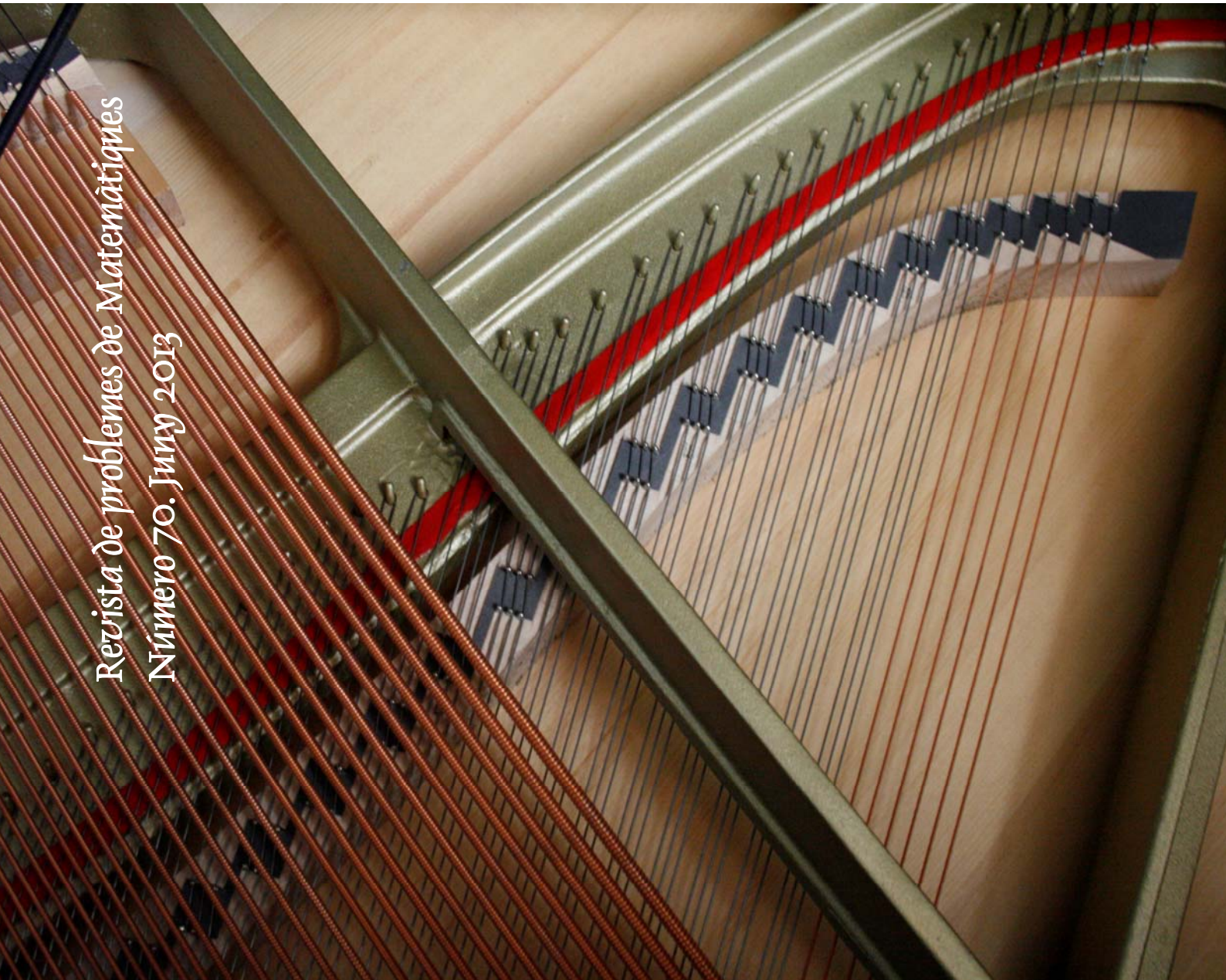
S. E. M. C. V.

AL-KHWARIZMI

Problemes Olímpics



Revista de problemes de Matemàtiques
Número 70. Juny 2013

GALERIA DE FOTOS PARTICIPANTS AL XIII CONCURS DE FOTOGRAFIA "MATEMÀTICA A LA VISTA"



"Caracol espiral".
Alejandro Escrivá. Col·legi ABECÉ (Gandia)



"Fractales en un higo".
Mar Tavallo. Col·legi ABECÉ (Gandia)



"Matemática natural"
Francisco Ferrairó. Col·legi ABECÉ (Gandia)



"Posición relativa de una linea y una circunferencia en el wc"
Carlos Romero. IES Maria Moliner (Port de Sagunt)



"Dentro del caracol"
Teresa Sánchez. IES Ramón Llull (València)



"Paralelas sobre ruedas". Carmen Fernández Quesada
IES María Moliner (Port de Sagunt)



"Infinit campestre".
Ferran Fos. IES La Sènia (Paiporta)



"La escalera de triángulos".
Carlos Carrió. Colegio Paidós (Dénia)



"Sinfonía de cajones".
Sergio García. Colegio Paidós (Dénia)

Fé d'errades: A la revista PO 69 es publicaren les fotografies "Closca Simètrica" d'Adrián Escrivà i "Circunferencia 30 radios" d'Alejandro Escriva que són alumnes del Col·legi ABECÉ de Gandia.

Ací teniu el número 70 de PROBLEMES OLÍMPICS corresponent al mes de juny de 2013. Aprofitem per a recordar-vos les dates de celebració de la XXVI Olimpíada Matemàtica 2014:

- Fase comarcal: **12 d'abril de 2014**
- Fase provincial: **10 de maig de 2014**
- Fase autonòmica: **31 de maig i 1 de juny de 2014**

El proper any 2014 celebrarem les XI Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana a la ciutat de Castelló. El lema serà "Matemàtiques 3,14" per celebrar-se el 7 i 8 del mes de març de l'any 14. La presentació de propostes de comunicacions i tallers serà fins el 5 de febrer de 2014 i la inscripció cal fer-la a través de la nostra web, on trobareu tota la informació: www.semcv.org

La Conselleria d'Educació, Cultura i Esport ens ha reconegut la condició d'entitat col·laboradora en la formació del professorat per al curs 2013-2014. Això ens permet convocar i desenvolupar activitats formatives amb el reconeixement oficial de la Conselleria, oferides als nostres socis i a tot el professorat en general. Vos animem a participar activament en les activitats planificades. Podeu fer la inscripció a la nostra web.

PROBLEMES OLÍMPICS

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Apartat 22.045
46071 València

Director: Tomàs Queralt Llopis

Coordinador de redacció: Josep Manuel Martínez Canet

Correcció lingüística: José Fernando Juan García

Consell de redacció:

José María Ajenjo Vento,
Mª Dolors Arnal Bertomeu,
Joaquim Arnau Breso,
Alejandro Barona Hernández,
Ricardo Carrascosa Rubio,
Carme Company Palomares,
Mauricio Contreras del Rincón,
Vicente Diago Ortells,
Verónica García Ruiz,
José Fernando Juan García
Mónica Laparra Ibáñez,
Antonio Ledesma López,
Encarna López Gómez,
Eduardo Llopis Castelló,
Miguel Marco Cotaina,
Josep Manuel Martínez Canet,
Mari Carmen Moreno Esteban,
Encarnación Moreno Ruiz,
Mari Carmen Olivares Iñesta,
Ruth Orts García,
Tomás Queralt Llopis,
Silvia Quilis Marco,
Mª Jesús Ruiz Maestro,
José Pascual Segura Acares.

D.L.: V-3026-2001
ISSN: 1578-1771

Portada: "Rectas sonoras" Autora: Carmen Fernández Quesada. IES María Moliner (Port de Sagunt). 4t. Premi de l'Apartat I del XIII Concurs de Fotografia Matemàtica "Matemàtica a la vista".

Et falta algun exemplar de la revista Problemes Olímpics? Si vols ens el pots demanar i te l'enviem a la teua adreça.

S. E. M. C. V. AL-KHWARIZMI

SOL·LICITUD D'ENVIAMENT DE NÚMEROS ANTERIORS DE "PROBLEMES OLÍMPICS"

Nom: _____ Cognoms: _____

Adreça: _____ Telèfon: _____

C.P. _____ Població: _____ Província: _____

Correu-e: _____ Tasca docent (curs, nivell, etc.)_____

Desitge rebre els següents números de la revista "Problemes Olímpics" a la meua adreça:

□ Problemes Olímpics Nº 2	(1.2 €)	□ Problemes Olímpics Nº 40	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 3	(1.2 €)	□ Problemes Olímpics Nº 41	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 11	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 42	(2.0 €)
□ Problemes Olímpics Nº 12	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 43	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 13	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 44	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 14	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 45	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 15	(2.4 €)	□ Problemes Olímpics Nº 46	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 16	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 47	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 17	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 48	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 18	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 49	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 19	(1.8 €)	□ Problemes Olímpics Nº 50	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 20	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 51	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 21	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 52	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 22	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 53	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 23	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 54	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 24	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 55	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 25	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 56	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 26	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 57	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 27	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 58	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 28	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 59	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 29	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 60	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 30	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 61	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 32	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 62	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 33	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 63	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 34	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 64	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 35	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 65	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 36	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 66	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 37	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 67	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 38	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 68	(2.5 €)
□ Problemes Olímpics Nº 39	(2.0 €)	□ Problemes Olímpics Nº 69	(2.5 €)

Els números que no apareixen en aquesta llista estan exhaurits.

Ens envies aquesta butlleta complimentada a la nostra adreça: Societat d'Educació Matemàtica "Al-Khwarizmi", Apartat 22.045, 46071-València, indicant en el sobre "Revista Problemes Olímpics", incloent el justificant d'ingrés del preu total dels exemplars que sol·licites al nostre compte de BANKIA: 2038-6301-37-3000011367.

SUMARI

FASE PROVINCIAL

ENUNCIATS

PROBLEMES NIVELL C (TERCER CICLE PRIMÀRIA) ..... p. 5

PROBLEMES NIVELL A (PRIMER CICLE ESO) ..... p. 12

PROBLEMES NIVELL B (SEGON CICLE ESO) ..... p. 19

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL C (TERCER CICLE PRIMÀRIA) ..... p. 28

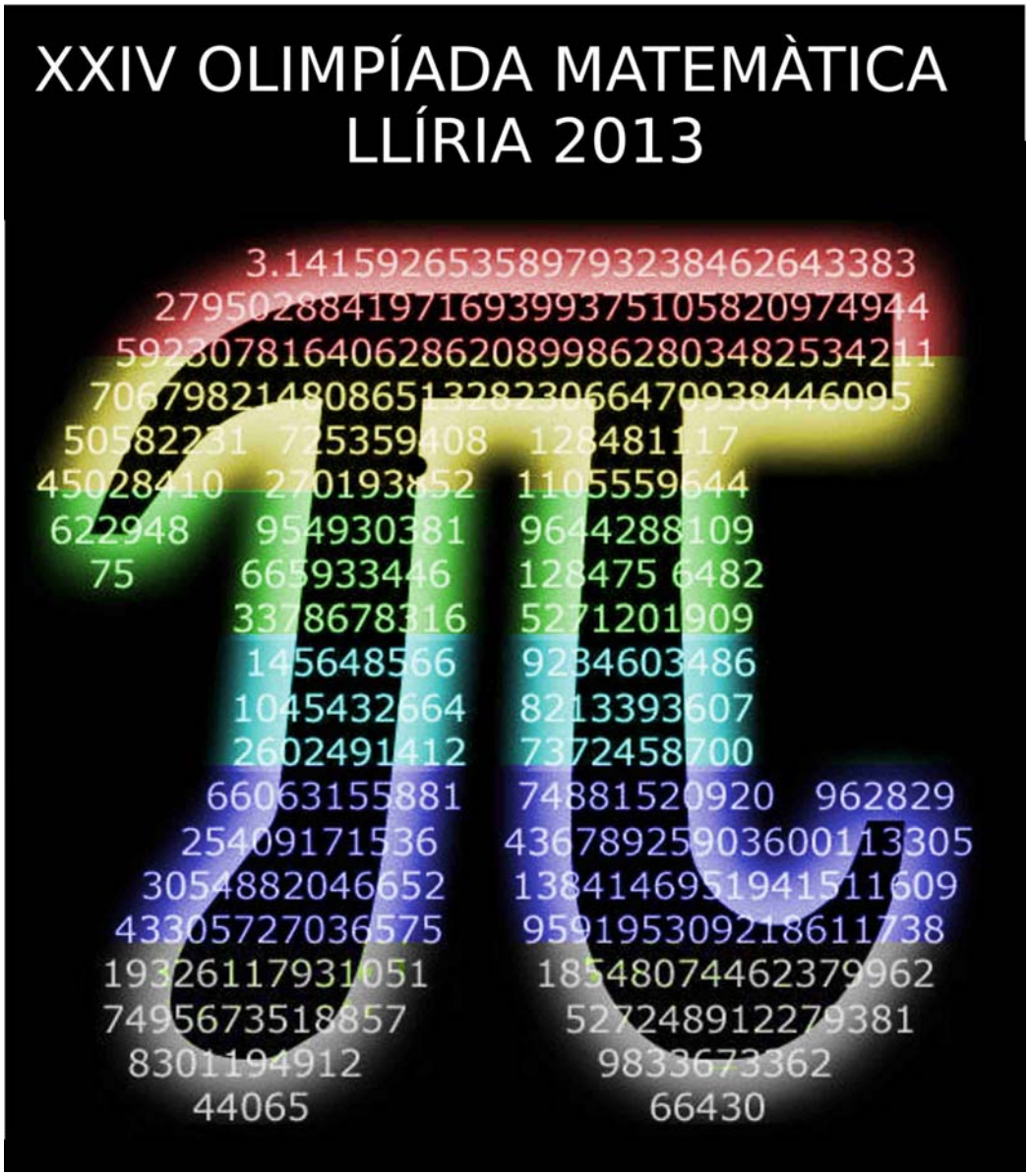
PROBLEMES NIVELL A (PRIMER CICLE ESO) ..... p. 40

PROBLEMES NIVELL B (SEGON CICLE ESO) ..... p. 53

La selecció de problemes de cada nivell i les solucions ha sigut elaborada per l'equip constituït per:

José María Ajenjo Vento,
Mª Dolors Arnal Bertomeu,
Joaquim Arnau Breso,
Alejandro Barona Hernández,
Ricardo Carrascosa Rubio,
Carme Company Palomares,
Mauricio Contreras del Rincón,
Vicente Diago Ortells,
Verónica García Ruiz,
Mónica Laparra Ibáñez,
Antonio Ledesma López,
Encarna López Gómez,
Eduardo Llopis Castelló,
Miguel Marco Cotaina,
Josep Manuel Martínez Canet,
Mari Carmen Moreno Esteban,
Encarnación Moreno Ruiz,
Mari Carmen Olivares Iñesta,
Ruth Orts García,
Tomás Queralt Llopis,
Silvia Quilis Marco,
Mª Jesús Ruiz Maestro,
José Pascual Segura Acares.

ENUNCIATS



XXIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE PROVINCIAL
PROVÍNCIA DE VALÈNCIA

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. ENIGMA NUMÈRIC

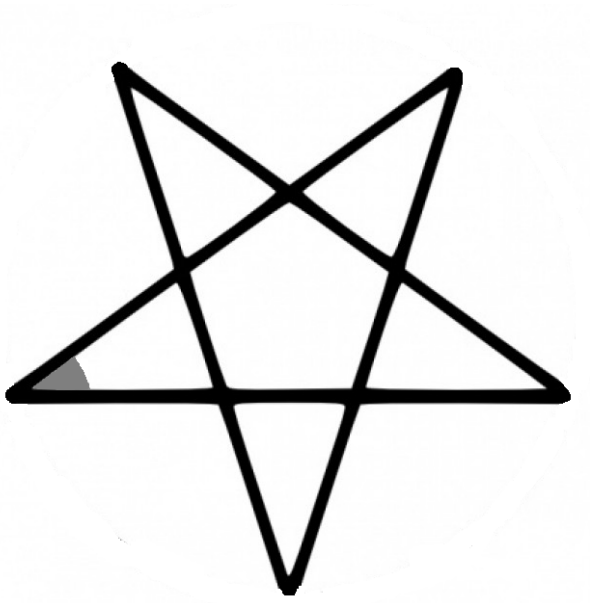
Si tenim que:

$$\begin{array}{cccc} & U & N & O \\ + & U & N & O \\ \hline & D & O & S \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & D & O & S \\ + & U & N & O \\ \hline & A & B & N \end{array}$$

Sabent que cada lletra representa un dígit de l'1 al 9, i que dues lletres diferents no poden representar el mateix dígit, podries dir quins dígits són?

2. L'ANGLE DE L'ESTRELLA

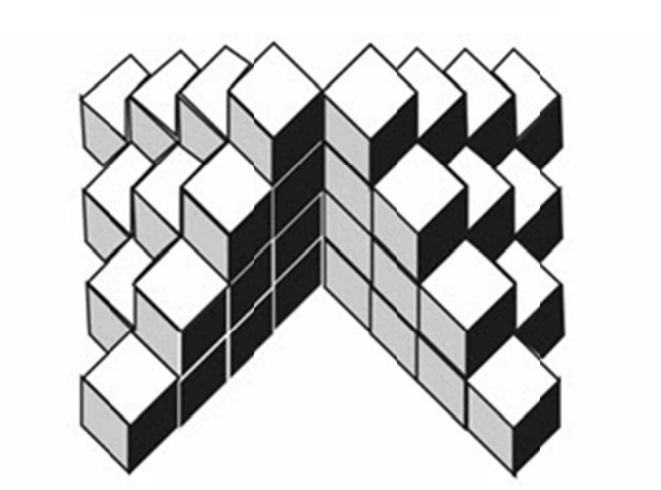
De l'estrella de cinc puntes dibuixada volem saber quant medix l'angle indicat. Sabries calcular-lo?



