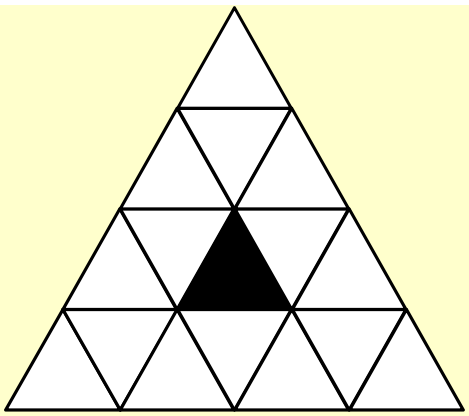


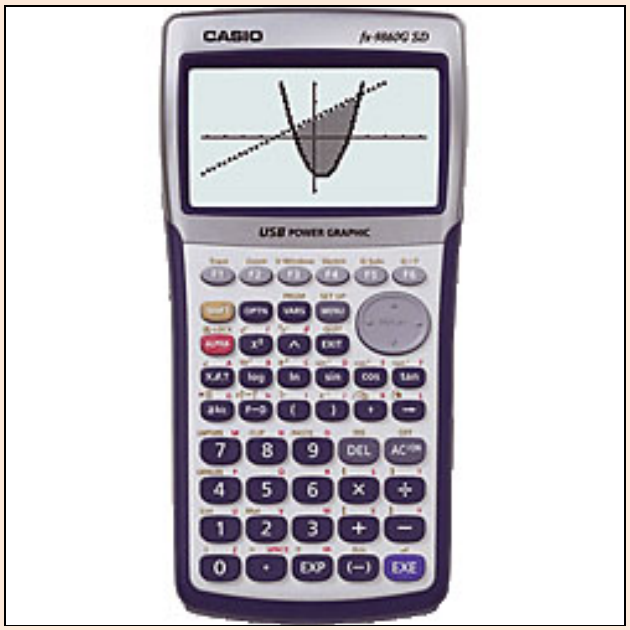
Figura 2

b) La Mercé i el Sergi juguen ara amb les mateixes regles però partint d'una altra peça, la que es mostra en la figura 2. Aquesta vegada és el Sergi qui comença. Com abans, només es pot tallar la peça al llarg d'una línea. Hi ha alguna estratègia que el Sergi puga seguir per tal d'assegurar-se que sempre guanye? Justifica la teua resposta.



3.- SEQÜÈNCIA

En una seqüència de números, la suma dels n primers termes ve donada per l'expressió $n^2 + 6n$. Quina és la suma dels termes que ocupen les posicions 3, 4 i 5 en la seqüència original? Quins són aquests termes?



4.- EL DESDEJUNI

El consum en una cafeteria d'una torrada, quatre cafés amb llet,i dos gots de suc de taronja costen 7 € i 90 cèntims, a torrada, mentre que la consumició d'una torrada, sis cafés amb llet, i tres gots de sucs de taronja costen 11 € i 40 cèntims. Calcula la consumició formada per una torrada, un got de café amb llet i un got d'un suc de taronja.



5.- PLANTES ACUÀTIQUES

He comprat dos plantes aquàtiques per al meu aquari que mesura 64 cm d'alçada. "**Anubia barteri var nana"** i "**Heteranthera zosterifolia**", la primera mesura mesura ja en el seu tercer any de vida 5 milímetres i duplica la seua altura cada any metre que la segona mesura 8,4 centímetres d'altura en el seu segon any de vida i augmenta en 4,4 cm cada any. Quant mesuraven les dues plantes en el seu primer any de vida?

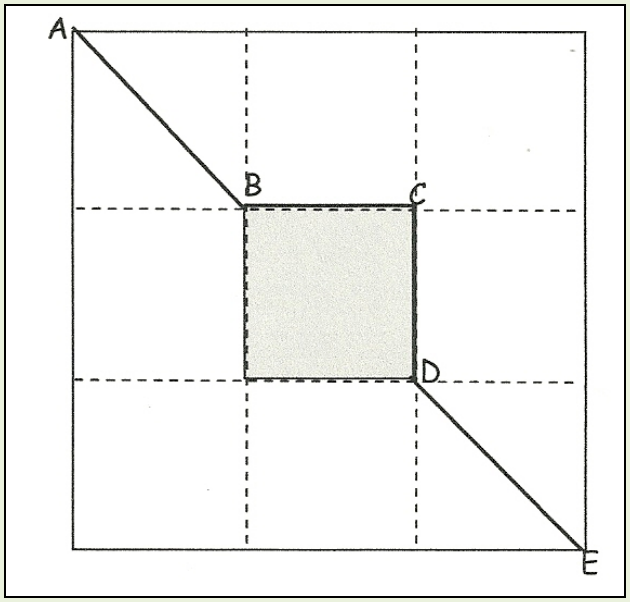
A partir de quins anys haurè de podar cada planta per a que no sobreixquen del meu aquari?

I quan comence a podar la segona planta, quants centímetres de la primera planta he podat ja?



