S.E.M.C.V. AL-KHWARIZMI

Problemes Olímpics



Revista de problemes de Matemàtiques
Número 117. Desembre 2022

GALERIA DE FOTOS PARTICIPANTS EN EL XVIII CONCURS DE FOTOGRAFIA "MATEMÀTICA A LA VISTA"



"Flecha real"
Elvira García Fernández. CFPA Babel (Alacant)



"Rombos repetitivos"
Gloria Carrión Ortiz. Col. Gençana (Godella)



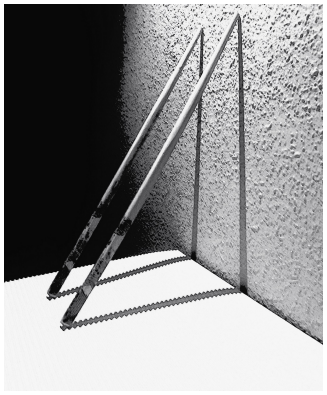
"Turismo matemático"
Iris Alcusón Rodríguez. IES María Moliner (Port de Sagunt)



"Cerca la incògnita"
Leonor García. CFPA Giner de los Ríos (Alacant)



"Las formes del mercado"
Natalia Castellote Bataller. IES Comarcal (Burjassot)



" Las sombras de Pitàgoras"
Alba Camacho Edo. IES San Antonio de Benagéber



"Fraccionando la vida". David Miguel Antón
IES Villa de Aspe (Aspe)



"Espejismo 180º". Iris Orient Salvador
Col. Izquierdo-Sorolla (Castelló de la Plana)



"Espiral espinosa". Paula García Yepes.
Col. Salesianos San Juan Bosco (València)

Ací teniu el número 117 de la revista **PROBLEMES OLÍMPICS** corresponent al mes de desembre de 2022, amb les proves proposades en la Fase Provincial d'Alacant i la prova individual de la Fase Autonòmica de l'Olimpíada Matemàtica 2022 que es va celebrar a la Nucia.

Ja tenim oberta la inscripció per a participar en la XXXIII Olimpíada Matemàtica 2023. Entreu en el formulari que trobareu en la convocatòria situada en la nostra pàgina web: https://www.semcv.org/olimpiada/

No ho deixeu per a última hora! Teniu fins al 22 de febrer de 2023 per a formalitzar la inscripció.

PROBLEMES OLÍMPICS

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Apartat 22045
46071 València

Director: Tomàs Queralt Llopis

Coordinador de redacció: Jorge Luján Mora

Correcció lingüística: José Fernando Juan García

Consell de redacció:

Juan Francisco Aguirre Nuñez, José María Ajenjo Vento, José María Alavedra Creixell, Mercedes Albert Gil, Carmen Albert Yáñez, Noelia Aleixandre Bonanad, Jaime Aparici Cruz, Fernando Arenas Planelles, José Manuel Arnau Pilar, Montserrat Belmonte García, Encarna Benalte Carnicell, Fernando Boïls Sais, Nicolau Borja Sanz, José Antonio Caja Borredá, Nieves Camáñez Navarro, Mónica Carbó Colecha, María Dolores Candela Oliver, Adrián Cuenca Avi, Vicente Diago Ortells, Rosa Felipe Orts, Francisco Fernández-Arévalo, Óscar Forner Gumbau, David Galiana Gázquez, Laura Gandía Ferrero, Davinia Gómez Sanchis, Ana Gomis Rubio, Hortensia González del Cerro, Julio César Jiménez Espejo, José Fernando Juan García, Joan López Piella, Mª Jesús Lozano Lacalle, Jorge Luján Mora, Eduardo Llopis Castelló, María José Mañanós Portolés, Raül Martínez Sendra, Jorge Mateu Alabort, Miria Minyana Pastor, David Miravet Fortuño, Beatriz Misó Sánchez, Gloria Molina Torres, José Antonio Mora Sánchez, Yolanda Mora Vila, Julia Muñoz Martínez, Mª Paz Muñoz Pérez, Montserrat Navarro Mateu, M. Teresa Navarro Moncho, Fco. Borja Navas Santamaría, Mari Carmen Olivares Iñesta, Remedios Payá Poveda, Juan Antonio Pérez Poquet, Laura Peris Ballester, Mª José Peris Cerdá, Carmina Peris Martí, Aitor Pereira Loidi, José Aurelio Pina Romero, Rebeca Reynau Planes, Mireia Polo Tamarit, Arturo Prieto Pérez, Tomás Queralt Llopis, Silvia Quilis Marco, Francisco A. Rodríguez Mayol, Isabel Roig Salvador, Lorena Roig Añó, Lledó Rosas Beltrán, Susana Rosell Tena, Roberto Royo Sancho, Domingo Rueda Morales, Mª Jesús Ruiz Maestro, Amparo Sáiz Sapena, Patricia Salvador Selma Lluis Evarist Sebastiá Giner, Josep Pasqual Segura Alares, Mariano Segura Mármol, Roberto Selva Gomis, David Sequi Martínez, Míriam Serrano González, Manuel Simón Montesa, Carles Teruel Ferragud, Marta I. Trapero Navarro, Pilar Usach Soriano, Manuel Valero Zamora, F. José Vicente Ferrández, Loreto Vidal Pitarch, Ángel Luis Zafrilla Villena.