3. L'ESCALA PIRAMIDAL

Quants cubs hi ha a la següent figura?

I quants tindríem si continuarem posant més cubs baix del tot, seguint la figura, fins que tinguérem el doble d'alçària?



4. M'HE OBLIDAT DE CARREGAR EL MÒBIL

Pere vol emportar-se el seu MP3 i el seu mòbil nou de viatge. Una hora abans de començar el viatge s'adona que s'ha oblidat de carregar les bateries la nit anterior. Immediatament endolla els dos aparells per a carregar-los fins que puga.

Pere sap que l'MP3 te un 48% de bateria i que carrega un 12% cada 16 minuts.

El mòbil, com que és nou, Pere no sap quant tarda a carregar-se, però apunta en un paper la càrrega durant 30 minuts després d'endollar-lo:

Temps carregant	0	10	20	30
Càrrega de la bateria del mòbil (%)	20	32	44	56

a. Si el viatge comença com està planejat, quina càrrega tindrà cadascun dels aparells?

b. Quant s'haurà d'esperar Pere per tindre, almenys, un dels aparells carregat al 100%? De quin aparell es tractarà?

5. MASSA RODES

Sabem que en un encontre d'amants dels esports sobre rodes hi ha bicicletes, karts i tricicles. Ens informen que hi ha el doble de karts que de bicicletes i dos tricicles més que bicicletes. Sabem també que en total hi ha 84 rodes. Troba quants participants hi havia de cada tipus.

NOTA: *Sabem que un kart té 4 rodes, un tricicle té 3 rodes i que una bicicleta té 2 rodes.*

6. SUDOKU MATEMÀTIC

Ompli cada casella amb nombres de l'1 al 5 amb les següents condicions:

- Cada nombre ha d'aparèixer en cada columna i en cada fila exactament una vegada.
- Has de ficar els nombres de cada casella de manera que, si consideres els blocs formats per una vora més grossa, han de complir l'operació que s'indica en el cantó superior esquerre, i el resultat d'eixa operació ha de ser el que s'indica en el mateix cantó. (Per exemple, $5 - 2 = 3$).

3 - **5**	**2**	1 -		3 -
7 +	4 -		15 x	
	2 -			2
	2 :			15 x
2 -		2 :		

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE VELOCITAT

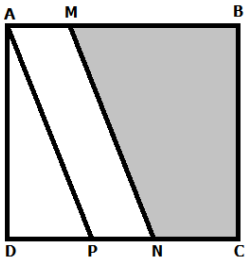
1. LES XIFRES

Les xifres d'un nombre de dos dígits s'intercanvien per a formar un altre nombre de dos dígits. La diferència entre el nombre inicial i el final és 45. Trobeu el major nombre que complisca estes condicions.

2. GATS I RATOLINS

Si 5 gats cacen cinc ratolins en cinc minuts, quant tardaran cent gats en caçar dos-cents ratolins?

3. L'ÀREA DEL QUADRAT



Un quadrat $ABCD$, de 5 cm de costat, té $\overline{AM} = 10$ mm i $\overline{CN} = 15$ mm.

S'uneix M amb N, i per A es traça la paral·lela $\overline{AP}$ amb el segment $\overline{MN}$.

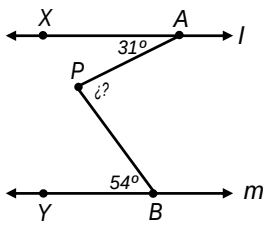
Calculeu l'àrea ombrejada de la figura.

4. LA TROBADA DELS DISSABTES

Joan i Ana són amics que viuen a 63 km de distància. De vegades, els dissabtes, els dos van en bicicleta cap a la casa de l'altre per a trobar-se en el camí. Un dia ixen de les seues cases a les 8:00 i es troben a les 11:00. Sabem que Joan va a 12,5 km/h. A quina velocitat va Ana?

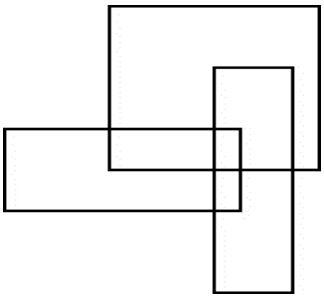
5. L'ANGLE DEL MIG

En la següent figura les rectes l i m son paral·leles. Sabent que l'angle $\widehat{PAX}$ és de 31° i que l'angle $\widehat{PBY}$ és de 54°, quant mesura l'angle del mig $\widehat{APB}$?

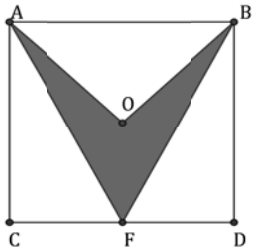


6. QUANTS RECTANGLES HI HA?

En la següent figura trobeu tots els rectangles que hi ha.



7. EL QUADRAT



Donat el quadrat $ABCD$ de costat 20 cm, calculeu l'àrea de la figura ombrejada, sent O el centre del quadrat.

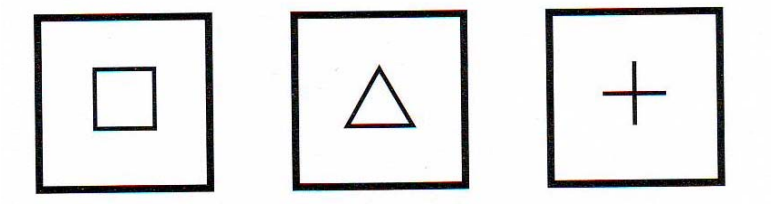
8. PER FAVOR, CONTINUEU...

Seguiu aquesta sèrie de nombres amb un element més. Raoneu la vostra resposta.

$$4 \quad 9 \quad 19 \quad 39 \quad \ldots$$

9. SÈRIE DE SÍMBOLS

Com podria continuar aquesta sèrie? Raoneu la vostra resposta.



10. XIFRES I LLETRES

Trobeu els nombres enters A i B, sabent que $A7$ és un altre nombre enter de dues xifres.

$$\boldsymbol{A^B + B^A = A7}$$

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. EL POLIESPORTIU

Al poliesportiu Pla de l'Arc, on hem dinat, hi ha tres camps de bàsquet. Aneu al camp central.

a. Quant mesura la longitud de la circumferència del mig de la pista de bàsquet?

b. Volem pintar l'interior complet de la circumferència. Sabem que la pintura costa 7€ el litre i amb un litre sabem que pintem 10 m^2. Quant ens costarà pintar tot l'interior de la circumferència si volem donar-li dues passades de pintura?

NOTA: El metre no mesura circumferències.

ESTACIÓ 2. ELS TOBOGANS

Junt al poliesportiu on hem dinat, prop de l'IES Laurona i enfront de l'ambulatori, hi ha un parc amb dos tobogans.

Calculeu, fent un dibuix a escala 3 cm : 1 m del triangle que formen els tobogans amb el suport vertical i el terra, l'angle d'inclinació de cadascun dels tobogans respecte del sòl.

ESTACIÓ 3. EL TEST

Aneu als encreuaments de l'avinguda dels Furs i el carrer Manuel López Varela. Observeu que hi ha un suport per a testos que té forma de cilindre.

a. Si volem omplir el test de terra, quina quantitat de terra necessitem? Doneu el resultat en cm^3.

b. Quina quantitat de ferro, en m^2, necessitem per fer un suport per a testos semblant? Volem fer només el lateral del suport, sense les bases.

ESTACIÓ 4. LA PLAÇA I EL PARC

Continueu l'avinguda dels Furs fins arribar al pati amb el número 6. Observareu que enfront teniu una plaça on hi ha, entre altres coses, una font i tres pistes de petanca. Aneu a les pistes de petanca.

a. L'Ajuntament de Llíria ha decidit llevar les pistes de petanca i plantar tarongers. Sabent que un taronger ocupa un metre quadrat, quin serà el nombre mínim de tarongers que haurà de comprar l'ajuntament per omplir les tres pistes de petanca?

b. Al costat de la plaça hi ha un parc, que s'anomena el parc de la "Bombilla". Entreu dins. En el parc, hi ha un llac amb tres ponts. Aneu al pont més gran que té forma curvilínia. Calculeu la longitud, en hm, de tots els barrots redons de colors blancs i verds que formen la barana si els ficàrem un damunt de l'altre, sense comptar els barrots paral·lels al terra.



ESTACIÓ 5. ELS TAULELLS

La següent prova té lloc a la plaça de les Termes Romanes. Observeu que hi ha un passeig rectangular amb bancs i un parc amb engronsadores. El passeig està format amb taulells de color groc i gris.

Calculeu la fracció i el percentatge de taulells grocs que hi ha respecte del total. Feu el mateix però amb els taulells grisos.

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. ANIVERSARI DOBLE

Avui és el meu aniversari i també el de la meua neboda. Troba les nostres edats sabent que l'invers de la seua edat més l'invers de la meua edat és igual a un sèptim.

2. LA SEGA DE L'ARRÒS A LA RIBERA BAIXA

Una colla d'agricultors va rebre l'encàrrec de segar dos camps d'arròs, un dels quals tenia el doble de superfície que l'altre. Durant mig dia treballà tota la colla al camp gran. Després de dinar, la meitat de la colla va quedar en el camp gran i l'altra meitat en el menut. Quan va acabar la jornada únicament faltava per segar un tros del camp menut, que va ser acabat per un agricultor treballant durant tot el dia següent.

Suposant que tots els agricultors treballen al mateix ritme, quants agricultors formaven la colla?



3. EL LLIBRE D'AVENTURES

El llibre de les quasi mil pàgines té exactament 999 pàgines numerades i narra en cada pàgina les aventures i desventures de cadascun dels números de l'1 al 999. Quantes d'aquestes pàgines tenen totes les seues xifres diferents?

4. COMPANYES DE PIS

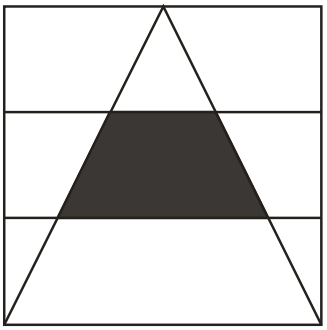
Quatre estudiants comparteixen un pis. En aquesta vesprada observem que una està fent xat, una altra resolent problemes de matemàtiques, una altra escoltant música i l'última, llegint.

1. Míriam no està fent xat ni llegint.
2. Isabel no està escoltant música ni fent xat.
3. Si Míriam no està escoltant música, Mònica no està fent xat.
4. M. Carme no està llegint i no està fent xat.
5. Mònica no està llegint i no està escoltant música.

Què fa cada estudiant?

5. EN EL QUADRAT

Calcula l'àrea de la zona fosca, si se sap que el costat del quadrat mesura 3 m, el triangle interior és isòsceles i dos dels costats estan dividits en 3 parts iguals.



6. LA XIFRA INCÒGNITA

Multipliquem un nombre de 200 xifres per 7. El resultat és un nombre que està format en la seua totalitat per xifres 9, excepte l'última xifra (la corresponent a les unitats).

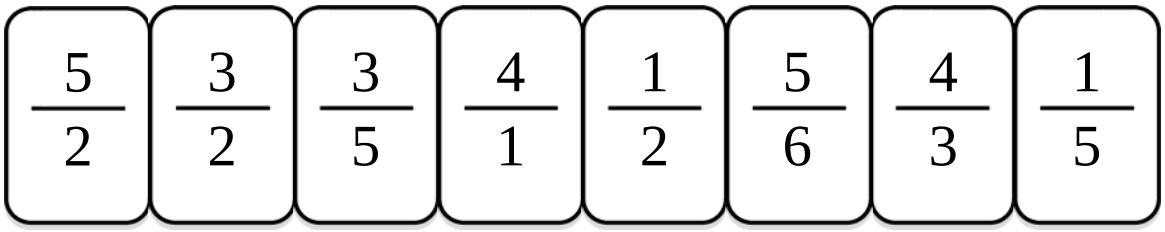
Series capaç de descobrir quina és l'última xifra d'aquest producte?

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE VELOCITAT

1. EL DÒMINO

Col·loqueu aquestes 8 fitxes de dòmino de manera que construïu un quadrat de 4 × 4 nombres tal que el producte dels nombres que formen cada fila i cada columna done sempre el mateix.



2. LA CARRERA

Vicent i Sílvia tenen un nou propòsit: preparar-se la volta a peu del seu poble. La carrera consta de 5.000 metres. En el primer entrenament Vicent ha guanyat a Sílvia per 25 metres. En el segon entrenament Vicent decideix endarrerir-se 25 metres de la línia d'eixida. En aquest cas, guanyaria Sílvia o Vicent?

NOTA: Suposem que tots dos corren amb la mateixa velocitat en els dos entrenaments.

3. BOTANT, BOTANT

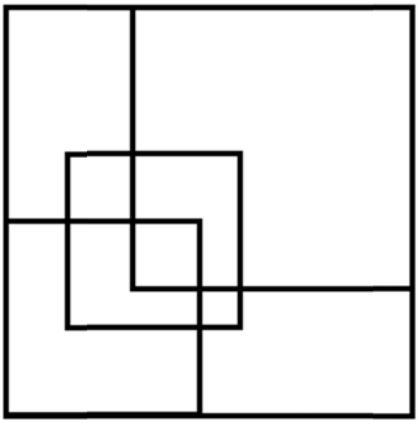
Àlex és un xiquet molt maniàtic i té una manera molt peculiar de pujar i baixar les escales de la seua casa.

De dilluns a dissabte baixa les escales de tres en tres i les puja de dos en dos. Els diumenges les baixa de cinc en cinc i també les puja de cinc en cinc.

Si el nombre de bots sempre està entre 1 i 20, quants esglaons té la seua escala? I quants bots fa en una setmana?

4. QUADRATS

Quants quadrats hi ha en la imatge?



5. L'EDAT DELS IAIOS

La mitjana de les edats de Memo, Estela i els seus 7 néts és de 28 anys. La mitjana de les edats dels 7 néts únicament és de 15 anys. Sabent que Memo és 3 anys major que Estela, quants anys té Memo?

6. NOTA D'EXAMEN

En un examen de matemàtiques que tenia 10 preguntes es donaven 5 punts per cada resposta correcta i es restaven 3 punts per cada errada. Tots els alumnes van respondre totes les preguntes.

Si Ramón va obtindre 34 punts, Miguel va obtindre 10 punts i Adrià va obtindre 2 punts, quantes respostes correctes van tindre entre els tres?

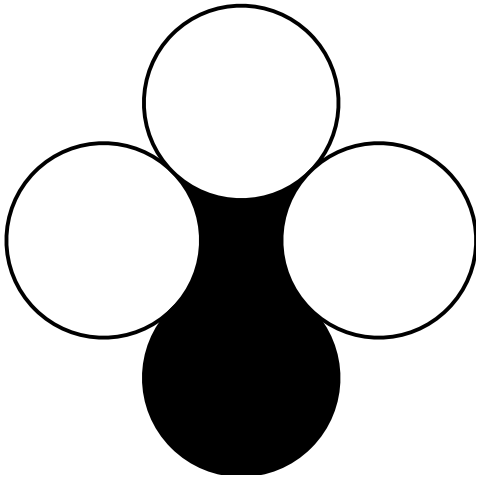
7. TAULELLS

Un pis quadrat està cobert per taulells quadrats congruents entre si (no deixen cap espai entre ells). Els taulells de les dues diagonals del pis són negres. Els taulells restants són blancs.

Si n'hi ha 101 taulells negres, quin és el nombre de taulells blancs?

8. EL PITXER MATEMÀTIC

En la següent figura, la part fosca indica la secció transversal d'un pitxer. Si el radi de cadascuna d'aquestes circumferències és 5 cm, sabríeu calcular l'àrea d'aquesta zona?



9. LA PALMERA

Després d'una aparatosa tempesta, una palmera de 12 metres d'altura s'ha partit en dos trossos de tal manera que el seu extrem superior es recolza sobre el sòl a una distància de 4 metres de la base.

A quina altura es va trencar la palmera?

10. SUMA CURIOSA

Trobeu els valors de les xifres A, B, i C, totes elles diferents entre si, per tal que:

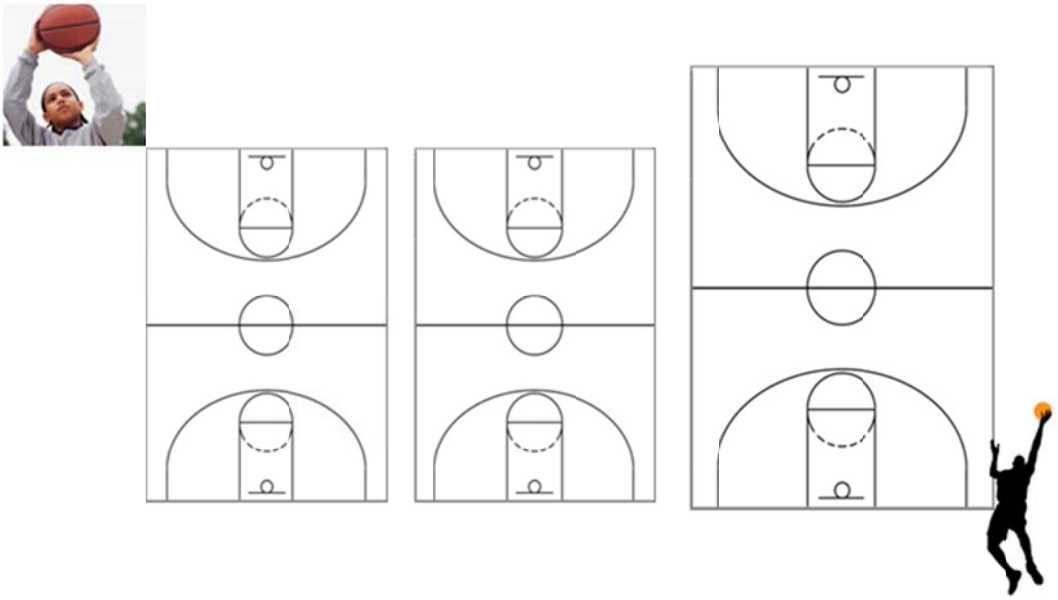
$$\begin{array}{rr} & A\,B\,C \\ & A\,B\,C \\ + & A\,B\,C \\ \hline & B\,B\,B \end{array}$$

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. UN LLANÇAMENT TEMERARI

Pere es troba al pati del Pavelló del Pla de l'Arc fent exercici en un lloc on hi ha 2 camps de minibàsquet i un de bàsquet, com es pot veure a la següent figura:



Pere se situa en un cantó del primer camp de minibàsquet i, com que és molt fort, vol llançar un baló de forma que arribe a un company que està en el cantó oposat del camp de bàsquet.