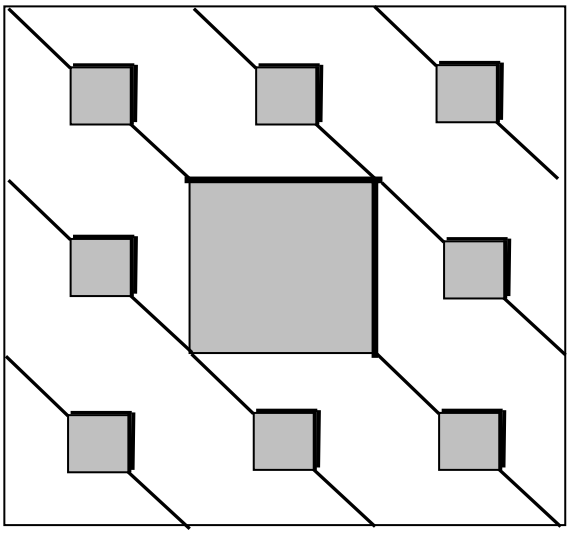
6.- ITERACIONS

Considera un quadrat de costat 1 cm . Dividim els costats del quadrat en tres parts i ens quedem amb el quadrat central ombrejat Unim amb una línia poligonal els vértex A,B,C, D i E dels cuadrats.



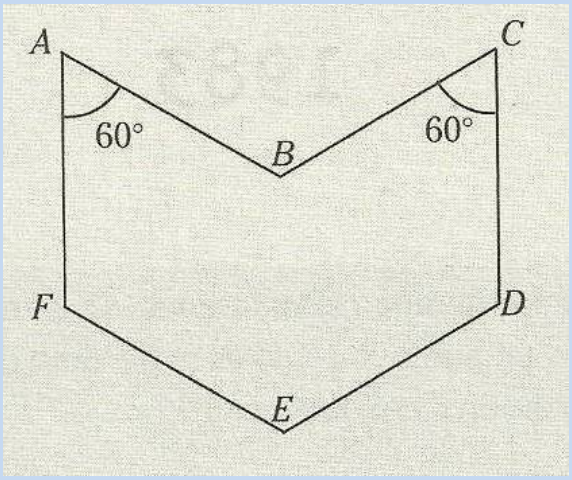
Tornem repetir el procés anterior amb els quadrats no centrals obtenin la següent figura.

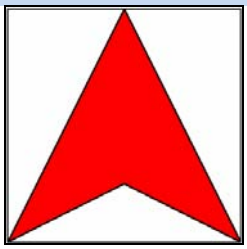
Calcula la suma de totes les línees poligonals semblants a l'anterior en aquesta iteració.



7.- PUNTA DE FLETXA

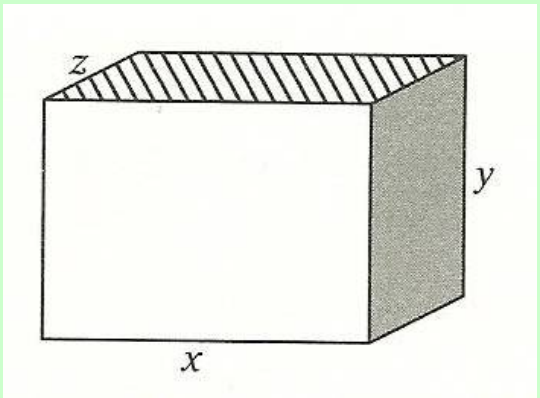
En la figura següent es verifica què els costats AF i CD són paral.lels. Igualment AB i FE són paral.lels així como BC i ED. Si cada costat té longitud 1 i els angles ‹FAB = ‹BCD = 60°, quina és l'àrea de la figura?





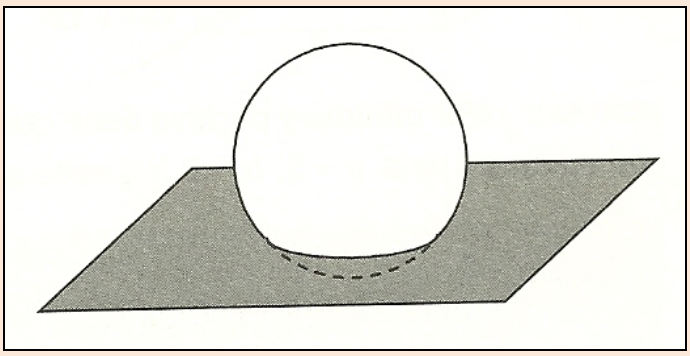
8.- PRISMA RECTANGULAR

L'àrea total d'un prisma rectangular és 22 cm^2 i la suma de les longituds de totes les seues arestes és 24 cm. Quina és, en cm, la màxima distància entre dos vèrtexs de l'esmentat prisma ?



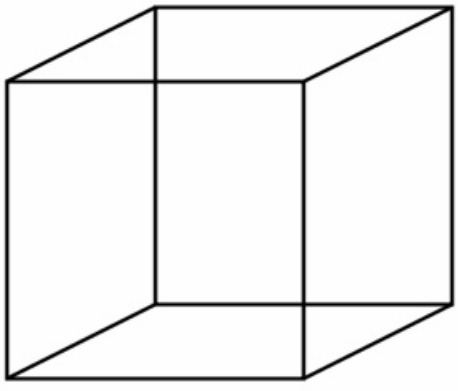
9.- BALÓ A LA NEU

Sobre un llac flota un baló. Al gelar-se l'aigua, el balò queda atrapat en el gel, però al alliberar-lo amb molt de cura, sense trencar el gel, deixa un forat de 24 cm de diàmetre i 8 cm de profunditat. Quin és, en cm, el radi del baló?



10.- CUB I ESFERES

En un cub d'aresta 1 coloquem nou esferes iguals de forma què el centre d'una d'elles coincidisca amb el centre del cub i cada una de les huit restants siga tangent a eixa esfera i a tres cares del cub. Quin és el radi de cadascuna de les esferes?