D.L.: V-3026-2001
ISSN: 1578-1771

Portada: "Secció de cogombre estel·lat i enfadat". Quart premi compartit de l'Apartat I, del XVIII Concurs de fotografia matemàtica. Autor: David Bonet Martínez, de l'IES Mare Nostrum d'Alacant.

Et falta algun exemplar de la revista Problemes Olímpics? Si vols ens el pots demanar i te l'enviem a la teua adreça.

S. E. M. C. V. AL-KHWARIZMI

SOL·LICITUD D'ENVIAMENT DE NÚMEROS ANTERIORS DE "PROBLEMES OLÍMPICS"

Nom: _____ Cognoms: _____

Adreça: _____ Telèfon: _____

C.P. _____ Població: _____ Província: _____

Correu-e: _____ Tasca docent (curs, nivell, etc.)_____

Desitge rebre els següents números de la revista "Problemes Olímpics" a la meua adreça:

□ Problemes Olímpics Nº 11	□ Problemes Olímpics Nº 45	□ Problemes Olímpics Nº 84
□ Problemes Olímpics Nº 12	□ Problemes Olímpics Nº 46	□ Problemes Olímpics Nº 85
□ Problemes Olímpics Nº 13	□ Problemes Olímpics Nº 47	□ Problemes Olímpics Nº 86
□ Problemes Olímpics Nº 14	□ Problemes Olímpics Nº 48	□ Problemes Olímpics Nº 87
□ Problemes Olímpics Nº 15	□ Problemes Olímpics Nº 49	□ Problemes Olímpics Nº 88
□ Problemes Olímpics Nº 16	□ Problemes Olímpics Nº 50	□ Problemes Olímpics Nº 89
□ Problemes Olímpics Nº 17	□ Problemes Olímpics Nº 51	□ Problemes Olímpics Nº 90
□ Problemes Olímpics Nº 18	□ Problemes Olímpics Nº 52	□ Problemes Olímpics Nº 91
□ Problemes Olímpics Nº 19	□ Problemes Olímpics Nº 53	□ Problemes Olímpics Nº 92
□ Problemes Olímpics Nº 20	□ Problemes Olímpics Nº 54	□ Problemes Olímpics Nº 93
□ Problemes Olímpics Nº 21	□ Problemes Olímpics Nº 55	□ Problemes Olímpics Nº 94
□ Problemes Olímpics Nº 22	□ Problemes Olímpics Nº 56	□ Problemes Olímpics Nº 95
□ Problemes Olímpics Nº 23	□ Problemes Olímpics Nº 57	□ Problemes Olímpics Nº 96
□ Problemes Olímpics Nº 24	□ Problemes Olímpics Nº 58	□ Problemes Olímpics Nº 97
□ Problemes Olímpics Nº 25	□ Problemes Olímpics Nº 59	□ Problemes Olímpics Nº 98
□ Problemes Olímpics Nº 26	□ Problemes Olímpics Nº 60	□ Problemes Olímpics Nº 99
□ Problemes Olímpics Nº 27	□ Problemes Olímpics Nº 61	□ Problemes Olímpics Nº 100
□ Problemes Olímpics Nº 28	□ Problemes Olímpics Nº 64	□ Problemes Olímpics Nº 101
□ Problemes Olímpics Nº 29	□ Problemes Olímpics Nº 65	□ Problemes Olímpics Nº 102
□ Problemes Olímpics Nº 30	□ Problemes Olímpics Nº 67	□ Problemes Olímpics Nº 103
□ Problemes Olímpics Nº 32	□ Problemes Olímpics Nº 68	□ Problemes Olímpics Nº 104
□ Problemes Olímpics Nº 33	□ Problemes Olímpics Nº 69	□ Problemes Olímpics Nº 105
□ Problemes Olímpics Nº 34	□ Problemes Olímpics Nº 70	□ Problemes Olímpics Nº 106
□ Problemes Olímpics Nº 35	□ Problemes Olímpics Nº 73	□ Problemes Olímpics Nº 107
□ Problemes Olímpics Nº 36	□ Problemes Olímpics Nº 74	□ Problemes Olímpics Nº 108
□ Problemes Olímpics Nº 37	□ Problemes Olímpics Nº 75	□ Problemes Olímpics Nº 109
□ Problemes Olímpics Nº 38	□ Problemes Olímpics Nº 76	□ Problemes Olímpics Nº 110
□ Problemes Olímpics Nº 39	□ Problemes Olímpics Nº 77	□ Problemes Olímpics Nº 111
□ Problemes Olímpics Nº 40	□ Problemes Olímpics Nº 78	□ Problemes Olímpics Nº 112
□ Problemes Olímpics Nº 41	□ Problemes Olímpics Nº 79	□ Problemes Olímpics Nº 113
□ Problemes Olímpics Nº 42	□ Problemes Olímpics Nº 80	□ Problemes Olímpics Nº 114
□ Problemes Olímpics Nº 43	□ Problemes Olímpics Nº 81	□ Problemes Olímpics Nº 115
□ Problemes Olímpics Nº 44	□ Problemes Olímpics Nº 83	□ Problemes Olímpics Nº 116