Per ajudar-lo a estimar la força que cal fer per llançar el baló, calcula quina distància en línia recta ha de recórrer el baló.

NOTA: Aproxima tant les mesures com el resultat als decímetres.

ESTACIÓ 2. LA CASETA DEL GRONXADOR I EL FANAL

Pere es troba al pati del Pavelló del Pla de l'Arc i ix al parc d'enfront. Observa un fanal i la caseta d'un gronxador de 2,65 m d'alçada. Podríeu ajudar a Pere a trobar l'altura del fanal?

ESTACIÓ 3. L'APOSTA PER LA PORTA

Pere es troba amb Joan, un amic seu, en l'Avinguda dels Furs i es detenen en el pati d'un edifici perquè hi ha una porta molt especial.

Pere li diu a Joan: "Em jugue una paella que la raó entre l'àrea envidrada i l'àrea de marc blanc és superior a 1."

Amics, qui guanyarà l'aposta? Raoneu-ho, sabent que l'altura de la porta és 278 cm.

ESTACIÓ 4. LA GESPA EN L'ILLA AL PARC DE LA BOMBILLA

Molt satisfet pel vostre treball, Pere continua caminant per l'avinguda dels Furs i es para al parc de la Bombilla. Sense adonar-se del camí, arriba a l'illa central, envoltada per un llac. Hi ha un jardiner tallant la gespa.

Col·laboreu amb Pere a calcular l'àrea de gespa que hi ha en aquesta illa. Preneu les mesures arrodonint als decímetres.

ESTACIÓ 5. MÉS LLARG - MÉS CURT

Pere es troba al parc de les termes romanes en Llíria. Allí veu sis fanals alineats en dues files. Com que enguany ha aprés moltes matemàtiques se li ocorre un repte matemàtic amb els fanals. El repte és el següent:

Si tinguera una corda i passant només una vegada per cada fanal, quina serà la distància més CURTA de corda i la distancia més LLARGA de corda que passaria per totes les faroles. (Amb la corda tensa, és a dir, sols utilitzant línies rectes entre fanal i fanal).

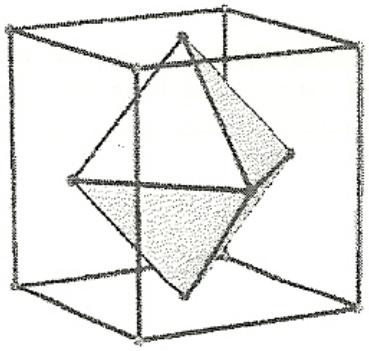
NOTA: Al mesurar distàncies entre fanals arrodoneix a un nombre enter de rajoles. Per una altra banda arrodoneix sempre en els càlculs als decímetres.

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

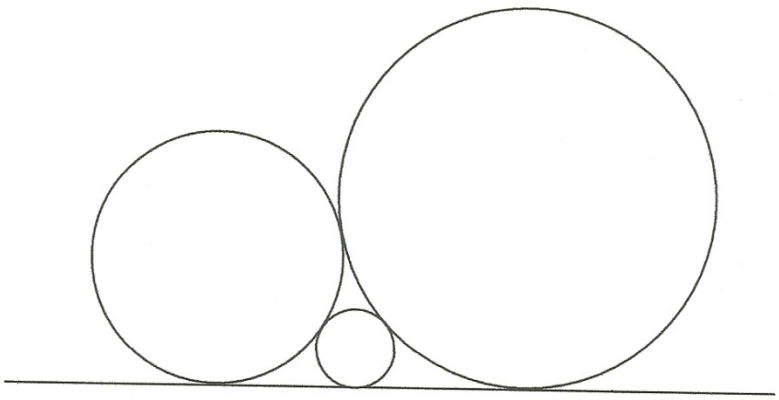
1. OCTAEDRE DUAL

Determineu la proporció entre el volum d'un cub i el del seu octaedre dual (dual és l'octaedre que té per vèrtexs els centres de les cares del cub).



2. CERCLES TANGENTS

Dues circumferències, de radi 2 cm i 3 cm, respectivament, són tangents entre si, i tangents a una línia. Calcula el radi d'una tercera circumferència, més menuda, que és tangent a les altres dues i a la línia, com es mostra al dibuix.



3. SUMEN 2

Quants nombres enters hi ha compresos entre 1 i 10^{2013}, tals que la suma de les seues xifres siga 2?

4. TRIANGLES A L'INFINIT

Partint d'un triangle equilàter d'àrea 1 cm^2, afegim, als vèrtexs, triangles de costat la meitat dels anteriors, seguint el procés com es mostra a les figures.

Quina és la suma de les àrees dels infinits triangles que hi haurà a l'última figura si continuem el procés indefinidament?

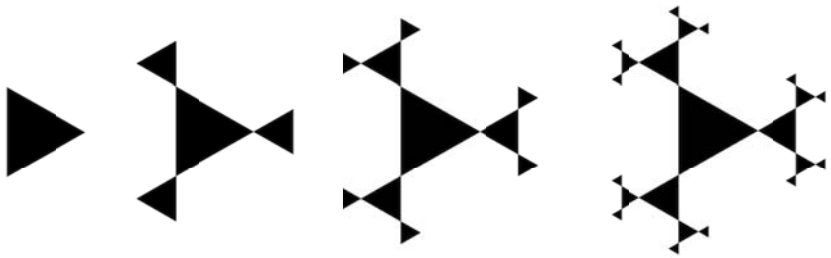


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

5. PRODUCTE DE NATURALS

Vicent vol multiplicar un nombre A de tres xifres per un nombre B de dues xifres. A l'hora de multiplicar, intercanvia els dígits de B, i obté com a resultat un nombre 2.034 unitats major.

a. Quin és el nombre A, si B té els dígits consecutius?

b. Quin és el nombre A, si B no té els dígits consecutius?

6. LLISTA NATURAL

Una llista de 5 nombres naturals té totes les propietats següents:

- l'únic natural en la llista que apareix més d'una vegada és 8;
- la seua mediana és 9;
- la seua mitjana és 10.

Quin és el natural més gran possible que pot aparèixer en la llista?

NOTA: La mediana d'un conjunt de cinc nombres naturals és el natural que queda en mig quan el conjunt s'ordena en ordre creixent.

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE VELOCITAT

1. SUMA ANGLESA

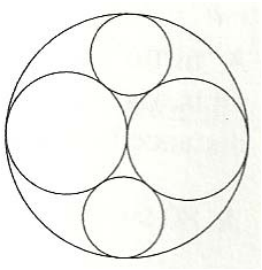
Cada lletra correspon a un únic dígit, però si una lletra apareix més d'una vegada, aleshores sempre correspon al mateix dígit.

Quin dígit correspon a la lletra H?

$$\begin{array}{cccccc} & S & I & X & T & H \\ + & & F & O & R & M \\ \hline & M & A & T & H & S \end{array}$$

2. PASTISSOS

Partint d'un gran pastís circular, he tallat amb un ganivet quatre cercles de pastís per tal de tindre les bases i els pisos de dos pastissos més xicotets, tal com mostra la figura.



Quina fracció del pastís roman sense usar-se?

3. UN CAMÍ NATURAL

Escrivim, tots seguits, els nombres naturals, de la següent forma:

12345678910111213...

Fixem-nos que el primer bloc de tres xifres iguals apareix en la juxtaposició de l'11 i el 12 (111).

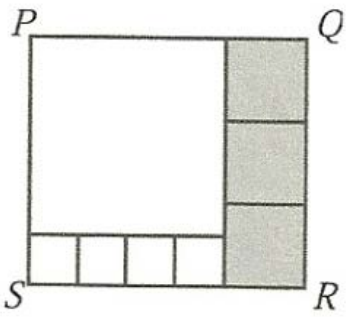
a. On apareix, per primera vegada, un bloc format per exactament quatre xifres iguals?

b. On apareix, per primera vegada, un bloc format per tres xifres iguals seguides d'altres tres xifres iguals? (És a dir, del tipus $AAABBB$).

4. QUADRATS

El rectangle $PQRS$ està dividit en huit quadrats, com mostra la figura. La longitud del costat de cada quadrat ombrejat és 10 cm.

Quina és la longitud del costat del quadrat més gran?



5. TANTS RECORDS

Tres matrimonis estaven de viatge i anaren a comprar uns records. Cadascuna d'aquestes sis persones només trià un objecte, però comprà tants exemplars d'eixe objecte com euros costava. Al final, cada marit va gastar 63 euros més que la seua esposa.

Si Joan comprà 23 objectes més que Catalina i Dídac 11 més que Mireia, respon:

a. Quants en va comprar Pere?

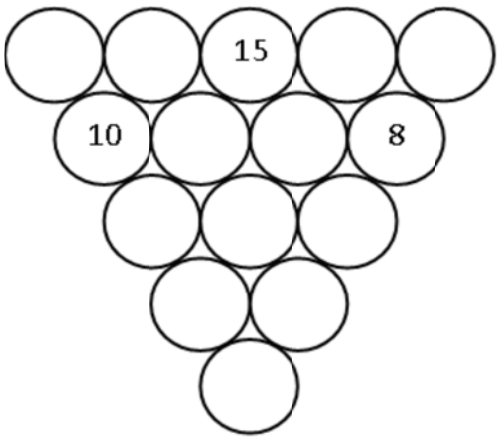
b. Quants en va comprar Sònia?

c. Com estan formades les parelles?

6. TRIANGLE DE BILLAR

Un triangle de diferències absolutes és un triangle on baix de cada parella de nombres es troba la seua diferència en valor absolut.

Amb les boles de billar, numerades de l'1 al 15, formeu un triangle de diferències absolutes.

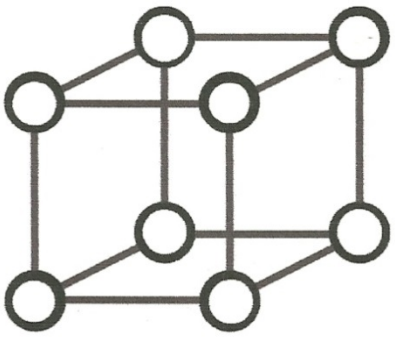


7. MÚLTIPLES CONSECUTIUS

Trobeu dos nombres consecutius múltiples de 30 i 29 respectivament, que no siguen 30 i 29.

8. CUB AMB NOMBRES

Cal situar les xifres de l'1 al 8 sense repetir-ne cap en els vèrtexs d'un cub de manera que totes les seues cares sumen el mateix. Com ho faríeu?



9. TRIANGLE TRES HUITENS

Un triangle isòsceles inscrit en un quadrat de 10×10 cm té un vèrtex que coincideix amb un altre vèrtex del quadrat.

Com el construiríeu si volem que l'àrea siga 3/8 del quadrat?

10. DONANT LA VOLTA

Siga AB un nombre de dos dígits. Trobeu totes les possibilitats de A i B que compleixen:

$$\frac{AB}{BA} = \frac{7}{4}$$

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. L'ESCALA I LES RECTES

Al poliesportiu on hem dinat hi ha un camp de bàsquet. Per a il·luminar la pista hi ha un fanal al mateix centre, que té a la part superior tres focus. Els volem canviar per un únic focus de major potència que li done llum a tota la pista.

a. El focus situat dalt del fanal s'ha d'inclinar un cert angle respecte de la vertical per tal que enfoque directament a la pista. Determineu quin ha de ser eixe angle. Demaneu al professor responsable un clinòmetre si necessiteu estimar algun angle.

b. El focus envia la llum en línia recta cap a la pista, i com volem que sols enfoque la pista delimitada per les línies grogues, el feix de raigs de llum ha de tenir com a màxim una determinada apertura. Determineu l'angle màxim que ha de tindre eixe feix de rectes per tal que s'il·lumine tota la pista des de la cistella esquerra a la dreta.

ESTACIÓ 2. LES ESCALES DEL PAVELLÓ

Des del camp de bàsquet aneu cap al pavelló cobert i pegueu-li la volta. Trobareu unes escales que donen accés al pavelló. Observeu que cada escala és doble, pel que en realitat tenim 4 escales: 1, 2, 3 i 4. Cadascun de vosaltres podeu utilitzar una de les quatre escales per pujar o baixar.

a. Per pujar per una escala de manera ordenada una solució pot ser: Joan, Vicent, Ana i Mireia. O bé Ana, Joan, Vicent i Mireia. Calculeu totes les maneres possibles que teniu els quatre membres de l'equip per pujar dalt del pavelló per una qualsevol de les escales.

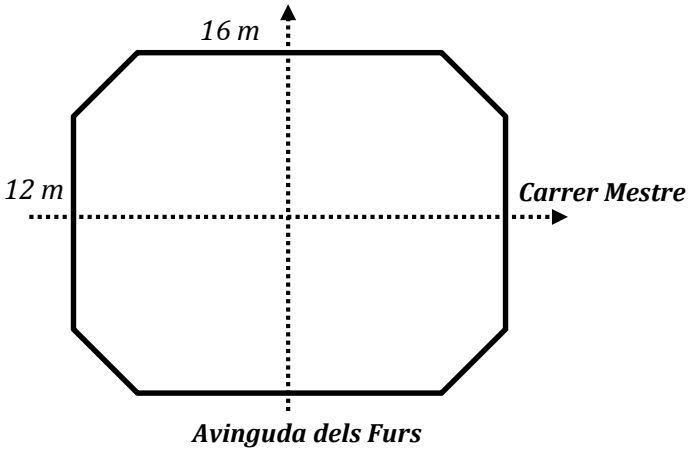
b. Una volta estigueu els quatre dalt, cadascun de vosaltres escull a l'atzar una de les escales: per exemple, Joan baixa per l'escala 1, Vicent per la 2, Ana i Mireia per la 3 i ningú per la 4; o bé Joan baixa per la 3, Vicent i Ana per la 2, Mireia per la 4 i ningú per la 3. Indiqueu de quantes maneres possibles podeu baixar.

c. Si escolliu a l'atzar l'escala per a baixar, quina és la probabilitat que baixeu els quatre per la mateixa escala?

ESTACIÓ 3. OCTÒGONS A L'AVINGUDA DELS FURS

Sortint del poliesportiu del Pla de l'Arc creuem el carrer "Pla de l'Arc" pel pas de vianants, entrem al carrer del Farmacèutic J. Marqués Gil, i girem pel primer carrer a l'esquerra, que és l'avinguda dels Furs.

Seguim per l'avinguda dels Furs fins a l'encreuament amb el carrer Mestre Serrano. Observeu que la intersecció dels dos carrers té forma octogonal, i tenim mesurades algunes dimensions d'eixe octògon:



Determineu la superfície que ocupa l'espai octogonal d'intersecció entre els dos carrers suposant que l'octògon té els costats oposats amb la mateixa longitud.

ESTACIÓ 4. PARC DE LA BOMBILLA

Si seguim per l'avinguda dels Furs arribarem a un parc nomenat Parc de la Bombilla. Observeu la curiosa font en la qual hi ha tres basses en forma de trapezi.

Suposem que la profunditat de les tres basses és de 16 centímetres. Hi ha un sortidor que vessa l'aigua a la bassa superior a una velocitat d'1,5 litres per segon. Si inicialment les tres basses estan buides, calculeu el temps que tardaran a omplir-se les 3 basses.

ESTACIÓ 5. PLAÇA DE LES TERMES ROMANES

A continuació cal seguir per l'avinguda dels Furs, arribeu fins al cantó de Mercadona i gireu a l'esquerra. Cal creuar el carrer Pla de l'Arc pel semàfor, i deixant a la dreta el Col·legi Francisco Llopis, entreu a la plaça de les Termes Romanes.