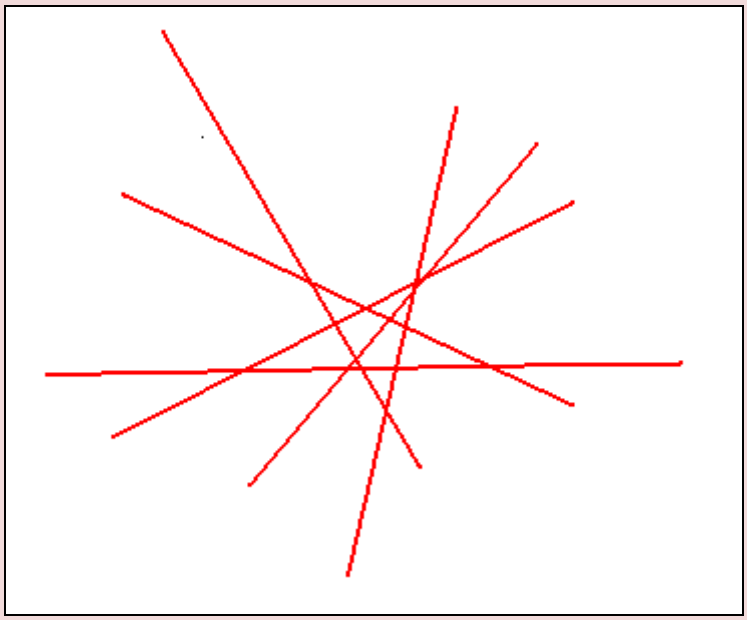




PROBLEMA OBERT

1.- PUNTS DE TALL

Assenyalem 10 punts en el semieix positiu d'abcises, altres 5 en el semieix positiu d'ordenades i dibuixem els 50 segments què unen uns amb altres. Quiné s el màxim número de punts de tall d'aquestos 50 segments què no están sobre els eixos?





SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL C (TERCER CICLE PRIMÀRIA)

1.- QUATRE DÍGITS

Solució:

$(4 - 3) \times 2 - 1 = 1$
$(4 - 3) \times 2 \times 1 = 2$
$(4 - 3) \times 2 + 1 = 3$
$4 + 3 - 2 - 1 = 4$
$4 + 3 - (2 \times 1) = 5$
$4 + 3 - 2 + 1 = 6$
$4 + 3 \times (2 - 1) = 7$
$4 + 3 + 2 - 1 = 8$
$4 + 3 + (2 \times 1) = 9$
$4 + 3 + 2 + 1 = 10$
$4 + (3 \times 2) + 1 = 11$
$4 \times 3 \times (2 - 1) = 12$

DIFICULTAT: 30

2.- QUADRAT, CERCLE I PENTÀGON

Solució:

El cercle pesa 1 quilo, el quadrat 2 quilos i el pentàgon 3 quilos.

DIFICULTAT: 30

3.- BOLES I DAUS

Solució:

Primera fila:	1 + 5 - 6
Segona fila:	x - +
Tercera fila:	2 x 4 + 1
Quarta fila:	+ x –
Quinta fila:	3 – 2 + 5

DIFICULTAT: 20

4.- PINXO DE DAUS

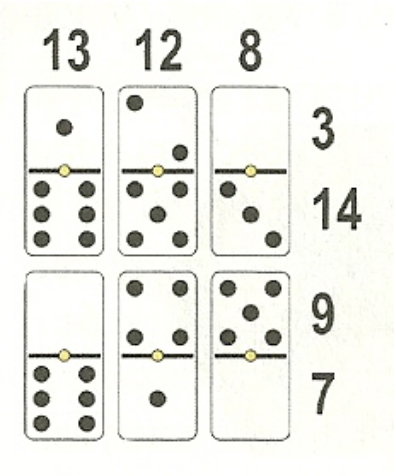
Solució:

La suma dels punts d'un dau és 21 (=6+5+4+3+2+1). Com què hi ha 7 daus, el total de punts ha de ser 21x7=147. El número de punts a la vista és 55, per tant, els punts ocults han de ser 147 – 55 = 92

DIFICULTAT: 20

5.- FITXES EN BLANC

Solució:

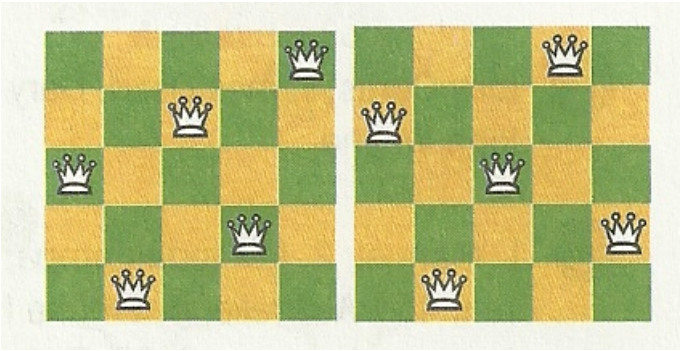


DIFICULTAT: 30

6.- CINC REINES

Solució:

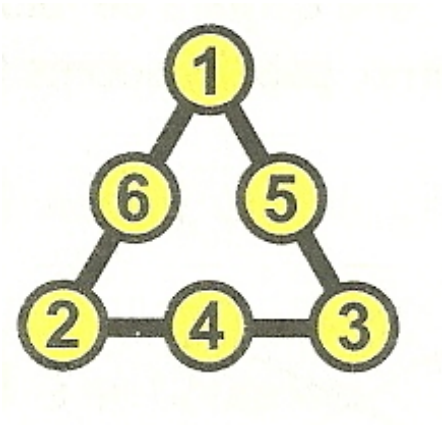
Hi ha dos solucions:



DIFICULTAT: 30

7.- TRIANGLE MÀGIC

Solució:



DIFICULTAT: 30

8.- CIRCUÏT

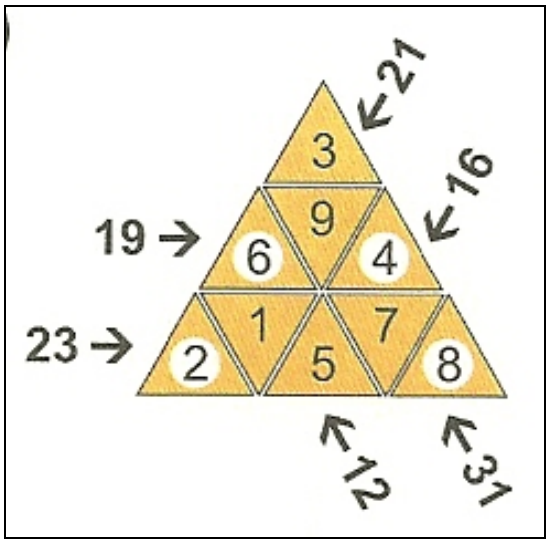
Solució:

En la casella A ha d'anar el resultat 5300, i en la casella B ha d'anar 3500.

DIFICULTAT: 10

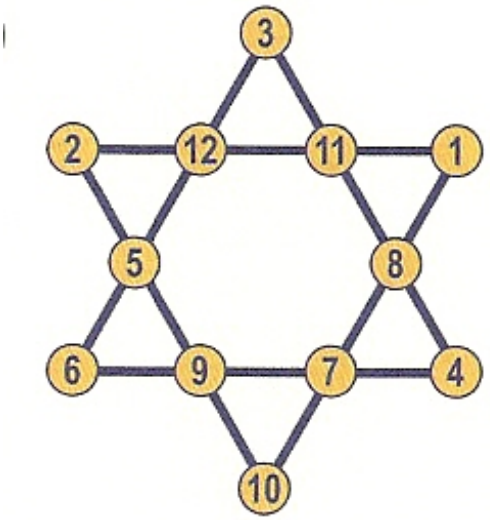
9.- TRIANGLES NUMÉRICS

Solució:



DIFICULTAT: 20

10.- ESTELA MÀGICA



DIFICULTAT: 30

11.- CORBATES

Solució:

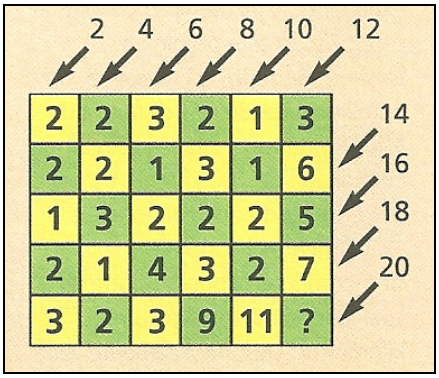
Sis corbates: una ratllada, una marron llisa, una vermella llisa, una verda llisa, una amb puntets i una negra llisa.

DIFICULTAT: 20

12.- INTERROGANT

Solució: el 20.

Prenent les diagonals com s'indica els totals són: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.



DIFICULTAT: 30

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL A (PRIMER CICLE ESO)

1.- TRIANGLE CURVILINI

Solució :

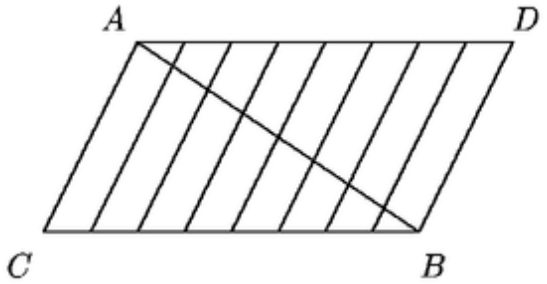
Els tres arcs foren traçats amb el mateix radi, aleshores el triangle ABC és equilàter de costat 1. Com en el triangle equilàter tots els angles són iguals a 60º aleshores tenim que l'àrea del sector CB és una sisena part de l'àrea del cercle, és a dir, $(\pi x r^2)/6 = \pi/6$; anàlogament les àrees dels sectors AB i AC són $\pi/6$, respectivament. L'àrea de la figura és la suma de l'àrea dels tres sectors menys dos voltes l'àrea del triangle ABC. L'altura del triangle ABC és arrel de 3/2, aleshores la seua àrea és $bh/2=(1 \times \sqrt{3})/2)/2= (\sqrt{3})/4$. Per tant, l'àrea de la figura és: $A=3(\pi/6)-2(\sqrt{3})/4= (\pi - \sqrt{3})/2$.

DIFICULTAT: 30

2 – SET SEGMENTS

Solució :

Tracem per A una paral·lela a BC i por B una paral·lela a AC. Si D és el seu punt d'intersecció, cadascun dels segments paral·lels a AC que s'han dibuixat són del mateix tamany. La suma de les longituts dels segments paral·lelo dins del triangle ABC és igual a la suma de les longituts dels segments paral·lels dins del triangle ABD. Així, la suma dels segments en un sol triangle és igual a (7x4)/2 = 14.



DIFICULTAT: 20

3.- JOAQUÍN RODRIGO

Solució :

Com només agafem les 3 últimes xifres hem de veure el seu comportament al donar-les la volta.

ORDRE DE XIFRA DE L'ANY	ORDRE DE XIFRA DE L'ANIVERSARI
UNITATS	*Centenes*
DESENES	*Desenes*
CENTENES	*Unitats*

Els propers anys canviaran les xifres de les unitats → suposa canvi en la xifra de les centenes de l'aniversari i ens allunya del nostre objectiu.