Ens envies aquesta butlleta emplenada a la nostra adreça: Societat d'Educació Matemàtica "Al-Khwarizmi", Apartat 22045, 46071-València, indicant en el sobre "Revista Problemes Olímpics", o ens envies la comanda a la nostra adreça electrònica:

problemesolimpics@semcv.org

SUMARI

ENUNCIATS

FASE PROVINCIAL D'ALACANT 2022

NIVELL C..... p. 5
NIVELL A..... p. 10
NIVELL B..... p. 17

FASE AUTONÒMICA. ALACANT 2022

NIVELL C..... p. 24
NIVELL A..... p. 26
NIVELL B..... p. 28

SOLUCIONS

FASE PROVINCIAL D'ALACANT 2022

NIVELL C..... p. 31
NIVELL A..... p. 37
NIVELL B..... p. 47

FASE AUTONÒMICA. ALACANT 2022

NIVELL C..... p. 57
NIVELL A..... p. 59
NIVELL B..... p. 63

ENUNCIATS



XXXII OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE PROVINCIAL - ALACANT

PROBLEMES DE NIVELL C

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

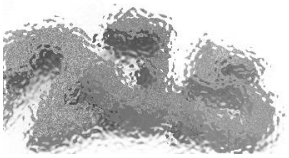
1. LES NOTES



Un professor qualifica amb dos punts positius els problemes ben fets i amb un punt negatiu els problemes mal fets. Després de quinze problemes, una alumna té divuit punts.

Quants problemes ha fet bé?

2. DÍGITS A L'ATZAR



Els dígits 2, 2, 3 i 5 s'ordenen a l'atzar per a formar un nombre de quatre dígits.

Quina és la probabilitat que la suma del primer i l'últim dígit siga parell?