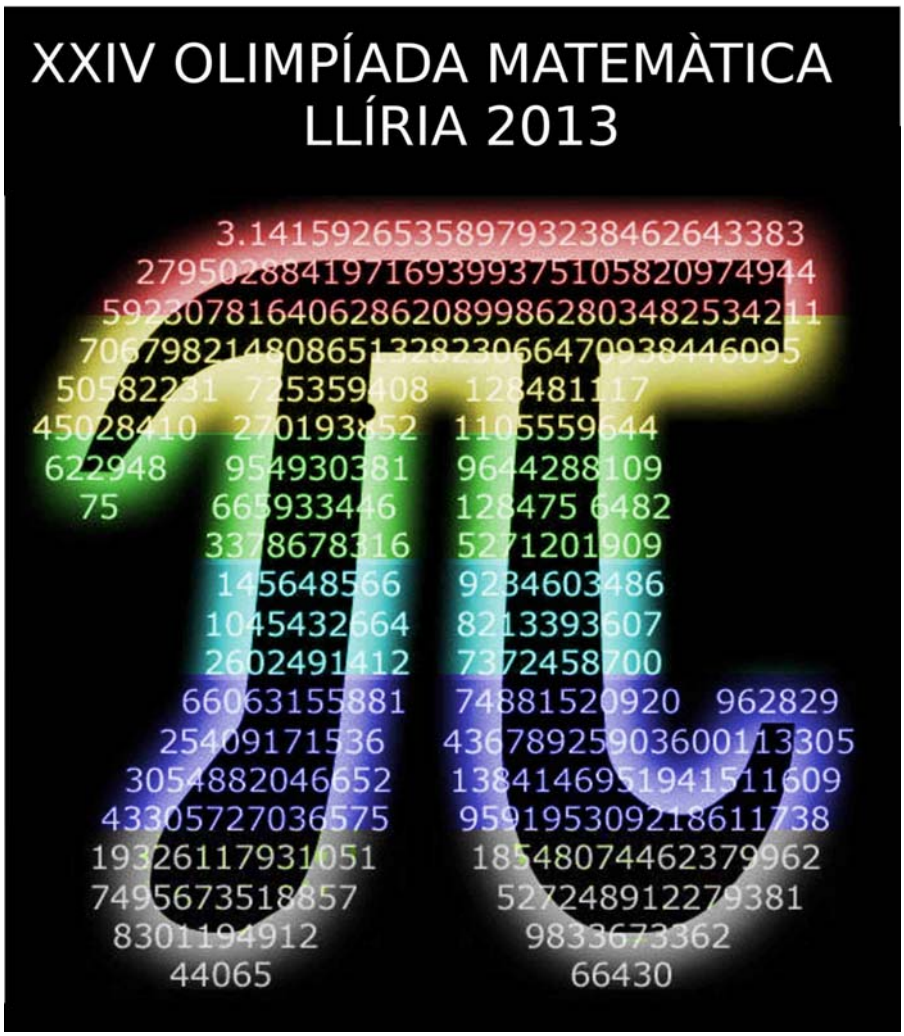
a. Observeu que només entrar pel camí de Mura, observareu les runes de les antigues Termes Romanes, i baixant cap a la plaça hi ha tres rampes que suaument us permeten anar baixant.

   Determineu el pendent de la rampa del centre.

b. Quan arribeu a la Plaça de les Termes Romanes observareu unes circumferències concèntriques al terra. Determineu la superfície que ocupa la corona circular situada entre la circumferència més interior i la que envolta per fora. Observeu les línies dibuixades a la foto.



SOLUCIONS



XXIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE PROVINCIAL
PROVÍNCIA DE VALÈNCIA

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. ENIGMA NUMÈRIC

Solució: U=3, N=2, O=4, D=6, S=8, A=9 i B=7.

De les condicions inicials del problema podem deduir que:

- S és parell distint de zero, per tant S = 2, 4, 6, 8.
- $O + O$ no pot sumar més de 8 perquè si fóra 10 o més no podria aparèixer la O en la segona xifra del resultat de la primera operació. Per tant O = 1, 2, 3, 4.
- U només pot ser 1,2,3,4 perquè si fora major $U + U$ seria 10 o més.
- $U + D$ és 9 com a màxim, per tant D serà com a màxim $9 - U$.
- Com que $U + U + U$ és com a molt 9, U = 1, 2, 3.

Si comencem a provar donant valors a U podem fer un arbre de valors possibles i així desestimem aquells que no puguen ser.

Comencem provant amb valors de O i de S i comprovem si arribem a una solució coherent:

- $O = 1 \rightarrow S = 2 \rightarrow$ No pot ser perquè $N + N$ no podria mai sumar 1.
- $O = 2 \rightarrow S = 4 \rightarrow N = 6 \rightarrow U = 1, 3$.
    - Si $U = 1 \rightarrow D = 3 \rightarrow$ no val perquè no es compleix la segona suma.
    - Si $U = 3 \rightarrow D = 7 \rightarrow$ no val perquè no es compleix la segona suma.
- $O = 3 \rightarrow$ No pot ser perquè $N + N$ seria parell i per tant no pot acabar en 3.
- $O = 4 \rightarrow S = 8 \rightarrow N = 2 \rightarrow U = 1, 3$
    - Si $U = 1 \rightarrow D = 2 \rightarrow$ no val perquè ja tenim $N = 2$.
    - Si $U = 3 \rightarrow D = 6 \rightarrow$ COMPLEIX TOTES LES CONDICIONS.

Per tant la solució és:

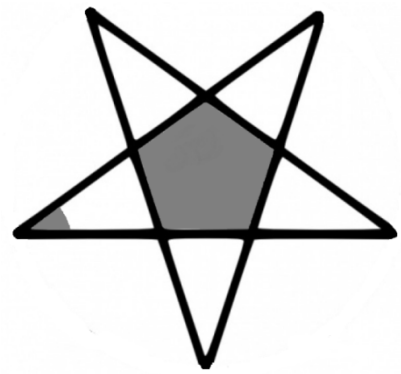
$$\begin{array}{rccc} & 3 & 2 & 4 \\ + & 3 & 2 & 4 \\ \hline & 6 & 4 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 6 & 4 & 8 \\ + & 3 & 2 & 4 \\ \hline & 9 & 7 & 2 \end{array}$$

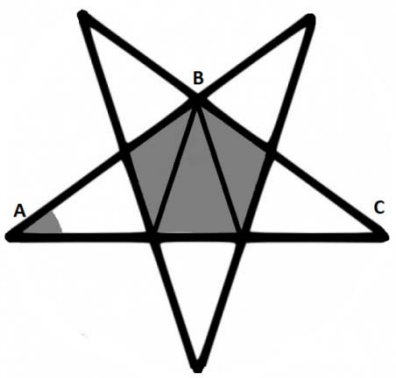
2. L'ANGLE DE L'ESTRELLA

Solució: L'angle demanat mesura 36º.

Hi ha diverses formes de resoldre-ho. Anomenem β l'angle demanat.

Mètode 1: L'estrella determina en el seu interior un pentàgon regular.





Si podem trobar quin és l'angle interior d'un pentàgon és fàcil. Si dividim el pentàgon en tres triangles, com que la suma dels angles interiors d'un triangle és 180° tenim que,

$$\sum \alpha = 180° \cdot 3, \text{ sent } \alpha \text{ l'angle interior del pentàgon.}$$

Per tant, l'angle interior del pentàgon $\alpha = 180 \cdot 3 : 5 = 108°$.

Amb aquesta informació, com que al triangle ABC hi ha dos angles com el que volem i l'altre és de 108° (el que acabem de trobar), es pot deduir que:

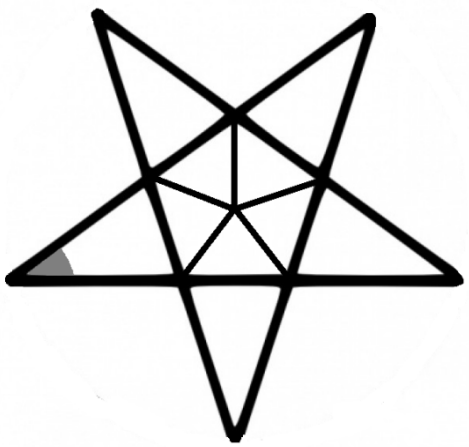
$$\beta = (180 - 108) : 2 = 72 : 2 = 36°$$

Mètode 2: Una altra forma és la següent:

Dividim el pentàgon en 5 triangles isòsceles iguals. Amb açò és fàcil veure que l'angle desigual dels triangles isòsceles és $360° : 5 = 72°$. Com que els altres dos angles són iguals, és fàcil deduir que:

$$\gamma = (180 - 72\ ) : 2 = 108 : 2 = 54°$$

Com que dos angles γ formen un angle interior del pentàgon trobem que l'angle interior del pentàgon medix 108°. Amb això continuem com abans.



3. L'ESCALA PIRAMIDAL

Solució: a) 40 cubs b) 240 cubs

a) Es pot veure que, com que és simètric, si calculem els cubs necessaris en un costat i multipliquem per dos podem obtindre el resultat total. Un costat té, començant des de dalt, 1 cub al primer pis, 3 cubs al segon, 6 cubs al tercer i 10 cubs al quart.

Per tant: $2 \cdot (1 + 3 + 6 + 10) = 40$ cubs.

b) Si tinguérem el doble d'alçària hauríem d'afegir quatre pisos més, cada pis amb 15, 21, 28 i 36 cubs respectivament. Per tant, $15 + 21 + 28 + 36 = 100$ cubs per cada banda. El nombre final de cubs serà:

$2 \cdot (1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36) = 2 \cdot 120 = 240$ cubs.

4. M'HE OBLIDAT DE CARREGAR EL MÒBIL

Solució: a) L'MP3 93% i el mòbil 92%; b) El mòbil serà el primer a estar carregat ja que tardarà 1 hora, 6 minuts i 40 segons.

a) L'MP3 tindrà, en una hora, una càrrega de:

$$c_{mp3} = 48 + (60 : 16) \cdot 12 = 48 + 45 = 93\%$$

El mòbil carrega un 12% de la bateria en 10 minuts. Com que inicia amb 20% tindrem:

$$c_{mòbil} = 20 + (60 : 10) \cdot 12 = 92\%$$

b) L'MP3 es carrega 12 punts percentuals cada 16 minuts per tant, calculem quants grups de 12 punts percentuals ens fan falta:

$$(100 - 48) : 12 = 4 \text{ , amb un residu de 4.}$$

Per tant, tardarà $4 \cdot 16$ minuts + $(4 : 12) \cdot 16 = 1$ hora 9 minuts i 20 segons.

Al mòbil li falten 80 punts percentuals. Com que carrega 12 punts percentuals cada 10 minuts i tenim que 80 : 12 = 6 i residu 8 necessitarem $6 \cdot 10 = 60$ minuts i a més ens faltarà 8 punts percentuals.

$$(8 : 12) \cdot 10 \cdot 60 = 400 \text{ segons, que són 6 minuts i 40 segons.}$$

El mòbil tardarà a estar completament carregat 1 hora 6 minuts i 40 segons. Serà, aleshores, el primer a estar completament carregat.

5. MASSA RODES

Solució: Hi ha 6 bicicletes, 8 tricicles i 12 karts.

Sabem que:

- Un kart té 4 rodes.
- Un tricicle té 3 rodes.
- Una bicicleta té 2 rodes.

Ens diuen que hi ha el doble de karts que de bicicletes. Amb això podem deduir que per cada 2 rodes de bicicleta hi haurà 8 rodes de kart.

Per una altra banda, sabem que per cada 2 rodes de bicicleta hi haurà 3 de tricicle més 6 rodes perquè hi ha dos tricicles més que bicicletes.

Si llevem els dos tricicles de més tenim $84 - 6$ rodes a repartir entre les 2 rodes de cada bicicleta, les 8 rodes dels 2 karts que hi ha per cada bicicleta i les 3 rodes que corresponen a un tricicle per cada bicicleta.

Per trobar el nombre de bicicletes podem fer la següent operació:

$$(84 - 6): (2 + 8 + 3) \rightarrow 78 : 13 = 6 \text{ bicicletes.}$$

Per tant hi haurà 12 karts i 8 tricicles.

$$6 \cdot 2 + 12 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 12 + 48 + 24 = 84 \text{ rodes.}$$

6. SUDOKU MATEMÀTIC

Solució:

3 - 5	2	1 - 3	4	3 - 1
7 + 2	4 - 5	1	15 x 3	4
4	2 - 3	5	1	2 2
1	2 : 4	2	5	15 x 3
2 - 3	1	2 : 4	2	5

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE VELOCITAT

1. LES XIFRES

Solució: El major nombre és el 94.

El problema, en aquest nivell, es pot resoldre per tempteig. Nosaltres proporcionem a continuació la solució analítica.

El dos nombres demanats han de ser de la forma ab i ba, i han de complir:

$$\begin{array}{rcc} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ - & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \\ \hline & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{5} \end{array}$$

Aleshores en notació decimal tenim:

$$(10a + b) - (10b + a) = 10(a - b) - (a - b) = 9(a - b) = 45$$

Per tant, $a - b = 5$; $a = 5 + b$; $\boldsymbol{b = 4}$ i $\boldsymbol{a = 9}$.

El major nombre possible és: **94.**

2. GATS I RATOLINS

Solució: Tardaran 10 minuts.

Cada gat caça un ratolí en cinc minuts. Com tenim cent gats caçant a la vegada, tardaran cinc minuts en caçar 100 ratolins i altres 5 minuts en caçar els altres 100. En total, 10 minuts.

3. L'ÀREA DEL QUADRAT

Solució: L'àrea de la zona ombrejada és 1.375 mm².

Anem a resoldre el problema de dues maneres:

a) Suposem que sabem la fórmula per al càlcul de l'àrea d'un trapezi.

Efectivament, la zona ombrejada és un trapezi rectangle. Per calcular l'àrea d'un trapezi rectangle fem:

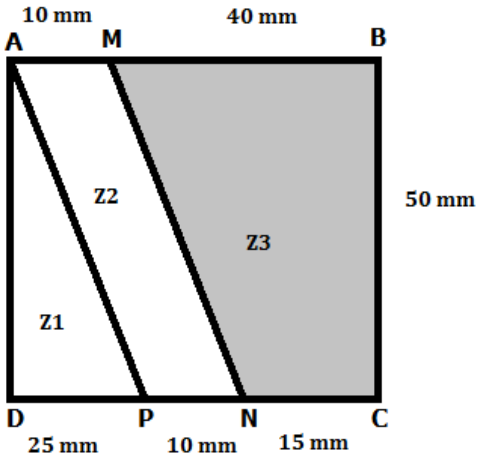
$$A_{trapezi} = \frac{b + b'}{2} \cdot h$$

Coneixem la base $\overline{CN} = 15$ mm i podem trobar la mesura de la base superior, ja que el costat del quadrat medix 5 cm (50 mm) i el segment $\overline{AM} = 10$ mm. Per tant:

$$MB = 50 - 10 = 40 \text{ mm}$$

Ara ja podem calcular l'àrea demanada:

$$A_{trapezi} = \frac{40 + 15}{2} \cdot 50 = 1375 \text{ mm}^2$$



b) Suposem que no sabem la fórmula que ens permet obtindre l'àrea d'un trapezi.

Anomenem les zones en què queda dividit el quadrat com Z_1, Z_2, Z_3. Z_1 és el triangle ADP, Z_2 és el paral·lelogram $AMPN$ i Z_3 és el quadrilàter $MBNC$.

Per calcular l'àrea que ens demanen, és a dir, la de Z_3, calcularem l'àrea del quadrat i li restarem la suma de l'àrea de les altres dues zones, Z_1 i Z_2.

Calculem primer l'àrea total del quadrat:

$$A_{quadrat} = 50 \cdot 50 = \ 2500 \text{ mm}^2.$$

Calculem ara l'àrea Z_1, és a dir, l'àrea del triangle ADP:

$$A_{Z_1} = \frac{25 \cdot 50}{2} = 625 \text{ mm}^2$$

Calculem l'àrea de Z_2, és a dir, la del paral·lelogram $AMPN$:

$$A_{Z_2} = 10 \cdot 50 = 500 \text{ mm}^2$$

Aleshores l'àrea demanada:

$$A_{Z_3} = 2500 - 625 - 500 = 1375 \text{ mm}^2$$

4. LA TROBADA DELS DISSABTES.

Solució: Ana ha fet el recorregut a 8,5 km/h.

Com que es troben a les 11:00 i han eixit a les 8:00, en total duen 3 h de camí. Aleshores Joan haurà fet 12,5 · 3 = 37,5 km i per tant Ana haurà fet la resta del camí: 63 – 37,5 = 25,2 km.

Com que els 25,5 km els ha fet en 3 hores la seua velocitat serà:

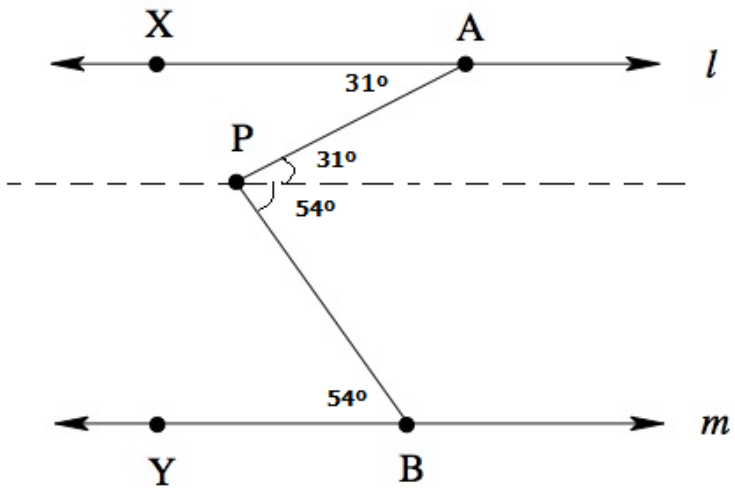
$$v_{Ana} = \frac{e}{t} = 25{,}5 : 3 = 8{,}5 \text{ km/h.}$$

5. L'ANGLE DEL MIG

***Solució: L'angle demanat mesura* 85°.**

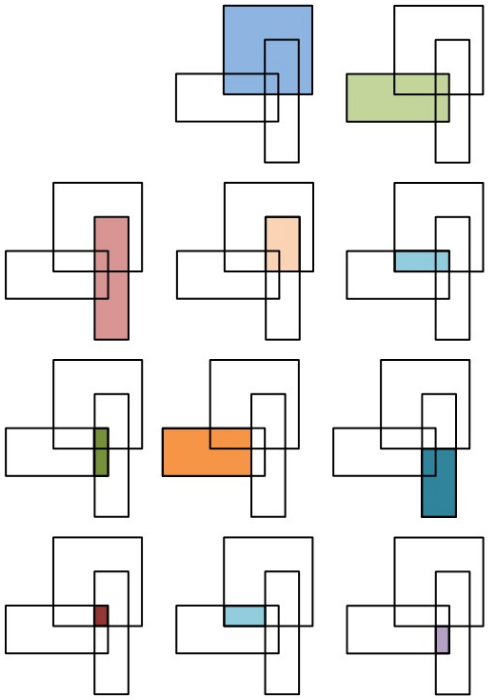
Si tracem una línia horitzontal paral·lela a l i m que creue pel punt P podem veure fàcilment que l'angle APB és la suma dels angles PAX i PBY:

$$APB = PAX + PBY = 31 + 54 = 85°$$



6. QUANTS RECTANGLES HI HA?

Solució: En total hi ha 11 rectangles.