Així, podem raonar que allò més proper es un canvi en la xifra de les desenes que es tradueix en el mateix canvi a la xifra de les desenes de l'aniversari. Aleshores la resposta correcta és l'any 2021

DIFICULTAT: 30

4.- LA MONEDA FALSA

Solució :

Dividim les 24 monedes en 2 grups de 12 monedes, els comparem a la balança i descartem el grup de 12 monedes més pesat ja que la moneda falsa estarà al grup menys pesat.
Tornem a dividir en grups de 6 monedes i seleccionem el grup menys pesat.
Ara fem una última divisió en grups de 3 i seleccionem el grup menys pesat.
Finalment pesem dues monedes del grup de 3 final. Amb eixa pesada determinem quina és la moneda falsa. TOTAL = 4 pesades

El raonament anterior es vàlid per a grups més reduïts de monedes: 3 (1 pesada), 6 (2 pesades), 12 (3 pesades)…. $3\times 2^{n-1}$ monedes requereixen n pesades.
Per a 3072 (= $3\times 2^{11-1}$) monedes seran necessàries 11 pesades.

DIFICULTAT: 30

5.- PRODUCTE D'ENTERS

Solució :

Ens interessa que el producte continga la major quantitat de nombres…sempre que el seu producte siga major que la seua suma. Això ens fa descartar el 1 (òbviament) i també el 2. El següent nombre enter és el 3 i el màxim nombre de tresos que sumen menys de 20 són 6 (3*6=18). I com la suma de les xifres que multipliquem ha de donar 20, multiplicarem també per 2: 3*3*3*3*3*3*2 = 1458

DIFICULTAT: 30

6.- QÜESTIÓ D'ANGLES

Solució :

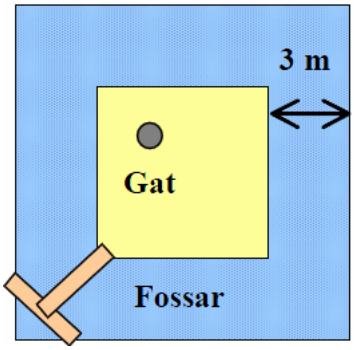
Utilitzant la propietat de tot triangle que diu que la suma dels seus angles ha de ser 180º, obtenim:
Triangle ABC: $C=180º-(A+B)=180º-(4x+3x)=180º-7x$
Triangle CDE: Com $C=180º-7x \rightarrow E=180º-(D+E)=180º-(5x-(180º-7x))=2x$

Triangle EFC: $E+F+G=180 \rightarrow 2x+2x+6x=180 \rightarrow 10x=180º \rightarrow x=18º$

DIFICULTAT: 20

7.- RESCATEM EL GAT

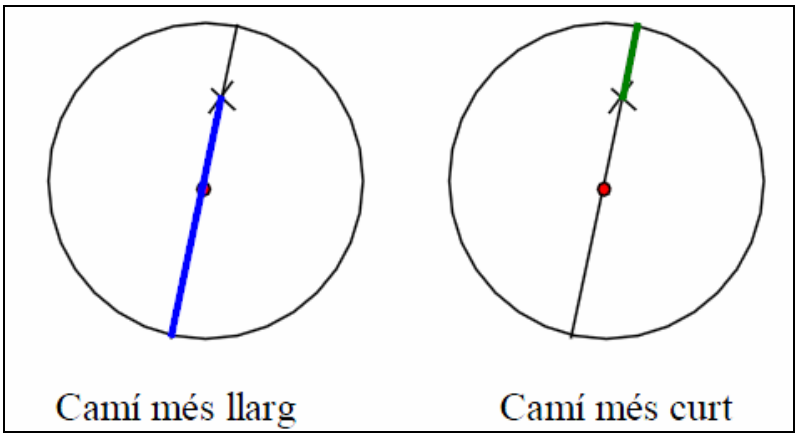
Cal col·locar els dos taulons tal com es veu al dibuix. El que es recolza a la cantonada formant un triangle s'aguanta sòlidament i retalla la distància a la plataforma, el que permet recolzar l'altre tauló tranquil·lament.



DIFICULTAT: 30

8.- ENTRENANT-SE AL LLAC

Es pot comprovar amb unes quantes mesures que el camí més llarg passa pel centre de la circumferència, per tant està sobre un diàmetre.
El camí més curt és l'altre tros del diàmetre.



DIFICULTAT: 20

9.- MEITATS PERSISTENTS

El nombre ha de ser senar perquè després de sumar 1 siga divisible per 2. Només pot acabar en 1 perquè després de sumar 1 acabarà en 2 i la meitat acabarà en 1, (com abans). Si acabarà en 3 les meitats després de la suma (3+1=4) acabarien en 2 o en 7; si acabarà en 5 el procés acabaria en 3 o en 8; si acabarà en 7 el final seria 4 o 9 i si acabarà en 9 els finals serien 0 o 5. Sabent que acaba en 1 amb poques proves es pot descobrir que el nombre és 81.

DIFICULTAT: 20

10.- LES LLUMS

Recordem que si a|b llavors (b/a)|b. És a dir els divisors d'un nombre vénen en parells, l'única excepció és si a = b / a és a dir si b és un quadrat perfecte. Llavors cada nombre que no siga quadrat perfecte té una quantitat parella de divisors, si és quadrat perfecte esta quantitat és imparella. Després que tots els empleats han eixit queden enceses aquelles els interruptors de les quals han sigut pressionats una quantitat imparella de vegades, és a dir 1, 4, 9 i 16.