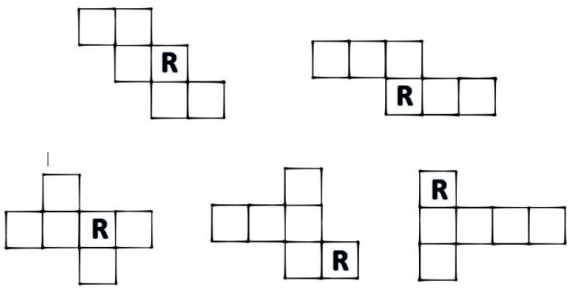
3. SEIENTS EN EL CINEMA



De quantes maneres diferents poden asseure's, en sis butaques consecutives d'un cinema, Maria, Reme, Paco, Mariano, Laura i Mariola, de manera que no hi haja dos xics junts?

4. DAUS PINTATS

Un cub té pintades les cares de tres colors: roig, blau i groc. Cada dues cares oposades, estan pintades del mateix color.



Les figures que apareixen baix, són desenvolupaments plans del cub. Si la cara roja hi està indicada, on han d'anar la resta dels colors?

5. I LA CLAU?

Carla va fer una broma al seu germà Vicent, en amagar-li la clau de casa en una caixa. Quan Vicent arribà al saló, trobà quatre caixes: tres buides i una que contenia la clau.

Carla va deixar escrit en un paper el missatge següent: "Exactament, només una de les afirmacions següents és vertadera:"

a) La clau és a la caixa 3 o a la caixa 4.
b) La clau és a la caixa 2.
c) La clau no és a la caixa 4.
d) La clau és a la caixa 1 o a la caixa 2.

A quina caixa està la clau? Raona la teua resposta.

FASE PROVINCIAL ALACANT– PROVA DE VELOCITAT

1. ELS COALES

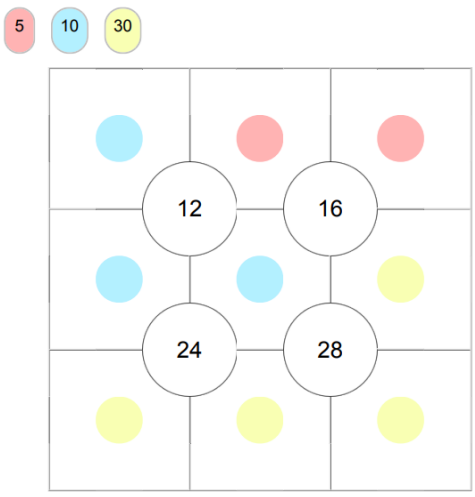


Una cria de coala es menja totes les fulles d'un eucaliptus en 10 hores. Els coales adults mengen el doble de ràpid que les cries.

En quantes hores es menjaran els tres coales —el pare, la mare i la cria— les fulles d'un eucaliptus?

2. KIKO

Escriu els nombres de l'1 al 9 en totes les caselles buides, sense repetir-ne cap, de manera que els cercles interiors sumen les quantitats indicades segons el color i cada quatre nombres sumen el nombre situat en el cercle d'enmig.



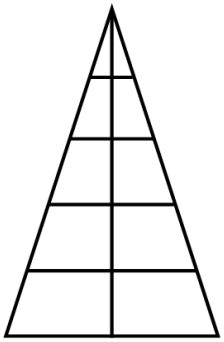
3. LLETRES



Quantes paraules diferents, tinguen o no tinguen sentit, es poden formar amb les lletres: A – E – M – S, de manera que tinguen quatre lletres, cap repetida i que la primera siga vocal?

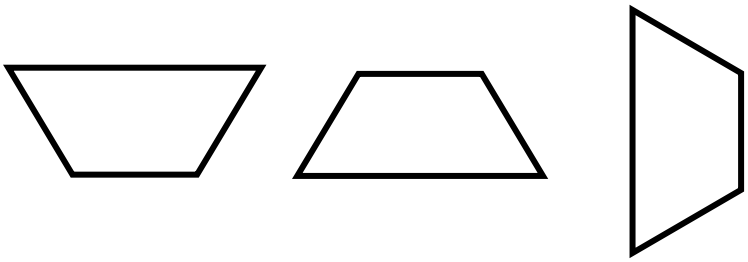
4. COMPTAR TRIANGLES

Quants triangles hi ha en la figura?



5. TRENCACLOSQUES

Amb les tres peces següents, serieu capaços de construir un triangle equilàter?



6. EL BOSC

Els boscos són molt importants per a la societat, per això tots els anys es fan repoblacions d'arbres.