7. EL QUADRAT

Solució: L'àrea de la zona ombrejada mesura 100 cm².

Hi ha vàries formes de resoldre l'exercici:

La zona ombrejada es pot descompondre en dos triangles iguals de base $\overline{OF} = 10\ cm$ (meitat del costat del quadrat), i l'altura també és la meitat del costat. Per tant, podem calcular l'àrea de cada triangle com:

$$A_t = 10 \cdot \frac{10}{2} = 50\ \text{cm}^2$$

Aleshores, l'àrea ombrejada serà:

$$A = 2 \cdot A_t = 50 \cdot 2 = 100\ \text{cm}^2$$

També es pot resoldre com:

Àrea ombrejada = Àrea del quadrat ABCD – Àrea del triangle ACF – Àrea del triangle BDF – Àrea del triangle AOB

$$A = A_{ABCD} - A_{ACF} - A_{BDF} - A_{AOB} =$$
$$= 400 - 100 - 100 - 100 = 100\ \text{cm}^2.$$

8. PER FAVOR, CONTINUEU...

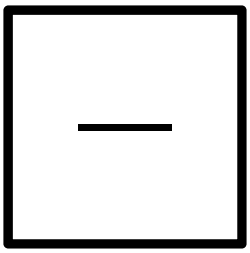
Solució: La seqüència segueix amb el nombre 79.

Per passar d'un terme a l'altre el que es fa és sumar 5, 10, 20, 40... el doble cada vegada; aleshores, el següent nombre és el 79.

Un altre raonament també és calcular el doble de cada terme més una unitat.

9. SÈRIE DE SÍMBOLS

Solució: Un sol segment dins del quadrat. Per exemple:



La primera figura té quatre segments, la segona tres segments, la tercera dos segments. Aleshores la següent figura tindrà un únic segment.

10. XIFRES I LLETRES

Solució: A=5 i B=2.

Hi ha dues combinacions de nombres la suma dels quals acaba en 7:

- $5^2 + 2^5 = 57$
- $3^2 + 2^3 = 17$

D'aquestes, l'única que compleix les condicions de l'enunciat és la primera, per tant: $A = 5, B = 2$.

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. EL POLIESPORTIU

Solució: a) La longitud és 9,42 m. b) Ens costarà 9€ i 90 cèntims.

a) Mesurem el diàmetre de la circumferència: $d = 3$ m.

El radi de la circumferència és: $r = \frac{d}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ m.

Calculem la longitud: $l = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cong 9{,}42$ m.

b) Per poder calcular el preu de la pintura, primer hem de calcular l'àrea de la circumferència: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1{,}5)^2 \cong 7{,}065$ m^2.

Calculem el nombre de litres que necessitem per a pintar la circumferència, sabent que amb un litre pintem 10 m^2:

$$V \cong \frac{7{,}065}{10} = 0{,}7065 \text{ l}$$

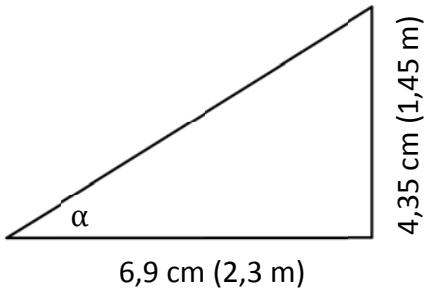
Calculem el preu. Sabem que un litre costa 7€: $Preu = 7 \cdot 0{,}7065 = 4{,}9455 \cong 4{,}95$. Per tant, 4 € i 95 cèntims.

Com pintem dues voltes ens costarà el doble: 9€ i 90 cèntims.

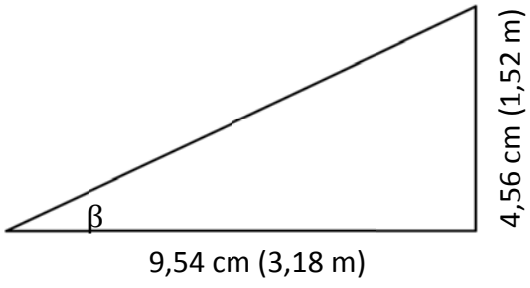
ESTACIÓ 2. ELS TOBOGANS

Solució: Tobogan xicotet: $\alpha \cong 32°$, tobogan gran: $\beta \cong 26°$.

Tobogan xicotet:



Tobogan gran:



ESTACIÓ 3. EL TEST

Solució: a) Necessitem 310.414 cm³ de terra. b) Necessitem 1.652 m² de ferro.

a) Agafem les mesures del test (que té forma de cilindre). La longitud de la circumferència és 236 cm i l'altura del cilindre és 70 cm.

Hem de calcular el volum del cilindre. Primer calcularem l'àrea del cercle: $A = \pi \cdot r^2 \cong \pi \cdot 37{,}58^2 \cong 4.434{,}49$ cm^2.

Per trobar el radi de la circumferència (l: longitud, r:radi):

$$l = 2 \cdot \pi \cdot r \to r = \frac{l}{2 \cdot \pi} = \frac{236}{2\pi} \cong 37{,}58 \text{ cm.}$$

Volum del cilindre: $V = A_{base} \cdot \text{altura} = 4434{,}49 \cdot 70 \cong 310.414$ cm^3

b) Per calcular la quantitat de ferro que necessitem, hem de calcular l'àrea d'un rectangle de base 236 cm = 2,36 m i d'altura 70 cm = 0,7 m. Aleshores, $A = b \cdot a = 2{,}36 \cdot 0{,}7 = 1{,}652$ m^2 de ferro necessitem.

ESTACIÓ 4. LA PLAÇA I EL PARC

Solució: a) Necessitem 159 tarongers. b) La longitud és 2,1111 hm.

a) Una pista de petanca mesura 14 m x 3,8 m.

Les tres pistes de petanca juntes formen un rectangle de 14 m x 11,4 m.

Aleshores, l'àrea del rectangle és: $A = 14 \cdot 11{,}4 = 159{,}6$ m^2.

Com un taronger ocupa 1 m^2, necessitem 159 tarongers.

b) Sabem que hi ha $114 + 113 = 227$ barrots. Cada barrot mesura 93 cm. Per tant, $l = 227 \cdot 93 = 21.111$ cm $= 2{,}1111$ hm.

ESTACIÓ 5. ELS TAULELLS

Solució:

Hi ha $90 \cdot 12 + 18 = 1.098$ taulells grocs. Hi ha de taulells grisos: $90 \cdot 18 + 20 - (7 \cdot 4) = 1.612$. Als taulells grisos els hem llevat els taulells que falten perquè hi ha tapes d'albellons. Tenim $1.098 + +1.612 = 2.710$ taulells.

- Taulells grocs: Fracció: $\frac{1098}{2710} = \frac{549}{1355}$; percentatge: 40,52%.
- Taulells grisos: Fracció: $\frac{1612}{2710} = \frac{806}{1355}$; percentatge: 59,48%.

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. ANIVERSARI DOBLE

Solució: La meua neboda té 8 anys i jo 56 anys.

Siguen x i y les edats demanades. Trobarem les solucions sense atendre a qui es corresponen, i després les raonarem.

Tenim l'equació formada pels inversos:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}\rightarrow\frac{y+x}{xy}=\frac{1}{7}$$

$$7(y+x)=xy$$

D'aquesta igualtat es dedueix que almenys un dels dos nombres, x o y, ha de ser múltiple de 7. Per la simetria de l'equació podem suposar que es tracta de x. Tindrem $x=7t$ per a algun nombre enter t, amb $t\geq 1$. Aïllem la incògnita y:

$$7(y+x)=xy\rightarrow 7y+7x=xy$$

$$7y-xy=-7x\rightarrow y(7-x)=-7x\rightarrow y=\frac{-7x}{7-x}$$

Com que $x=7t$, podem substituir en l'última igualtat i tindrem:

$$y=\frac{-7\cdot 7t}{7-7t}=\frac{-7\cdot 7t}{7(1-t)}=\frac{-7t}{1-t}$$

Sabent que y ha de ser un nombre enter, els únics valors de t que serveixen en un interval de $0<t<10$ són $t=2$ i $t=8$. Això vol dir:

$$t=2\rightarrow y=\frac{-7\cdot 2}{1-2}=14\rightarrow x=7t=14$$

$$t=8\rightarrow y=\frac{-7\cdot 8}{1-8}=8\rightarrow x=7t=56$$

Es poden considerar ambdues solucions correctes, tot i que és més comú pensar en la solució (56, 8). Per tant, la meua edat és 56 anys i l'edat de la meua neboda és 8 anys.

2. LA SEGA DE L'ARRÒS A LA RIBERA BAIXA

Solució: La colla està formada per 8 agricultors.

Siga x el nombre d'agricultors de la colla, i siga $\frac{1}{2}$ la mitja jornada de treball d'un agricultor.

Segar el camp gran necessita $x \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$ jornades de treball.

Segar el camp menut necessita: $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1$ jornades de treball.

Com un camp és el doble de l'altre, necessitarem el doble de jornades al gran que al menut: $x \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1\right)$

Resolent aquesta equació obtenim que $x = 8$ agricultors.

3. LLIBRE D'AVENTURES

Solució: Hi ha 738 nombres amb totes les xifres diferents.

Entre els 999 números que hi ha de l'1 al 999:

- Tenim els següents 9 nombres amb dues xifres iguals:

$$\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$$

- Tenim els següents 28 nombres de tres xifres compresos entre 100 i 199 que tenen almenys dues xifres iguals:

	100	110	121	131	141	151	161	171	181	191
	101	111	122	133	144	155	166	177	188	199
		112								
		113								
		114								
		115								
		116								
		117								
		118								
		119								
Total	2	10	2	2	2	2	2	2	2	2

Com per a cada centena tenim la mateixa situació, en total hi haurà:

$999 - 9 - 28 \cdot 9 =$ **738** nombres amb totes les xifres diferents.

4. COMPANYES DE PIS

Solució: Mònica fa xat, Míriam està escoltant música, M. Carme està resolent problemes i Isabel llegeix.

Fent una taula 4 × 4 on es col·loquen en les files les activitats que estan fent les xiques i en les columnes el nom de cada xica. Amb cada una de les afirmacions (1), (2), (4) i (5) s'eliminen dos cel·les de la taula.

	Míriam	Isabel	Mónica	M. Carme
Fer xat	**X**	**X**		**X**
Resoldre problemes				
Sentir música		**X**	**X**	
Llegir	**X**		**X**	**X**

Siga A="Míriam no està sentint música" i B="Mònica no està fent xat".

"Si [...] aleshores" ens diu que la veracitat d'A implica la veracitat de B, però que la veracitat d'A no ens diu res sobre la falsedat de B.

Per tant, l'afirmació (3) admet tres possibilitats en valors de veracitat:

a. Míriam no està escoltant música i Mònica no fa xat.
b. Míriam sí està escoltant música i Mònica no fa xat.
c. Míriam sí està escoltant música i Mònica sí fa xat.

Com cada estudiant està ocupada només en una activitat, es dedueix que Mònica està fent xat i açò entra en contradicció amb les possibilitats (a) i (b) de l'afirmació (3), quedant com a única possibilitat (c).

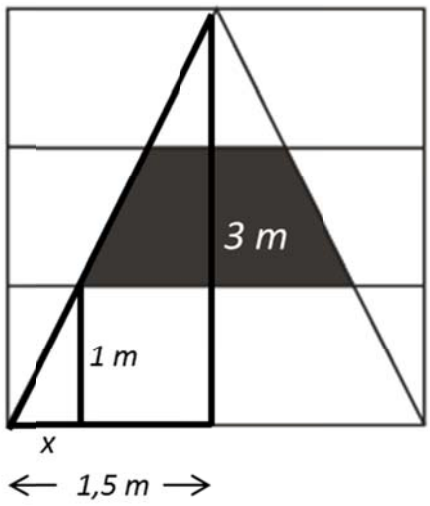
Per tant, la solució és:

- Mònica fa xat.
- Míriam està escoltant música.
- M. Carme està resolent problemes.
- Isabel llegeix.

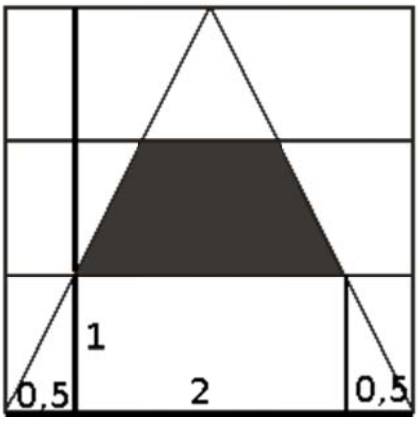
5. ÀREA EN EL QUADRAT

Solució: L'àrea de la zona fosca mesura $1,5\ m^2$.

Es tracta de calcular l'àrea del trapezi. Si apliquem semblança de triangles:



$$\frac{3}{1{,}5} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$



El costat horitzontal del quadrat l'hem descomposat en tres segments de longituds 0,5 m, 2 m i 0,5 m. També verticalment està dividit en tres parts iguals, per tant l'altura del trapezi és $h = 1$ m.

Les longituds de les dues bases del trapezi són $B = 2$ m i $b = 1$ m, sent B la base major i b la base menor.

Per tant, l'àrea demanada serà: $A = \frac{(2+1)\cdot 1}{2} = 1{,}5\ \text{m}^2$

6. LA XIFRA INCÒGNITA

Solució: Hi ha dues possibilitats: 8 o 1.

Si considerem una seqüència de nombres formats únicament per la xifra 9, el primer que és divisible per 7 és el 999.999:

$$999.999 : 7 = 142.857$$

Per tant, el nombre de 200 xifres estarà format per seqüències repetides del 142.857. Per esbrinar quantes seqüències repetides tenim, dividim 200 entre 6 i resulta: $200 = 6 \cdot 33 + 2$.

Necessàriament, les dues últimes xifres del nombre inicial són 13 o 14. Si el multipliquem per 7 obtenim: $7 \cdot 13 = 91$, $7 \cdot 14 = 98$.

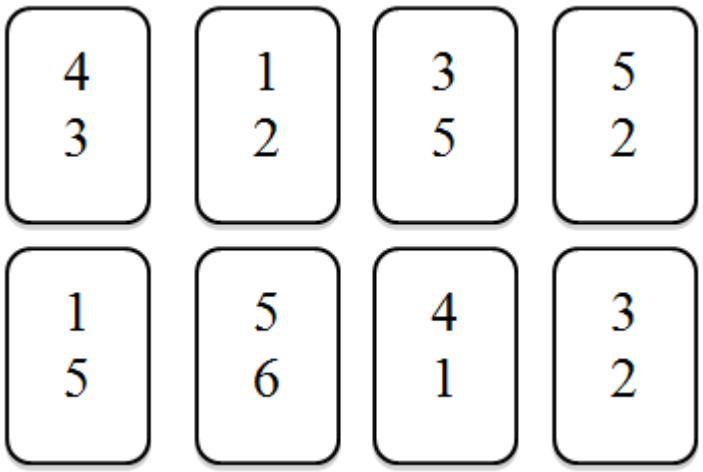
Per tant, l'última xifra del producte serà 1 o 8.

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE VELOCITAT

1. EL DÒMINO

Solució:



2. LA CARRERA

Solució: Guanyarà Vicent el segon entrenament.

Com que els dos corren amb la mateixa velocitat, podem plantejar una regla de tres directa amb les distàncies recorregudes per cadascun en els dos entrenaments:

Distància recorreguda per Vicent		*Distància recorreguda per Sílvia*
$\mathbf{5.000\ m}$	$\rightarrow$	$\mathbf{4.975\ m}$
$\mathbf{5.025\ m}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x = \frac{5.025 \cdot 4.975}{5.000} = 4.999,875\ m}$$

Això vol dir que quan Vicent arriba a la meta en el segon entrenament, Sílvia estarà molt poquet per darrere. Per tant, guanyarà Vicent.

3. BOTANT, BOTANT

Solució: Hi ha 30 esglaons. Fa 162 bots en una setmana.