DIFICULTAT: 20

11.- TAULER

El tauler és 8x8, en la primera fila els nombres són:

1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; … ; 1 + 8 = 9

2 + 3 + … + 9 = 44

En la segona:

2 + 1 = 3; 2 + 2 = 4; …; 2 + 8 = 10

3 + 4 + … + 10 = 52

Cada fila és 8 més que l'anterior, en total es tindria:

44 + 52 + 60 + 68 + … + 100 = 576

Per tant, Alex col·loca 576 fitxes en total.

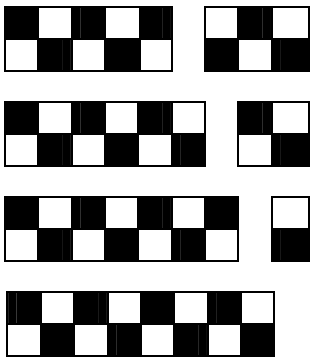
DIFICULTAT: 30

12.- ESCACS?

Cada rectangle de la descomposició té un nombre parell de caselles perquè té la mateixa quantitat de caselles negres que blanques.
Vegem quina és la màxima quantitat de nombres parells la suma de la qual no supere 64:

2+4+6+8+10+12+14 = 56,
2+4+6+8+10+12+14+16 = 72

La suma de huit nombres parells distints és sempre major que 64, per tant, la descomposició pot tindre com a màxim 7 rectangles.
El nombre més gran és 7 com ho mostra la descomposició següent:



DIFICULTAT: 30

13.- PERÍMETRES

Segons la figura que es mostra, i les condicions del problema es té que PM = x, PN = y, i PP = z; d'on el valor del costat per a cada quadrat és respectivament x/4, y/4 i z/4. Així:

$$x/4 + y/4 = z/4$$

$$x + y = z$$

$$(x + y) / z = 1$$

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL B (SEGON CICLE ESO)

1.- DAU I MONEDA

Si alguno de los números que salen (o en el dado o en la moneda) es par, el resultado es par. Hay probabilidad de 1/2 de que salga el 2 en la moneda, y la probabilidad de que si salga 1 en la moneda y un número par en el dado es de 1/2 x 1/2 = 1/4. Así, la probabilidad de que gane Edgar es 1/2 + 1/4 = 3/4.

DIFICULTAT: 40

2.- EL JOC DE MERCÉ I SERGI

a) Suposem, sense pèrdua de generalitat, que la Mercé comença el joc tallant pel costat esquerre del triangle negre:

Cas 1: La Mercé descarta els dos triangles blancs, deixant: 

En aquest cas, el Sergi descarta només un triangle blanc, i li passa a la Mercé la figura , forçant-la a llevar l'últim triangle blanc i perdre.

Cas 2: La Mercé descarta només un triangle blanc, deixant: .

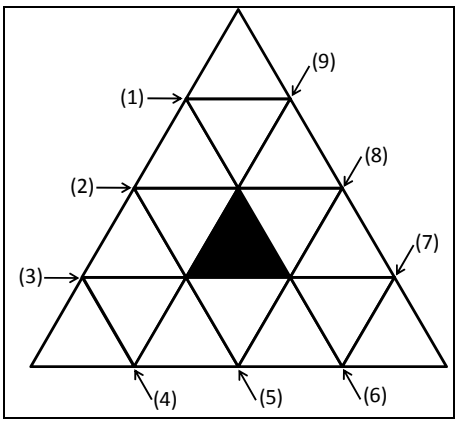
El Sergi descarta els dos triangles blancs de la dreta, deixant a la Mercé en la mateixa posició que en el cas 1 per al seu segon torn.

Per tant, el Sergi sempre guanya independentment de l'estratègia de la Mercé.

b) Anem a demostrar, de nou, que el Sergi té sempre una estratègia guanyadora.

L'estratègia consisteix a reduir la peça de la figura 2 a la peça de la figura 1, i fer que la Mercé faça el primer tall en aquest punt. El Sergi també és conscient que si li toca a ell fer el tall quan la peça passa de la figura 2 a la figura 1, aleshores la Mercé pot guanyar la partida.

Anem a nombrar les línees de la peça de la figura 2 per a més claredat de l'explicació:



Podem assumir sense pèrdua de generalitat (per simetria) que el Sergi talla al llarg de (1), (2) o (3) per començar. Si talla per (2) o (3), aleshores la Mercé talla per l'altra línea d'eixes dos (si Sergi ho fa per (2), Mercé ho fa per (3) i viceversa) i deixa al Sergi la peça de la figura 1, on inevitablement ell perdrà. Aleshores, el Sergi talla per (1) per començar.

Si la Mercé ara talla per (2) o per (3), el Sergi tallarà per l'altra línea (si Mercé talla per (2), Sergi per (3) i viceversa) i li passa la peça de la figura 1 a la Mercé, i per tant perd ella.

Si la Mercé talla per (8) o per (9), el Sergi talla per l'altra línea (si Mercé talla per (8), Sergi ho ha per (9) i viceversa) i li passa la peça de la figura 1 a la Mercé, que de nou perd. El mateix passa si la Mercé talla per (5) o (6). Assumim ara que la Mercé talla per (4) o (7). Considerem (4) per simetria.

Si el Sergi talla ara per qualsevol d'aquestes línees (2), (3), (5), (6), (8) o (9), aleshores la Mercé pot forçar al Sergi a perdre de la mateixa manera que anteriorment el Sergi podia forçar a la Mercé a perdre (com es comenta prèviament). Per tant, el Sergi talla per (7).