Enguany, a l'alumnat de les Olimpíades Matemàtiques ens ha tocat plantar uns arbres amb la següent condició:



–Plantareu 10 arbres, formant 5 fileres amb 4 arbres cadascuna. Sabeu quina pot ser la distribució d'aquests arbres?

7. JOVE I VELL

Si A és més jove que B; C és més vell que A i D és més vell que C.

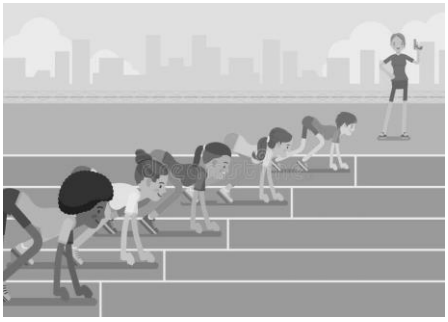
Quina de les afirmacions següents és certa?

a) C és més vell que B.
b) B és més vell que C.
c) D és més vell que A.
d) A és més vell que D.



8. LES CINC ATLETES

Cinc atletes comenten entre elles el resultat d'una carrera. Aquesta és la conversa:



Júlia: Ha fet molt de fred durant la carrera.

Laura: Aquesta vegada he arribat per davant de Maria.

Reme: Gemma no ha guanyat.

Gemma: Laura ha arribat la quarta.

Maria: Reme ha arribat darrere de Gemma.

Quin haurà estat l'ordre d'arribada?

9. QUATRE DÍGITS

El nombre quatre també té la seua màgia... Per això, intenteu col·locar entre els quatre nombres següents les operacions que siguen convenients perquè siguen certes totes les igualtats i s'obtinga el nombre quatre i també els seus múltiples, el 8 i el 12.

a) 4 3 2 1 = **4**

b) 4 3 2 1 = **8**

c) 4 3 2 1 = **12**

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE CAMP

1. BANC BLAU

Som a La Glorieta i com veureu hi ha 7 bancs. Imagineu que esteu els tres asseguts en un banc. De quantes maneres diferents podríeu tornar a seure en el mateix banc, sense tornar a fer-ho al mateix lloc?



2. OMPLINT PAPERERES

Seguim a la plaça i com veureu hi ha papereres. Si un de vosaltres portara a la motxilla una ampolla de litre i mig i amb ella volguéreu omplir la paperera, quants viatges hauríeu de fer a la font per a omplir-la?



3. COMPTANT QUADRATS A LA BIBLIOTECA PÚBLICA MUNICIPAL

Per a accedir a la biblioteca municipal, heu de passar per un mur de pedres que està subjecte per una malla metàl·lica formada per quadrats.

Si prenem com a referència únicament la façana del mur, quants quadrats té?

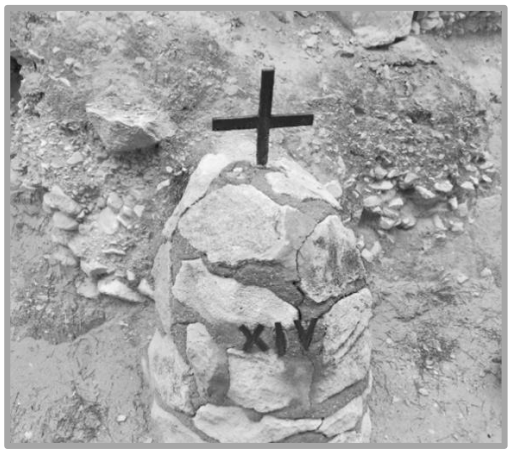


4. NOMBRES ROMANS PERDUTS

Després de l'ermita de Maria Magdalena, comença el passeig de la Santa. A la seua esquerra podeu veure uns monticles de pedra amb nombres romans incrustats. Aquests es corresponen amb les 14 estacions que formen un *Via Crucis*.

Algú, a mitjanit, s'ha quedat amb part d'aquests números i els ha utilitzat per a col·locar-los sobre la porta de sa casa.

Sabríeu dir en quin número viu?