Amb les dades del problema, està clar que el nombre d'esglaons que té l'escala és múltiple de 2, 3 i 5.

$$\boldsymbol{m.c.m.(2,3,5) = 30}$$

Per tant, el nombre d'esglaons és múltiple de 30. Anem a treballar amb el nombre de bots. Si suposem que el nombre d'esglaons és 30:

- $\boldsymbol{2 \cdot 15 = 30}$ → 15 bots de pujada de dilluns a dissabte
- $\boldsymbol{3 \cdot 10 = 30}$ → 10 bots de baixada de dilluns a dissabte
- $\boldsymbol{5 \cdot 6 = 30}$ → 6 bots tant de pujada com de baixada els diumenges

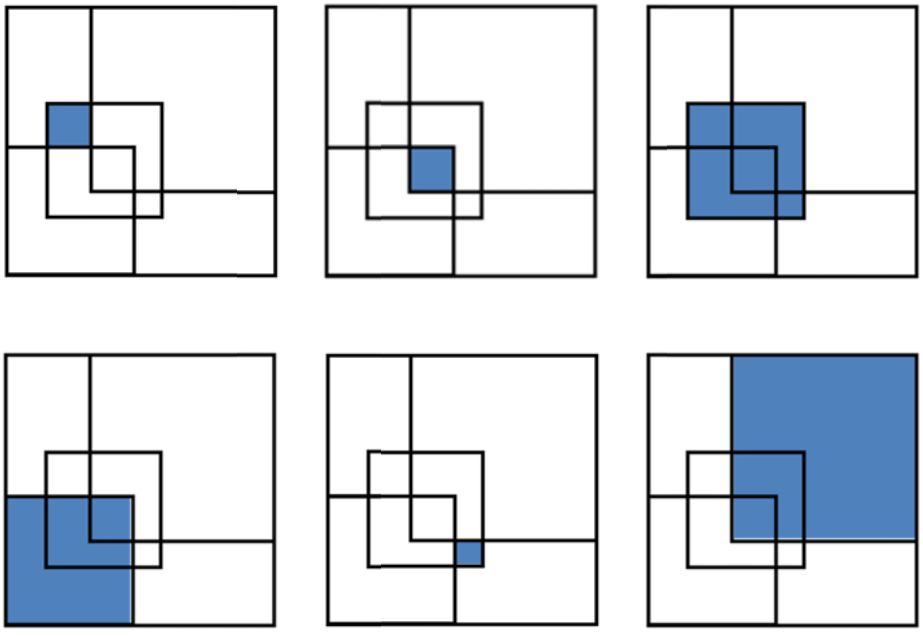
El nombre de bots està entre 1 i 20 en els tres casos. Això vol dir que l'escala té 30 esglaons.

Tenint en compte açò, $\boldsymbol{15 \cdot 6 = 90}$ bots pujar, $\boldsymbol{10 \cdot 6 = 60}$ bots baixar, $\boldsymbol{6 \cdot 2 = 12}$ bots diumenge. En total fa 162 bots.

4. QUADRATS

Solució: En la imatge hi ha 7 quadrats.

A més del quadrat gran, trobem:



5. L'EDAT DELS IAIOS

Solució: Memo té 75 anys.

Anomenarem x a l'edat de Memo, $x - 3$ a l'edat d'Estela.

Si sabem que la mitjana dels 7 néts és 15, aleshores la suma de totes les edats dels néts és $7 \cdot 15 = 105$.

Així, la mitjana de les edats de Memo, Estela i els néts és:

$$\frac{x + (x-3) + 105}{9} = 28 \rightarrow x + (x-3) + 105 = 252 \rightarrow 2x = 150 \rightarrow x = 75$$

Per tant, Memo té 75 anys.

6. NOTA D'EXAMEN

Solució: Van obtindre 17 encerts en total.

Elaborem la taula de possibles qualificacions:

Encerts	***Errades***	***Punts a favor***	***Punts en contra***	***Qualificació***
10	0	50	0	50
9	1	45	- 3	42
8	2	40	- 6	34
7	3	35	- 9	26
6	4	30	- 12	18
5	5	25	- 15	10
4	6	20	- 18	2
3	7	15	- 21	-6
2	8	10	- 24	-14
1	9	5	- 27	- 22
0	10	0	- 30	- 30

Així veiem que Ramón va tenir 8 encerts, Miguel 5 i Adrián 4. Entre els tres van tenir 17 encerts. En total 17 encerts.

7. TAULELLS

Solució: Hi ha 2.500 taulells blancs.

Si n és el nombre de taulells d'un costat del pis, el total de taulells és n^2, i el nombre de taulells a les dues diagonals és $2n-1$ (un taulell està compartit per les dues diagonals).

Com ens diuen que hi ha 101 taulells negres:

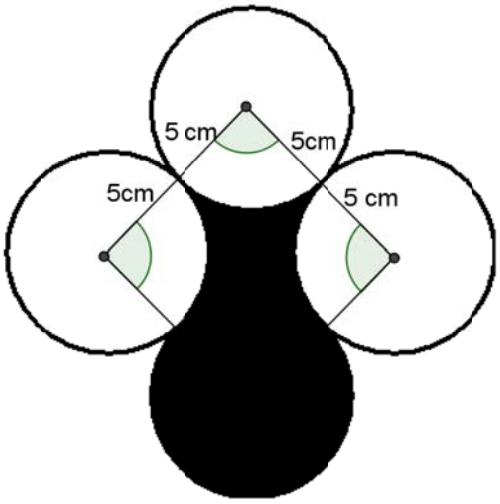
$$2n-1=101 \rightarrow n = 51$$

El nombre de taulells blancs, per tant, és de:

$$n^2-(2n-1)=n^2-2n+1=(n-1)^2=50^2=2.500$$

8. EL PITXER MATEMÀTIC

Solució: L'àrea del pitxer és de 100 cm^2.



Es tracta de tres cercles tangents entre sí dos a dos. Per tant, els radis són perpendiculars en el punt de tangència i formen dos a dos els costats d'un quadrat de costat 10 cm.

L'àrea del pitxer és la suma de l'àrea d'un cercle de radi 5 cm i de la superfície del polígon curvilini, que és el resultat de restar l'àrea del quadrat de costat 10 cm menys quatre quarts de cercle de radi 5 cm.

$$A_{pitxer}=A_{cercle}+\left(A_{quadrat}-A_{cercle}\right)=A_{quadrat}$$

$$A_{quadrat}=l^2=10^2=100\ \text{cm}^2$$

9. LA PALMERA

Solució: A aproximadament 5,3 metres de la base.

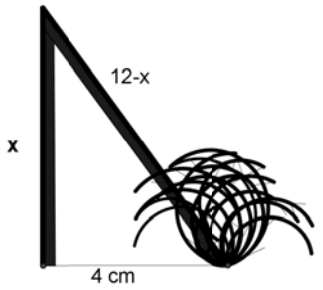
Siga x l'altura del punt de trencament de la palmera.

Per tant, suposant que la palmera està en vertical, forma amb l'horitzontal un angle recte, i defineix un triangle rectangle amb catets x i 4 cm i hipotenusa $12-x$. Aquesta figura representa la situació:

Pel teorema de Pitàgores:

$x^2 + 4^2 = (12 - x)^2 \rightarrow x^2 + 16 = 144 - 24x + x^2$

$24x = 128 \rightarrow x = \frac{128}{24} \rightarrow x = \frac{16}{3} = 5,\hat{3}$ m



10. SUMA CURIOSA

Solució: A=1, B=4, C=8.

L'enunciat ens diu el següent:

$$3 \cdot (ABC) = BBB = B \cdot (111)$$

Per tant, $B \neq 0$, i B no és múltiple de 3, ja que si aquest fóra el cas:

$$ABC \in \{111, 222, 333\}$$

que són nombres amb les mateixes xifres.

A més, 3 divideix a 111 $\rightarrow ABC = B \cdot 37$

- Si $B = 1 \rightarrow A1C = 1 \cdot 37 = 37$, nombre de dues xifres que no és possibilitat vàlida.
- Si $B = 2 \rightarrow A2C = 2 \cdot 37 = 74$, nombre de dues xifres que no és possibilitat vàlida.
- Si $B = 4 \rightarrow A4C = 4 \cdot 37 = 1\mathbf{4}8$, nombre de tres xifres, coincidint amb la xifra de les desenes en $B = \mathbf{4}$.

Solució: A=1, B=4, C=8

En la resta de possibilitats per a B, no es troba cap altra solució:

- Si $B = 5 \rightarrow A5C = 5 \cdot 37 = 1\mathbf{8}5$, la xifra de les desenes no coincideix amb $B = 5$, que no és possible.
- Si $B = 7 \rightarrow A7C = 7 \cdot 37 = 2\mathbf{5}9$, la xifra de les desenes no coincideix amb $B = 7$, que no és possible.
- Si $B = 8 \rightarrow A8C = 8 \cdot 37 = 2\mathbf{9}6$, la xifra de les desenes no coincideix amb $B = 8$, que no és possible.

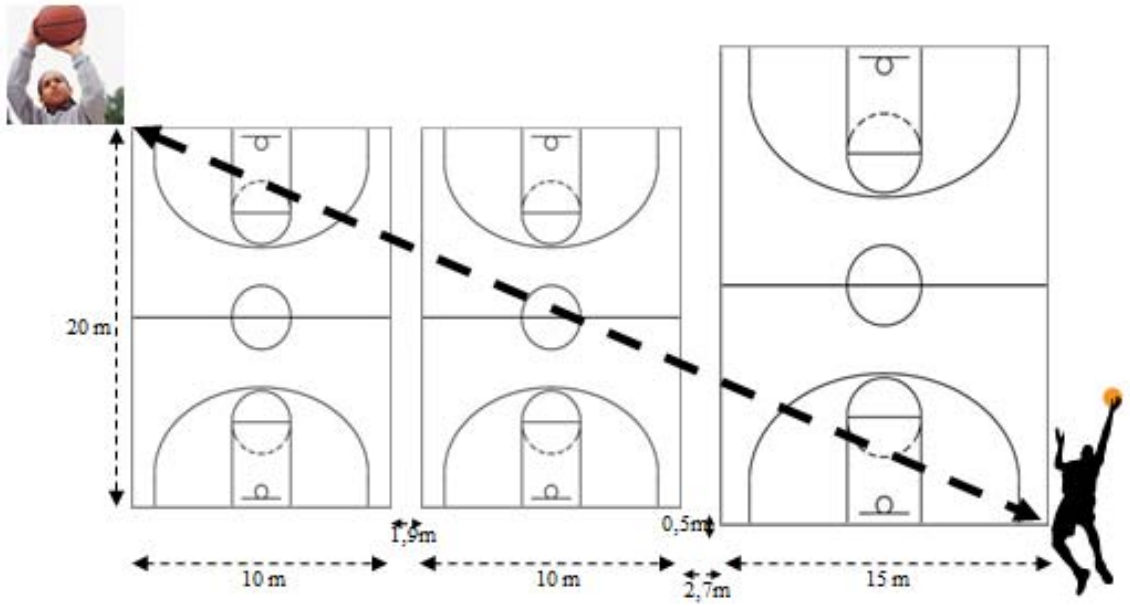
PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. UN LLANÇAMENT TEMERARI

Solució:

Només es tracta d'utilitzar el teorema de Pitàgores mesurant amb cura per tal de no fer-ho malament:



En el diagrama s'han posat les mesures de les distàncies involucrades aproximant les mesures als decímetres. Amb tot això:

$$d = \sqrt{(20{,}5)^2 + (10 + 1{,}9 + 10 + 2{,}7 + 15)^2} = \sqrt{(20{,}5)^2 + (39{,}6)^2} =$$
$$= \sqrt{1.988{,}41} \cong 44{,}6 \text{ m}$$

ESTACIÓ 2. LA CASETA DEL GRONXADOR I EL FANAL

Solució:

Mesures preses:

- Distància persona – fanal: $d = 10{,}90$ m
- Distància persona – caseta: $d' = 3{,}70$ m

$$d - d' = 10{,}9 - 3{,}7 = 7{,}2 \text{ m} = \overline{A'B}$$

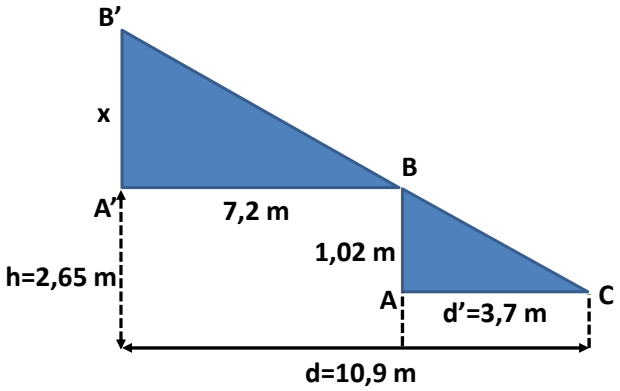
- Alçària de la caseta: $h = 2{,}65$ m
- Alçària als ulls de la persona: $h' = 1{,}63$ m

$$h - h' = 2{,}65 - 1{,}63 = 1{,}02 \text{ m} = \overline{AB}$$

NOTA: Estes mesures canvien segons la persona, ja que s'ha de buscar el punt exacte perquè al traçar la visual coincidisquen el punt més alt de la caseta i del fanal.

Si CBB' és la línia entre la visual C de la persona, el punt més alt del grontxador B i el punt més alt del fanal B', aleshores, el triangle ABC és semblant a $A'B'B$.

Siga $x = \overline{A'B'}$. Pel teorema de Thales: $\frac{x}{7{,}2} = \frac{1{,}02}{3{,}7} \rightarrow x = \frac{7{,}2 \cdot 1{,}02}{3{,}7} \cong 1{,}98$ m



L'alçària del fanal serà: $h + x \cong 2{,}65 + 1{,}98 = 4{,}63$ m

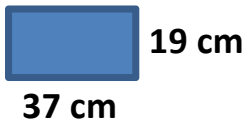
ESTACIÓ 3. L'APOSTA PER LA PORTA

Solució: Pere guanyarà l'aposta.

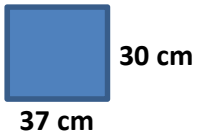
1º) Calculem l'àrea dels vidres. La porta té una part central de vidres i a dreta i esquerra es troben dues bandes simètriques.

Totes les figures són rectangles. Apareixen 6 tipus de rectangles:

Tipus 1:



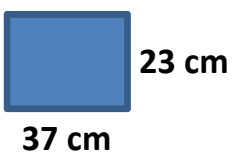
Tipus 2:



Tipus 3:



Tipus 4:



Tipus 5:



Tipus 6:



Tipus rectangle	Nombre de rectangles (n)	Altura (a)	Ample (b)	Producte (n·a·b)
Tipus 1	4	19	37	2.812
Tipus 2	2	30	37	2.220
Tipus 3	10	22,5	37	8.325
Tipus 4	2	23	37	1.702
Tipus 5	2	19	86	3.268
Tipus 6	7	22'5	72	11.340
			TOTAL	**29.667**

En total, l'àrea de la zona amb vidres: 29.667 cm^2

b) Mesura de l'ample de la porta: 191 cm

Àrea total de la porta: $278 \cdot 191 = 53.098\ \text{cm}^2$
Àrea del marc blanc = Àrea total−Area envidrada

$$A = 53.098 - 29.667 = 23.431\ \text{cm}^2$$

c) Raó $= \frac{\text{Àrea envidrada}}{\text{Àrea marc}} = \frac{29.667}{23.431} \cong 1{,}27$

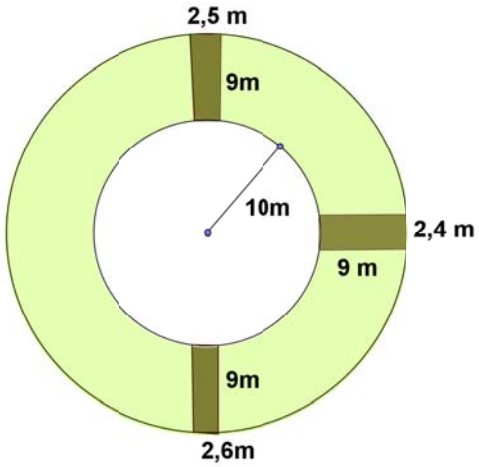
Per tant, Pere guanyarà l'aposta.

ESTACIÓ 4. LA GESPA EN L'ILLA AL PARC DE LA BOMBILLA

Solució: ****NOTA: Les mesures preses i els càlculs estan arrodonits als decímetres.***

Com es veu en la figura adjunta, es tracta de calcular l'àrea d'una corona circular i llevar-li l'àrea de 3 accesos que són rectangles.

- Radi del cercle major: 19 m
- Radi del cercle menor: 10 m
- Àrea de la corona circular: $\pi \cdot (19^2 - 10^2) = 261\pi\ \text{m}^2$
- Àrea dels tres accessos: $9 \cdot (2{,}5 + 2{,}4 + 2{,}6) = 67{,}5\ \text{m}^2$



L'àrea de la zona de la gespa: $261\pi - 67{,}5 \cong 752{,}46\ \text{m}^2$

ESTACIÓ 5. MÉS LLARG - MÉS CURT

Solució:

Per tal de calcular la distància més curta i la més llarga hem de mesurar les distàncies entre fanals. Arrodonint a un nombre enter de rajoles tenim:

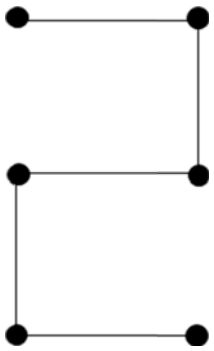
- Distància entre fanals de la mateixa fila:

  26 rajoles × 40 cm per rajola = 10,4 m

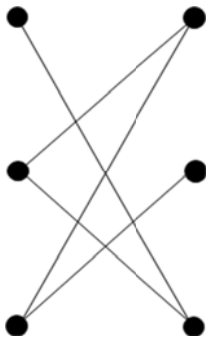
- Distància entre les dos files de fanals:

  22 rajoles × 40 cm per rajola = 8,8 m

La distància més curta serà:



La distància més llarga serà:



En la més curta tindrem: $2 \cdot 10{,}4 + 3 \cdot 8{,}8 = 47{,}2$ m

En la més llarga tindrem dues diagonals llargues i tres diagonals curtes. La diagonal llarga serà de $\sqrt{20{,}8^2 + 8{,}8^2} = 22{,}6$ m i la diagonal curta serà de $\sqrt{10{,}4^2 + 8{,}8^2} = 13{,}6$ m.