Ara la Mercé està obligada a tallar per (2), (3), (5), (6), (8) o (9), i el Sergi fa el tall apropiat per tal de passar a la Mercé la peça amb la forma de la figura 1, i per tant forçant-la a perdre. Per tant, el Sergi sempre té una estratègia guanyadora.

DIFICULTAT: 40

3.- SEQÜÈNCIA

Calculem la suma dels 5 primer termes: $S_5 = 5 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 = 155$

i calculem la suma dels dos primers termes: $S_2 = 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 32$

Per calcular la suma dels termes que ocupen les posicions 3, 4 i 5 només hem de fer $S_5 - S_2$.

$S_5 - S_2 = 155 - 32 = 123$

Per esbrinar els termes, el que hem de fer és anant calculant les sumes progressives, i restem els termes anteriors. Siguen a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 els dits termes:

$a_1 = S_1 = 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 11$

$a_2 = S_2 - S_1 = (5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2) - 11 = 32 - 11 = 21$

$a_3 = S_3 - S_2 = (5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3) - 32 = 63 - 32 = 31$

$a_4 = S_4 - S_3 = (5 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4) - 63 = 104 - 63 = 41$

$a_5 = S_5 - S_4 = (5 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5) - 104 = 155 - 104 = 51$

Per tant, els termes demanats són: $a_3 = 31$, $a_4 = 41$ i $a_5 = 51$, que com es pot comprovar sumen 123.

DIFICULTAT: 40

4.- EL DESDEJUNI

X= preu d'una torrada; y= preu d'un got de llet; z= preu d'un got de suc de taronja (en euros) Volem x+y+z

$$\left.\begin{matrix} x + 4y + 2z = 7{,}9 \\ x + 6y + 3z = 11{,}4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} (x + y + z) + 3y + z = 7{,}9 \\ (x + y + x) + 5y + 2z = 11{,}4 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

Restant la 2º equació menys la 1ª equació,

2y+z=3,5; i transformant una equació inicial:
x+4y+2z=7,9
x+2·(2y+z)=7,9
x+2·(3,5)=7,9
x=0,90 €

Substituint en el 1r sistema d'equacions obtenim un nou sistema de dos equacions amb dos incògnites

$$\left.\begin{array}{l} 4y+2z=7 \\ 6y+3z=10,5 \end{array}\right\}$$ i les solucions són y=1,2€, z=1,1€

El preu demanat serà x+y+z=0,9+1,2+1,1=3,2€

DIFICULTAT: 20

5.- PLANTES ACUÀTIQUES

Es tracten d'una progressió geomètrica i aritmètica
1ª planta a1=0,05 cm , r =2
2a planta a1=4 cm, d =4,4

Ací està una taula dels primers termes de les succesions. Les quantitats estan donades en centímetres.

N=nombre d'anys	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_n = 0,05 \cdot 2^{n-1}$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32
$a_n = 4 + (n-1) \cdot 4,4$	4	8,4	12,8	17,2	21,6	26	30,4	34,8	39,2

1ª planta

$$a_n = 0,125 \cdot 2^{n-1} = 2^{-3} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-4} > 4 = 2^6 \underset{\rightarrow}{} 2^{n-4} > 2^6 \rightarrow n-4 > 6 \rightarrow n > 10$$

La primera planta podaré a partir del 11é any.

2a planta

$$a_n = 4 + (n-1) \cdot 4,4 = 4,4n - 0,4 > 64 \underset{\rightarrow}{} 4,4n > 63,6 \rightarrow n > 14,4545...$$

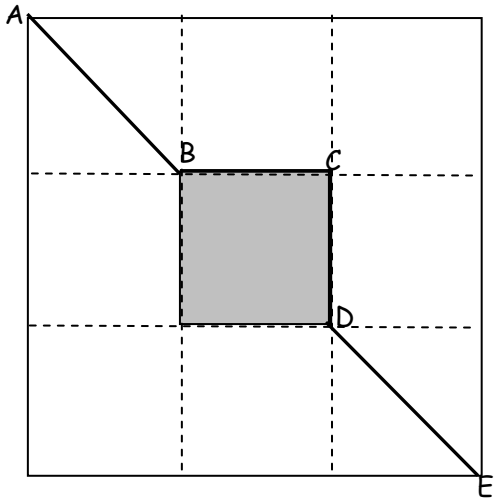
La segona planta la podaré a partir del 15é any.

He de calcular la suma de la poda des de l'any 12é fins a la 14é.
a12+a13+a14= 0,05·(211+213+214)=0,05·26624=1331,2 cm =13,312 m.

DIFICULTAT: 30

6.- ITERACIONS

Per Pitàgores, $\overline{AB}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}=DE$; $\overline{BC}=\overline{CD}=\frac{1}{3}$. Si L_1 és la longitud de la línea poligonal, $L_1=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$



Per a la següent iteració, n'hi ha 8 quadrats de la longitud del costat $\frac{1}{9}$ i, per tant: $L'_2=\frac{2}{9}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\rightarrow 8\cdot L'_2=8\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$ i cal afegir $\overline{BC}+\overline{CD}=\frac{2}{3}$

La suma de totes les linies poligonals serà: $L_2=8\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{2}{3}$

DIFICULTAT: 30

7.- PUNTA DE FLETXA

Dibuixant els segments BF i BE s'observa què el triangle AFB és equilàter, ja què és isosceles amb un angle de 60º. Per tant FB=FE=1 I <BFE=<ABF=60º per alterns interns, amb el què el triangle FBE també és equilàter.