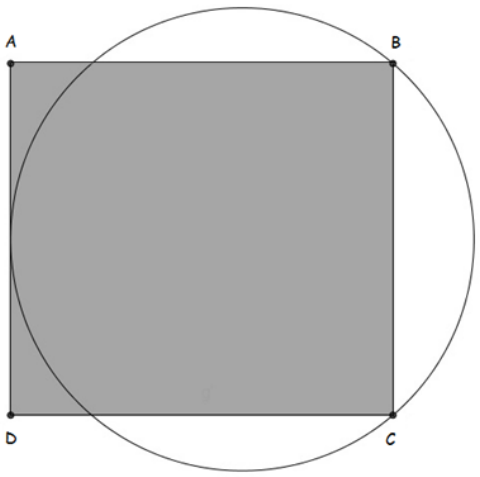
PROBLEMES DE NIVELL A

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. QUADRAT ENCAIXAT

Un quadrat ABCD es troba encaixat en la posició que s'observa a la figura, amb un cercle de radi 1 cm.

Quina és l'àrea del quadrat?



2. LA MEUA CLASSE

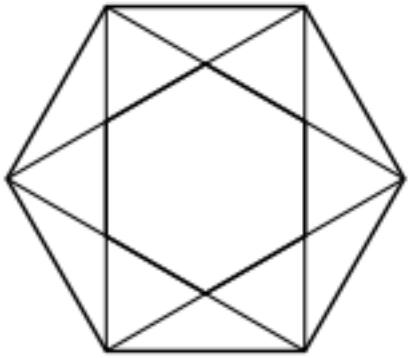
En la meua classe, la tercera part de l'alumnat juga a bàsquet i la resta a futbol. La quarta part de la classe porta ulleres. Si et dic que de setze que juguem a futbol jo soc l'únic que porta ulleres:

Quina és la probabilitat, si trie una persona de la classe a l'atzar, que jugue a bàsquet i no porte ulleres?



3. ÀREES DE DOS HEXÀGONS

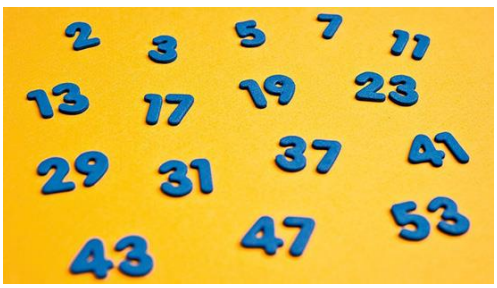
En la figura pots trobar dos hexàgons regulars. Quina raó hi ha entre les àrees de l'hexàgon major i l'hexàgon menor?



4. COSES DE NOMBRES PRIMERS

Podries trobar el nombre més baix que tinga 12 divisors?

Series capaç de trobar el nombre més baix que tinga 12 divisors i siga divisible entre 7?



5. EL CADENAT

Emilio té una cadena amb un cadenat de codi per a evitar que la seua bicicleta siga robada. Sabem que el nombre que obri el cadenat està format per tres xifres, el producte de les quals és imparell. També sabem que la suma dels dígits és un quadrat perfecte.

Quants codis diferents existeixen que verifiquen aquesta condició?



FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE VELOCITAT

1. LA CLAU DEL CADENAT

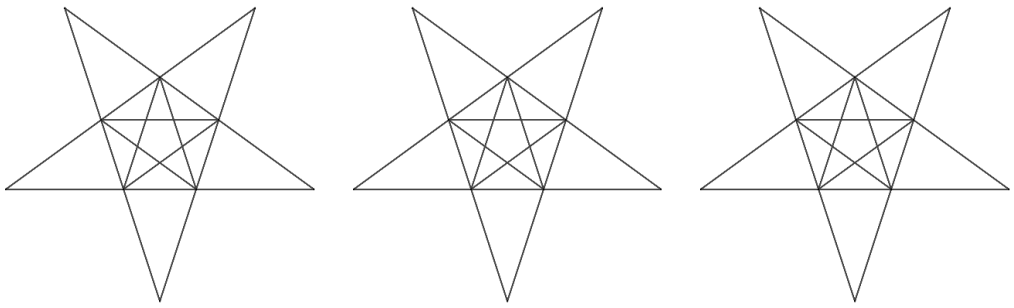
Núria té quatre cadenats diferents i només dues de les claus, que no sap a quins cadenats corresponen. Sabent que cada clau obre només un cadenat, quin és el nombre màxim d'intents necessaris per a determinar amb seguretat els cadenats que s'obren amb aquestes claus?