Per tant la distància més llarga serà $2 \cdot 22{,}6 + 3 \cdot 13{,}6 = 86$ m.

NOTA: En els càlculs s'ha aproximat als decímetres.

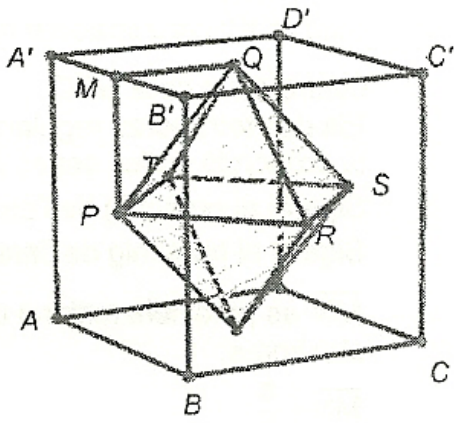
PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA INDIVIDUAL

1. OCTAEDRE DUAL

Solució: La proporció entre els volums és 1/6.

Siga el cub $ABCDA'B'C'D'$ d'aresta $a = AB$. Siga P el centre de la cara $ABB'A'$. Siga Q el centre de la cara $A'B'C'D'$. Siga M el punt mitjà de l'aresta $A'B'$.



$$\overline{PM} = \overline{QM} = \frac{a}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles PMQ:

$$\overline{PQ^2} = \overline{PM^2} + \overline{MQ^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\overline{PR} = \overline{PQ}$$

El volum de l'octaedre és igual al doble del volum de la piràmide de base quadrada $PRST$ i cúspide Q. La seua altura és la meitat de l'aresta del cub.

$$V_{oct} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \overline{PR^2} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$$

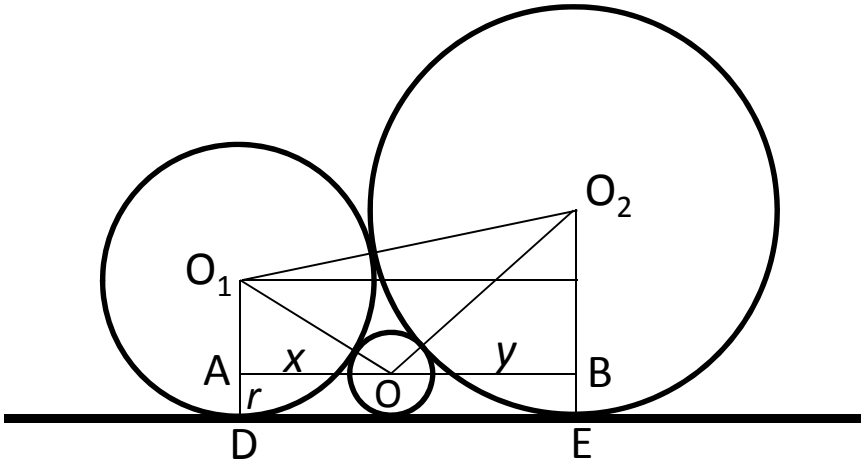
La proporció entre els volums de l'octaedre regular i el cub és:

$$\frac{V_{oct}}{V_{cub}} = \frac{\frac{1}{6}a^3}{a^3} = \frac{1}{6}$$

2. CERCLES TANGENTS

Solució: El radi mesura 0,61 cm aproximadament.

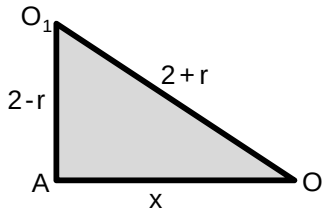
Siga *r* el radi de la circumferència més menuda.



Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle O_1AO:

$$x^2 + (2-r)^2 = (2+r)^2 \to x^2 + 4 - 4r + r^2 = \\ = 4 + 4r + r^2$$

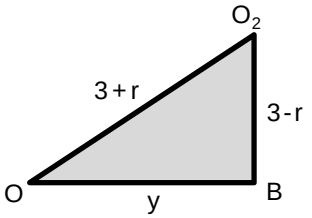
$$x^2 = 8r \to x = \sqrt{8r} = \sqrt{2^3 r} \to x = 2\sqrt{2r}$$



Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle O_2BO:

$$y^2 + (3-r)^2 = (3+r)^2 \to y^2 + 9 - 6r + r^2 = \\ = 9 + 6r + r^2$$

$$y^2 = 12r \to y = \sqrt{12r} = \sqrt{2^2 \cdot 3r} \to y = 2\sqrt{3r}$$

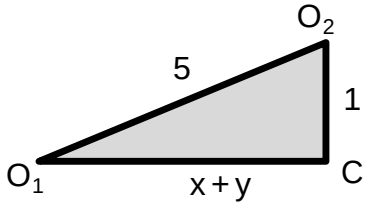


Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle O_1O_2C:

$$(x+y)^2 + 1^2 = 5^2 \to x^2 + 2xy + y^2 = 24$$

$$8r + 12r + 2 \cdot \left(2\sqrt{2r}\right) \cdot \left(2\sqrt{3r}\right) = 24$$

$$20r + 8\sqrt{6r^2} = 24 \to 5r + 2\sqrt{6}r = 6 \\ \to \left(5 + 2\sqrt{6}\right)r = 6$$



$$r = \frac{6}{5+2\sqrt{6}} = \frac{6\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)} = \frac{30-12\sqrt{6}}{25-24} = 30 - 12\sqrt{6} \cong 0{,}61 \text{ cm}$$

3. SUMEN 2

Solució: En total hi ha 2.027.091 nombres enters.

Compresos entre l'1 i el 10: el 2 $\rightarrow$ n'hi ha 1

Compresos entre el 10 i el 10^2: l'11 i el 20 $\rightarrow$ n'hi ha 2

Compresos entre el 10^2 i el 10^3: 101, 110 i 200 $\rightarrow$ n'hi ha 3

Compresos entre el 10^3 i el 10^4: 1001, 1010, 1100 i 2000 $\rightarrow$ n'hi ha 4

Compresos entre el 10^4 i el 10^5: 10001, 10010, 10100, 11000 i 20000 $\rightarrow$ n'hi ha 5

Compresos entre el 10^n i el 10^{n+1}: 10...01, 10...10, ..., 110...0 i 20...0 $\rightarrow$ n'hi ha $n+1$

En total n'hi ha:

$$1+2+3+\cdots+2013=\frac{(1+2013)\cdot 2013}{2}=1007\cdot 2013=2.027.091$$

4. TRIANGLES A L'INFINIT

Solució: La suma de les àrees és 2,5 cm^2.

L'àrea dels triangles nous que apareixen al nivell n és un quart de l'àrea de cadascun dels triangles que apareixen al nivell $n-1$, ja que el costat d'un és la meitat del costat de l'anterior.

Aleshores, l'àrea buscada corresponent a la darrera figura és:

$$1+3\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{16}+12\cdot\frac{1}{64}+24\cdot\frac{1}{256}+\cdots=$$
$$=1+\left(\frac{3}{4}+\frac{6}{16}+\frac{12}{64}+\frac{24}{256}+\cdots\right)=1+S$$

S és la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica decreixent de raó $\frac{1}{2}$ i primer terme $\frac{3}{4}$.

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

L'àrea buscada és: $A=1+S=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5\ \text{cm}^2$

5. PRODUCTE DE NATURALS

Solució: En el primer cas, A=226. En el segon cas, A=113.

Siguen x, y les xifres del nombre B: $B = (xy) = 10x + y$.

$$A \cdot B = N \rightarrow A \cdot (10x + y) = N \quad (1)$$

$$A \cdot (10y + x) = N + 2034 \quad (2)$$

Restant $(2) - (1)$:

$$A \cdot (10y + x - 10x - y) = 2034 \rightarrow A \cdot 9 \cdot (y - x) = 2034$$
$$\rightarrow A \cdot (y - x) = 226$$

Si B té les xifres consecutives, aleshores $y - x = 1$. Per tant $A = 226$.

Si B no té les xifres consecutives, aleshores $y - x > 1$.

Com $A \cdot (y - x) = 113 \cdot 2 \rightarrow y - x = 2$ *i* $A = 113$.

6. LLISTA NATURAL

Solució: El número natural més gran possible és el 15.

Escrivim la llista dels cinc nombres en ordre creixent: a, b, c, d i e.

Com la mediana de la llista és 9, aleshores el tercer nombre és c = 9.

Com el 8 apareix més d'una vegada i la mediana és 9, aleshores el 8 sols apareix dues vegades i a = b = 8.

Per tant, la llista és pot escriure com 8, 8, 9, d i e.

Com la mitjana és 10 i hi ha 5 nombres en la llista, aleshores la seua suma és $5 \cdot 10 = 50$.

Per tant: $8 + 8 + 9 + d + e = 50 \rightarrow 25 + d + e = 50 \rightarrow d + e = 25$.

Com 8 és l'únic natural que apareix més d'una vegada en la llista, aleshores $d > 9$. Per tant, $10 \leq d < e$.

Com $d + e = 25$, el major valor del nombre e s'obté quan d té el menor valor possible, és a dir, quan $d = 10$.

Per tant $e = 15$ és el major nombre de la llista 8, 8, 9, 10 i 15.

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE VELOCITAT

1. SUMA ANGLESA

Soluciò: H=9.

En la columna de l'esquerra, $S \neq M$. Per tant, $M = S + 1$ (perquè com a molt, en porten 1). Aleshores, $S < S + 1 = M$. Per tant, $S < M + H$.

Per tant, l'única forma que la columna de la dreta tinga sentit és:

$M + H = S + 10$.

Per tant:

$S + 10 = M + H = (S + 1) + H = S + (1 + H) \rightarrow 1 + H = 10 \rightarrow H = 9$.

2. PASTISSOS

Solució: La fracció del pastís que queda és 5/18.

Suposem que el pastís original té centre O, radi 2R i àrea $4 \cdot \pi \cdot R^2$. Aleshores, cadascun dels dos cercles de grandària mitjana té diàmetre 2R i la seua àrea combinada és $2 \cdot \pi \cdot R^2$.

Falta trobar el radi r i l'àrea de cadascun dels dos cercles xicotets. Siga C el centre d'un dels cercles de grandària intermèdia, D el centre d'un dels cercles xicotets, i siga E el punt de tall de la prolongació del segment $\overline{OD}$ amb la circumferència del cercle gran. Aleshores, en el triangle rectangle DOC:

$\overline{OC} = R, \overline{OD} = 2R - r$ (ja què $\overline{OE} = 2R$ i $\overline{DE} = r$) i $\overline{CD} = R + r$.

Aplicant el teorema de Pitágores: $R^2 + (2R - r)^2 = (R + r)^2$.

Per tant: $4 \cdot R^2 = 6 \cdot R \cdot r$. Per tant: $2R = 3r \rightarrow r = \frac{2}{3}R$.

Aleshores, l'àrea del pastís sense usar:

$$4\pi R^2 - 2\pi R^2 - 2\pi r^2 = 2\pi R^2 - 2\pi \left(\frac{2}{3}\mathrm{R}\right)^2 = \frac{10}{9}\pi R^2$$

Fracció del pastís gran sense usar: $\frac{\frac{10}{9}\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

3. UN CAMÍ NATURAL

Solució: a) En la juxtaposició de 8999 i 9000. b) En la juxtaposició de 11221 i 11222.

4. QUADRATS

Solució: La longitud del costat més gran 24 cm.

Suposem què la longitud del costat de cadascun del quadrats xicotets és x. La longitud de cada quadrat ombrejat és 10, aleshores:

$$\overline{QR} \;=\; 3(10) \;=\; 30 \;=\; \overline{PS}$$

Per tant, $\overline{PS} = 30 = 4x + x \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$.

5. TANTS RECORDS

Solució: Joan i Sònia (32 i 31 objectes), Pere i Mireia (8 i 1 objectes), Dídac i Catalina (12 i 9 objectes).

Si cada home compra x objectes, a x euros cadascun, gasta x^2. Diguem que cada dona gasta y^2. Així, $x^2 - y^2 = 63$; $(x + y)(x - y) = 63$.

Les distintes possibilitats naturals són:

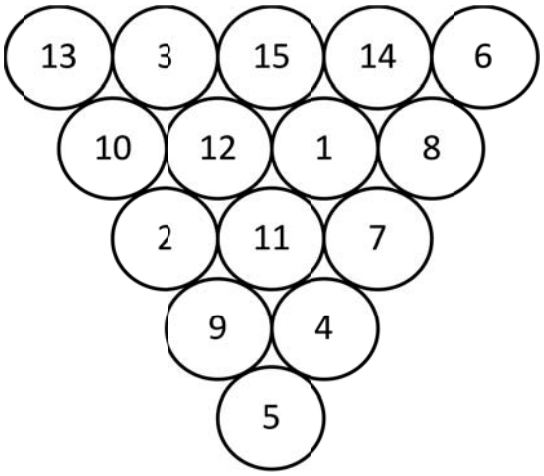
$(x+y)$	$(x-y)$	$=63$	x	y
9	7		8	1
21	3		12	9
63	1		32	31

La diferència de 23 només es dóna entre 32 (Joan) i 9 (Catalina). La diferència d'11 només es dóna entre 12 (Dídac) i 1 (Mireia).

6. TRIANGLE DE BILLAR

Solució:

La solució única és la que mostra la figura:



7. MÚLTIPLES CONSECUTIUS

Solució: Els nombres demanats són 840 i 841.

$$N = k \cdot 30, N + 1 = k' \cdot 29$$

$$k \cdot 30 = k' \cdot 29 - 1 \;\rightarrow\; k \cdot (29 + 1) = k' \cdot 29 - 1 \rightarrow 29k + k = \\ = k' \cdot 29 - 1 \rightarrow k + 1 = 29 \cdot (k' - k)$$

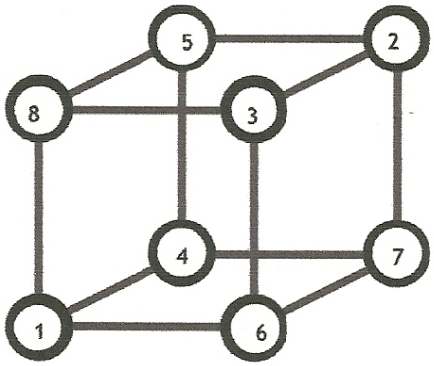
$k + 1$ ha de ser múltiple de 29, el més senzill (amb $k' - k = 1$) és $k = 28$.

Provem i aleshores tenim $N = 28 \cdot 30 = 840$.

I tenim $k' = 29$ *i* $N + 1 = 29 \cdot 29 = 841$.

8. CUB AMB NOMBRES

Solució:



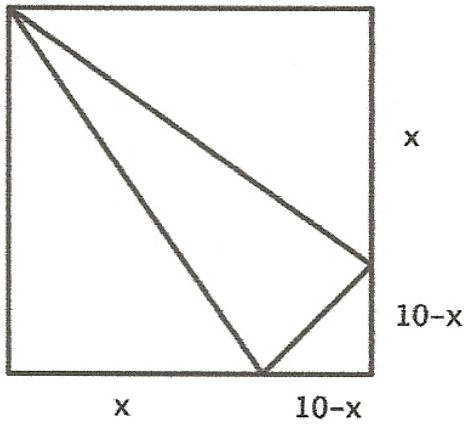
9. TRIANGLE TRES HUITENS

Solució:

$$100 - \frac{10x}{2} - \frac{10x}{2} - \frac{(10-x)(10-x)}{2} = \frac{3}{8} \cdot 100$$

$$\frac{200}{2} - \frac{10x}{2} - \frac{10x}{2} - \frac{(10-x)(10-x)}{2} = \frac{75}{2}$$

$$\mathbf{200 - 20x - 100 + 20x - x^2 = 75 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5}$$



10. DONANT LA VOLTA

Solució: Les possibles solucions són: A=2 i B=1, A=4 i B=2, A=6 i B=3, A=8 i B=4.

$$\mathbf{4 \cdot (10A + B) = 7 \cdot (10B + A) \rightarrow 33A = 66B \rightarrow A = 2B}$$

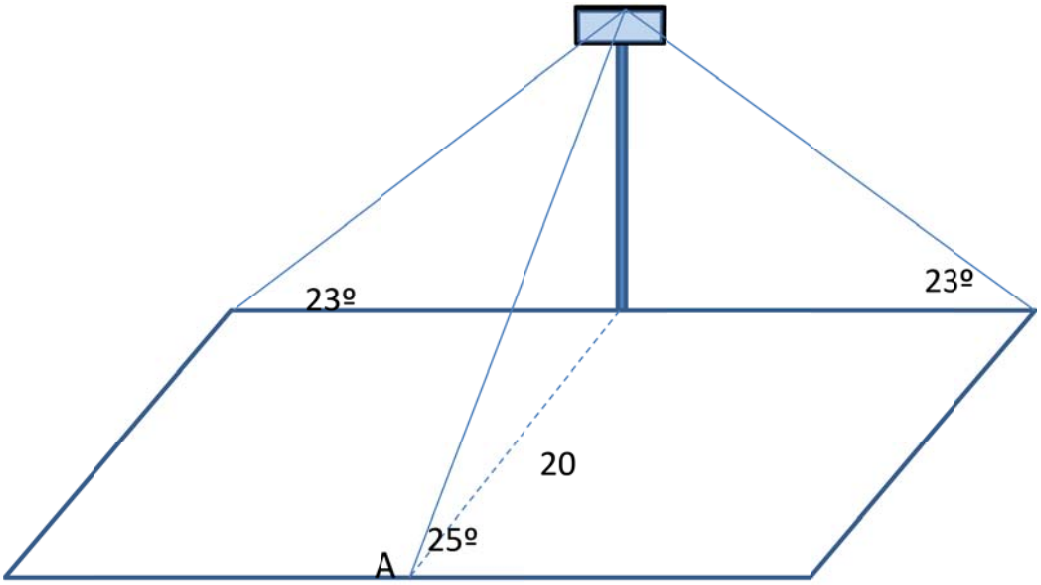
Les possibles solucions són: A=2 i B=1, A=4 i B=2, A=6 i B=3, A=8 i B=4.