La figura se compsa de quatre triangles equilàters iguals de costat 1 i la seua área será per tant: $S=4\cdot\left(\frac{l^2\cdot sen\,60^o}{2}\right)=2\cdot\left(1^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$

DIFICULTAT: 30

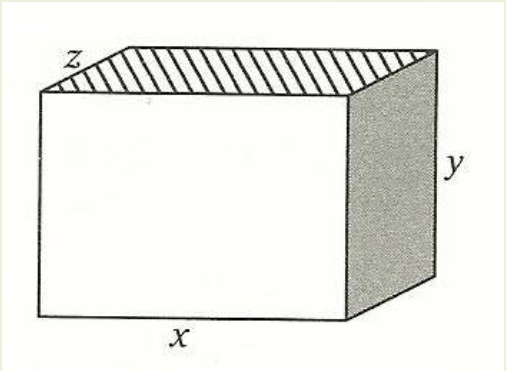
8.- PRISMA RECTANGULAR

Siguen x, y, z les tres dimensions del prisma (llarg, alt i ample). Tenim:
Área total: 2xy+2xz+2yz=22 → xy+xz+yz=11
Suma de la longitud de totes les arestes: 4x+4y+4z=24 → x+y+z=6

Com què la máxima distancia entre dos vèrtexs és la distancia entre dos vèrtexs oposats i aquesta és: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, trobarem:

$$(x+y+z)^2=6^2\rightarrow x^2+y^2+z^2+2x\cdot y+2x\cdot z+2y\cdot z=36\rightarrow$$
$$\rightarrow x^2+y^2+z^2=36-2\cdot(xy+xz+yz)\rightarrow x^2+y^2+z^2=36-2\times 11=14$$

Per tant, la distancia demanada és d= $\sqrt{14}$

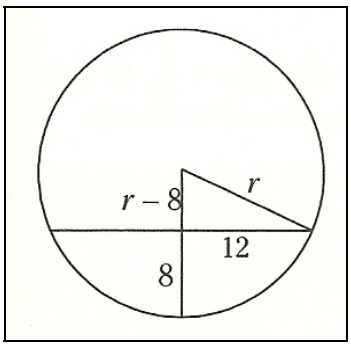


DIFICULTAT: 20

9.- BALÒ A LA NEU

En el triangle rectangle de la figura:

$$r^2=(r-8)^2+12^2\Rightarrow r^2=r^2-16\cdot r+64+144\Rightarrow 16\cdot r=208\Rightarrow r=13\,cm$$



DIFICULTAT: 20

10.- CUB I ESFERES

Pensem en les huit esferes tangents a l'esfera central i a tres cares del cub. Els seus centres són vèrtexs d'un cub, l'aresta del qual és 1-2r, sent r el radi de cada esfera. D'altra banda, la diagonal d'aquest cub tindrà dos diàmetres, o siga 4r.

Així, $4\cdot r=\sqrt{(1-2r)^2\times 3}$, és a dir, $\sqrt{3}\cdot(1-2r)=4r$, o equivalentment, $r\cdot\left(4+2\cdot\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$. Per tant:

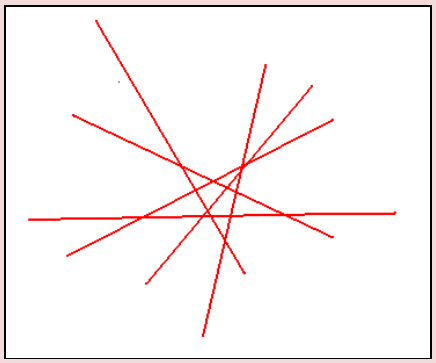
$$r=\frac{\sqrt{3}}{4+2\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(4-2\cdot\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{4\cdot\sqrt{3}-6}{4}=\frac{2\cdot\sqrt{3}-3}{2}$$

DIFICULTAT: 30

PROBLEMA OBERT

1.- PUNTS DE TALL

Com en anteriors ocassions, es tracta d'un problema què deixem "obert" amb l'intenció de què participes en la nostra revista enviat-nos la teua solució. Es tracta d'un problema que presenta un major nivel de dificultat, encara què pensem què, amb una miqueta de treball, trovarás la seua solución i ens l'enviaràs. Ànim!



CONTACTEU AMB NOSALTRES...!!!

SI VOLS ENVIAR-NOS SOLUCIONS DE PROBLEMES OBERTS, PROPOSTES DE PROBLEMES O DE TEMES, COMENTARIS I SUGGERIMENTS... POTS ENVIAR UNA CARTA A L'ADREÇA:

SEMCV "AL-KHWARIZMI"
PROBLEMA OBERT
APARTAT 22.045
46071-VALENCA

TAMBÉ POTS ENVIAR UN MISSATGE AL CORREU ELECTRÒNIC:

problemesolimpics@semcv.org

ESPEREM LES VOSTRES COL·LABORACIONS!!!

S.
E.
M.
C.
V.

AL-KHWARIZMI

Esta revista es publica amb el suport de l'Acadèmia Valenciana de la Llengua

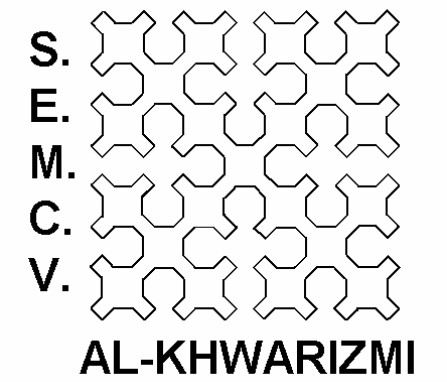
Amb la col·laboració de la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana

Trobaràs tota la informació en la nostra web.

Societat d'Educació Matemàtica Comunitat Valenciana

Al-Khwarizmi

Visiteu-la: www.semcv.org



Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"