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE PROVINCIAL – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. L'ESCALA I LES RECTES

***Solució: a)* 65°*; b)* 134°.**



a. Com l'angle des del punt A és de 25°, aleshores l'angle que forma el fanal amb el pal vertical que el sosté ha de ser de 65°.

b. Com l'angle des dels extrems de la pista és de 23° aleshores l'angle des de la vertical ha de ser de 67°. Per tant, la màxima obertura que hauria de tindre el feix de raigs seria de $2 \cdot 67° = 134°$.

ESTACIÓ 2. LES ESCALES DEL PAVELLÓ

Solució: a) 24 possibilitats, b) 256 possibilitats; c) 1/64

a. Seran totes les possibles permutacions dels 4 alumnes:

$$P = 4! = 24 \text{ formes possibles.}$$

b. Podem expressar en forma ordenada el número de l'escala per la qual baixa cadascun: (Joan, Vicent, Ana, Mireia), de manera que el primer

exemple seria (1,2,3,3), i el segon seria (3,2,2,4). Per tant, totes les possibles maneres serien:

$$VR_{4,4} = 4^4 = 256 \text{ maneres.}$$

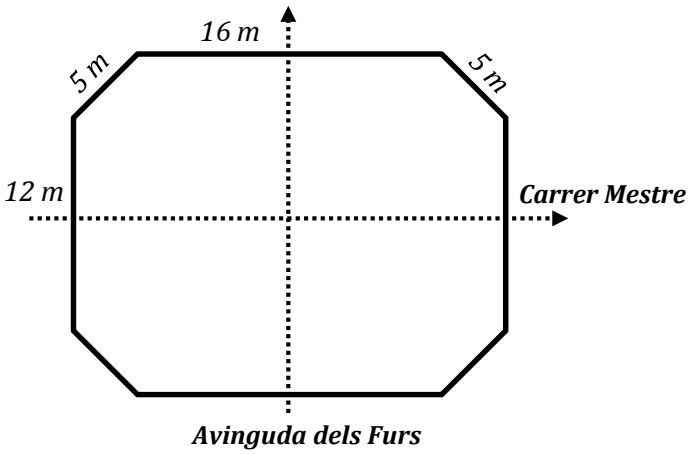
c. Si baixen els quatre per la mateixa escala, aleshores és que han fet (1,1,1,1), o bé (2,2,2,2,), (3,3,3,3) o bé (4,4,4,4). Són 4 resultats favorables de les 256 maneres possibles. Per tant, la probabilitat serà:

$$P = \frac{4}{246} = \frac{1}{64}$$

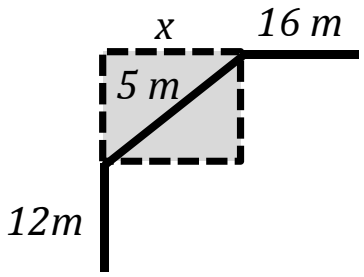
3. OCTÒGONS A L'AVINGUDA DELS FURS

***Solució: L'àrea demanada medix* $\mathbf{415,37\ m^2}$.**

Afegim a l'esquema les mesures que falten corresponents als xamfrans. (suposem que els quatre xamfrans mesuren igual).



Si cada xamfrà mesura 5 m, considerant-lo la diagonal d'un quadrat, podem calcular els costats d'eixe quadrat: $x^2 + x^2 = 5^2$ per tant $x \cong 3{,}54$ m.



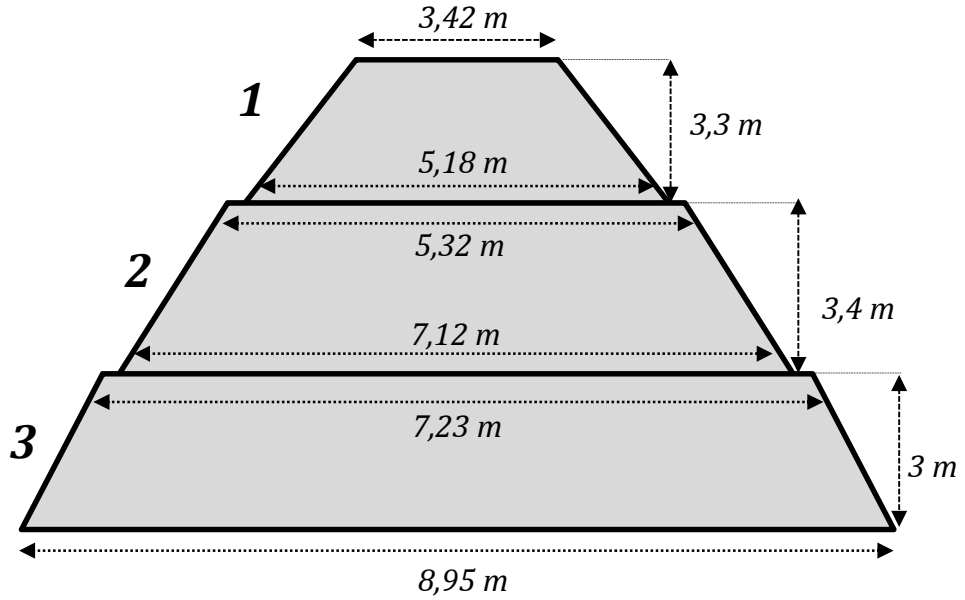
L'octògon està inscrit en un rectangle de $19{,}08 \times 23{,}08$ m que té una àrea de $440{,}37$ m^2. Si restem l'àrea dels triangles que ens sobren, hem de restar l'àrea de dos quadrats de 3,54 m de costat, aleshores l'àrea buscada serà:

$$440{,}37 - 25 = 415{,}37 \text{ m}^2$$

ESTACIÓ 4. PARC DE LA BOMBILLA

Solució: Les tres basses tardaran 1 h 45 min i 58 s a omplir-se.

Les basses de la font tenen forma de trapezi. Obtenim les diferents mesures:



Recordem que l'àrea d'un trapezi és: $A_{trapezi} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$

Si calculem la superfície de cada bassa tindrem:

$$A_1 = \frac{(3{,}42 + 5{,}18) \cdot 3{,}3}{2} = 14{,}19 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{(5{,}32 + 7{,}12) \cdot 3{,}4}{2} = 21{,}148 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{(7{,}23 + 8{,}95) \cdot 3}{2} = 24{,}27 \text{ m}^2$$

I si multipliquem per la profunditat, obtindrem el volum total, que serà:

$$V = (14{,}19 + 21{,}148 + 24{,}27) \cdot 0{,}16 = 9{,}53728 \text{ m}^3$$

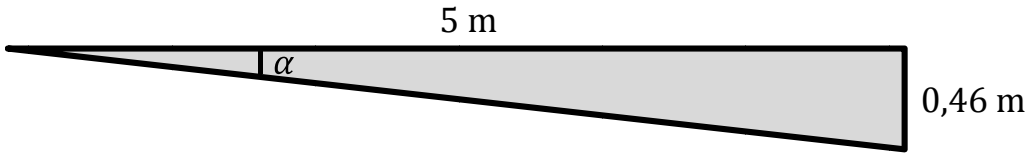
Si la font vessa a una velocitat d'1,5 l/s, aleshores com $9{,}53728 \text{ m}^3 = 9.537{,}28$ l, tindrem que el temps que tardarà serà:

$$t = \frac{9.537{,}28}{1{,}5} = 6358{,}186667 \text{ s} \cong 105{,}97 \text{ min} = 1 \text{ h } 45 \text{ m } 58 \text{ s}$$

5. PLAÇA DE LES TERMES ROMANES

Solució:

a. Si prenem qualsevol mesura en el perfil de la rampa, tenim que:



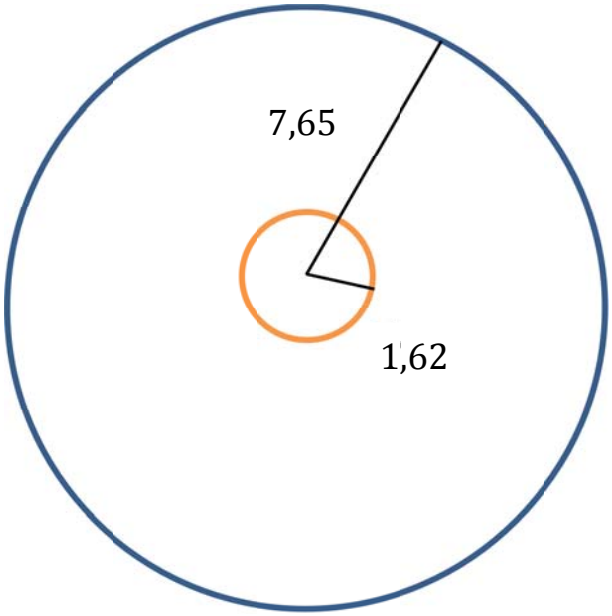
Aleshores, per trigonometria bàsica:

$$\tan\alpha = \frac{0{,}46}{5} = 0{,}092$$

$$\alpha = \arctan(0{,}092) \cong 0{,}09174 \text{ rad}$$

b. La superfície que ens demanen serà la del cercle gran menys la del menut:

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(7{,}65^2 - 1{,}62^2) = \\ = 175{,}61 \text{ m}^2$$



ACTUALITZEU ELS VOSTRES CORREUS ELECTRÒNICS...!!!

ATENCIÓ, SOCIS!!

Per tal d'actualitzar la nostra base de dades, us demanem que ens informeu de les possibles variacions en les vostres dades, especialment en les vostres adreces de correu electrònic.

És important tindre aquesta informació per a un millor funcionament de la societat. És suficient que envieu un correu electrònic a:

tresorer@semcv.org

indicant les vostres novetats.

Gràcies per la vostra col·laboració.

CONTACTEU AMB NOSALTRES...!!!

Si vols enviar-nos solucions de problemes obers, propostes de problemes o de temes, comentaris i suggeriments, pots enviar una carta a l'adreça:



SEMCV "AL-KHWARIZMI"

PROBLEMA OBERT

APARTAT 22.045

46071 VALÈNCIA

També pots enviar un missatge al correu electrònic:



problemesolimpics@semcv.org

Esperem les vostres col·laboracions!!!

PREMI MARIA ANTÒNIA CANALS 2014

La Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT), la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX i la Societat d'Educació Matemàtica de la C. V. "al-Kwhārizmī" convoquen el Premi "Maria Antònia Canals" 2014, per a projectes d'innovació educativa realitzats en algún/s dels tres cursos anteriors a la convocatòria. Els projectes han d'estar dirigits a l'ensenyament de la matemàtica en els següents nivells educatius: educació infantil (0–6), educació primària (6-12), educació secundària (12-18) i universitària.

Pot optar al premi qualsevol professional de l'ensenyament, des de l'escola bressol fins a la universitat, sempre que faci servir el català en qualsevol de les seves variants.

No podran optar al premi treballs ja publicats o premiats en altres concursos.

Els projectes han de ser presentats, en suport informàtic (Word, Open Office, pdf), amb una extensió d'entre 10 i 40 pàgines com a màxim (arial 11, doble espai).

La presentació del projecte constarà dels següents apartats:

- Resum de 5 a 10 línies, redactats en català, amb Arial 11 a doble espai.
- Exposició dels objectius i del context en que s'ha desenvolupat. Referències emprades (webs, textos,…)
- Descripció de l'experiència i dels materials usats.
- Una mostra de les produccions de l'alumnat (fotografies, produccions escanejades, …)
- Conclusions i reflexió final sobre el que ha representat el projecte pel que fa a l'aprenentatge matemàtic de l'alumnat implicat en el projecte.

Document, a part de l'anterior, que contingui les indicacions següents:

  - nom i cognoms dels autors;
  - adreça postal i electrònica i telèfon dels autors;
  - NIF dels autors;
  - una declaració signada pels autors que el treball és inèdit i no ha estat premiat en altres concursos.

S'atorgarà un sol premi per nivell educatiu dotat amb 600€ i, si s'escau, mencions especials als treballs que ho mereixin citant-los a l'acta del jurat i facilitant-ne la difusió.

Els premis poden restar deserts o no ésser adjudicats.

El termini de lliurament dels treballs finalitzarà el 31 de juliol de 2014

El veredicte serà comunicat als guanyadors personalment i el lliurament es farà en un acte públic.

Les societats convocants es reserven el dret a la publicació dels projectes premiats. Aquesta publicació pot ser a la revista Noubiaix o en format de llibre o d'altres que puguin ser més escaients en funció del tipus de treball premiat.

Les societats es comprometen a divulgar els premis i a donar a l'autor l'oportunitat de presentar el seu treball en les jornades respectives.

El jurat estarà format per un membre designat per cada societat, un membre del consell de redacció de la revista Noubiaix i un especialista en didàctica de la matemàtica amb veu i vot, i el secretari d'una de les tres societats convocants, amb veu i sense vot, que actuarà de secretari.

El guanyador es compromet a fer constar el guardó en ulteriors publicacions.

Els treballs s'han d'adreçar indistintament a: premi.mantoniacanals@gmail.com o bé a la seu de la societat:

Societat d'Educació Matemàtica de la CV "al-Khwārizmī"
Premi "M. Antònia Canals"
Apartat de correus: 22045
46071 València

I Edició de cursos de formació de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi

La Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana, en el seu afany de promoure activitats que considera d'interès per a la millora de l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, i intentant oferir un servei més al professorat, convoca la I Edició de Cursos de Formació per al curs 2013-2014.

Els cursos convocats en aquesta primera edició són:

- *L'ús de GeoGebra en la classe de Matemàtiques (iniciació).*
- *Ús del Moodle a la classe de Matemàtiques*.
- *L'ús de Wiris, wxMaxima i GeoGebra en la classe de Matemàtiques (iniciació).*
- *Edició de materials educatius digitals per a Matemàtiques amb eXeLearning.*
- *Introducció al LaTeX.*
- *La competencia matemática amb la calculadora gràfica.*
- *Jocs de taula en el currículum per a competències bàsiques.*

Matrícula

El període de matriculació comprendrà des del **15 d'octubre** a l'**1 de desembre** de 2013, ambdós inclosos.

En el moment de realitzar la petició o sol·licitud de matrícula la persona quedarà automàticament assignada al curs sol·licitat , disposant de cinc dies de termini per fer el pagament.

En tot cas, agrairem que ens avisen de la cancel·lació de la inscripció o de qualsevol incidència al correu formacio@semcv.org

Tindreu tota la informació detallada i el formulari d'inscripció a la nostra web: www.semcv.org

XI Jornades de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi.

Matemàtiques 3.14

Castelló 2014

- Organitza: SEMCV "Al- Khwarizmi"
- Convoquen: Universitat Jaume I de Castelló, SEMCV "Al- Khwarizmi"
- Col·labora: Departament de Matemàtiques de la Universitat Jaume I

Primer Anunci

Els dies **7 i 8 de març del 2014** tindran lloc a la Universitat Jaume I de Castelló les XI Jornades de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi amb el lema **Matemàtiques 3.14**.

Hem obert ja el termini de presentació de propostes de comunicacions, pòsters o tallers relacionats amb l'Educació Matemàtica, Geogebra, les Tecnologies de la Informació i la Comunicació aplicades a les **Matemàtiques, la Didàctica de les Matemàtiques, i en general, qualsevol** apartat teòric, pràctic o aplicat de les matemàtiques de qualsevol dels tres nivells, primària, secundària i universitat.

Podeu enviar les vostres propostes, abans del 10 de febrer del 2014 a la següent adreça electrònica xi_jornades@semcv.org a l'atenció de Javier Palomo Traver, indicant en l'assumpte XI Jornades matemàtiques.

La inscripció es farà en la web de la SEMCV des del 1 d'octubre del 2013 al 10 de febrer del 2014. Quotes d'inscripció: Socis: 10 €. No socis: 30 €. Podeu inscriure-vos omplint el formulari que trobareu al següent enllaç:

http://www.semcv.org/inscripcio_jornades/inscripcio_xi_jornades2014.html

Tota la informació anirà apareixent en la web www.semcv.org

Podeu demanar més informació a l'adreça electrónica:

xi_jornades@semcv.org

Castelló, setembre de 2013.

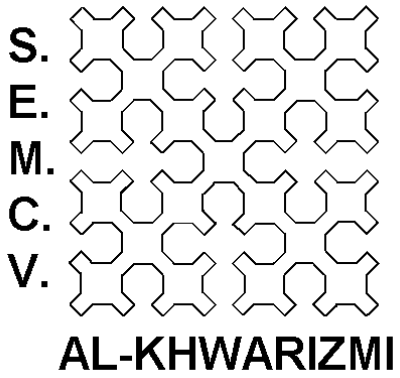
Esta revista es publica amb el suport de l'Acadèmia Valenciana de la Llengua

Trobaràs tota la informació en la nostra web.

Societat d'Educació Matemàtica
Comunitat Valenciana

Al-Khwarizmi

Visiteu-la: www.semcv.org



Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"