2. COMPTANT AS

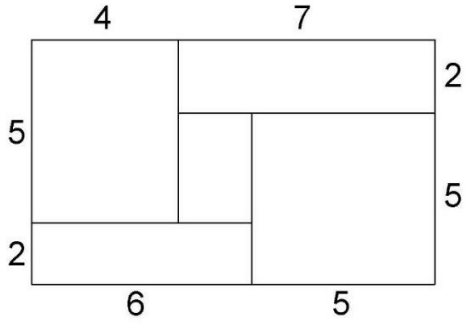
En el dibuix , quantes lletres A pots comptar?

Atenció: solament valen lletres amb les dues potes igual de llargues i el "travesser" creuant-les a la mateixa distància dels extrems.



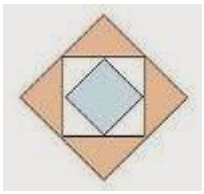
3. EL JARDÍ

Isabel planta a cadascuna de les parts del seu jardí rectangular un tipus de flors diferent. Les longituds, en metres, de cadascuna de les parts del seu jardí són les que es mostren en la figura. Isabel planta una flor per cada metre quadrat. Les petúnies costen 1 € cadascuna, els geranis 1,5 €, les margarides 2 €, les dàlies 2,5 € i les begònies 3 € cadascuna. Quina és, en euros, la mínima despesa que ha de realitzar Isabel?



4. QUADRATS SUPERPOSATS

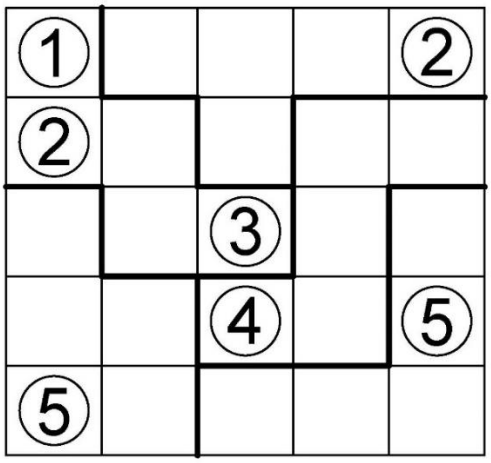
Es dibuixen tres quadrats i se superposen com es mostra en la figura.



Si l'àrea del quadrat xicotet és 10 cm^2, quina és la diferència entre les àrees dels quadrats major i menor?

5. DE L'1 AL 5

Col·loca els nombres de l´1 al 5 de manera que en cada fila, cada columna i cada recinte marcat apareguen els cinc nombres una vegada.



6. CLAVELL?

Sabem que cada lletra representa un nombre natural diferent, i que el valor d'una paraula és la suma de les lletres que la formen.

Amb les dades següents:

$CE = 5$

$CAE = 6$

$ALE = 8$

$VELA = 13$

$CLAVELL$=???

Quin nombre li correspon a CLAVELL?

7. VIATGES

Melcior ix a les nou menys cinc del matí de casa. Després de caminar mitja hora exacta a 3 km/h, l'arrepleguen amb cotxe. En aquest, recorre un altre tram a 50 km/h durant una hora i mitja. Just al baixar, es puja a un tren, que després de vint minuts a 210 km/h el deixa a l'estació, i després va a peu tres quarts d'hora a 4 km/h fins a arribar al seu destí final. A quina hora arriba Melcior al seu destí?

8. BARALLA DE CARTES



Xavi ha agafat una baralla de 20 cartes. A cadascuna de les cartes hi ha escrit un 3 o un 4. Després, ha fet la suma de tots els nombres de les cartes i ha obtingut un nombre divisible per 17. Sabries dir en quantes cartes ha escrit un 4?

9. QUI SOC?

Troba el major nombre de 7 xifres que complisca:

- Totes les seues xifres són diferents.
- Les seues xifres sumen exactament 29.
- És múltiple de 5.

Justifica la teua resposta.



FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE CAMP

1. LA FLOR VIOLETA

En la paret del pati del col·legi hi ha pintades tres flors de colors. Han decidit pintar altres 5 flors iguals a la violeta. Utilitzaran pintura de la marca PINTALUX que té un rendiment de 5,5 m^2/l. La pintura la trobem en envasos de diferents capacitats. Els preus en la ferreteria del poble són:

Capacitat de l'envàs	**Preu unitari**
759 ml	14 €
375 ml	9 €
125 ml	4,25 €

Quin serà el cost total de la pintura necessària per a pintar les cinc flors de color violeta?



2. LA FONT DE LA GLORIETA

Junt a la font de la Glorieta hi ha una bassa que s'omple amb l'aigua d'aquesta. Quants litres d'aigua caben en la bassa?





3. EL CIMENT

Quant ciment s'ha emprat en cadascun dels pilars que subjecten la barana del passeig?



4. LES ESCALES DE L'ARC

Al final del passeig que comença a l'ermita hi ha una rampa de terra que acaba en un parc infantil. Ací podem trobar aquest joc. Volem pujar a la part de dalt i som capaços de pujar un o dos esglaons al mateix temps. De quantes maneres podem pujar fins a la part més alta si ho fem per una de les parts de fora?



PROBLEMES DE NIVELL B

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. CAMIONS DE REPARTIMENT

Tres camions carregats van sortir simultàniament. Els tres havien de descarregar en llocs que estan a la mateixa distancia del magatzem central. Però les carreteres no permeten que tots viatgen a la mateixa velocitat; de forma que el camió que va arribar en segon lloc anava a 15 km/h menys que el que va arribar primer i a 3 km/h més que el que va arribar més tard. El segon camió va arribar 12 minuts més tard que el primer i 3 minuts abans que l'últim. Quina velocitat portava cada camió?



2. LA FUNCIÓ DE LA VENTAFOCS

Donada la funció real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que compleix que $f(x+y) = \frac{f(x)}{2} \cdot f(y)$ i que $f(x) = \frac{f(x+2)}{3}$, calcula el valor de $f(\frac{2022}{2021}) \cdot f(\frac{2020}{2021})$.

3. CERCLE INSCRIT EN TRIANGLE

Determina la raó que hi ha entre l'àrea d'un triangle rectangle isòsceles i la del cercle inscrit.

4. UN DIA EN LA FIRA

Ha arribat la fira a la ciutat! És sorprenent la quantitat d'atraccions que hi ha. Sobretot, hi ha una que desperta l'interès de la gent: la sènia.

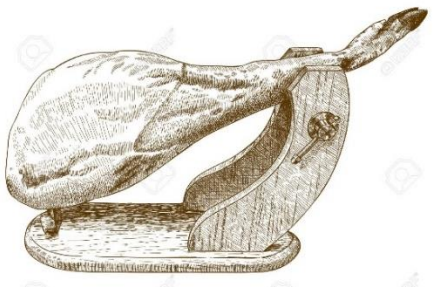
Pel que sembla, enguany hi ha una oferta en la qual regalen una papereta diferent per cada viatge. Les paperetes tenen els següents nombres:

3, 9, 12, 15, 18, 30, 51, 72, 84 i 87.

A més, es regalen en aquest ordre i tornen a començar quan s'entreguen tots els nombres.

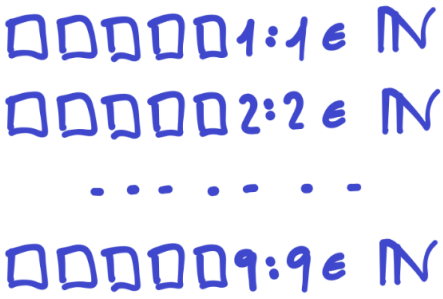
Aquelles persones que aconseguisquen reunir paperetes els nombres de les quals sumen 100, s'emportaran un pernil.

Quants viatges com a mínim són necessaris per a guanyar el pernil?



5. UN DIA EN LA FIRA

Sabem que nou nombres consecutius de sis xifres acaben en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Quins són els primers amb aquesta condició, que verifiquen que el primer és múltiple d'1, el segon de 2, el tercer de 3, ... i l'últim és múltiple de 9?



FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE VELOCITAT

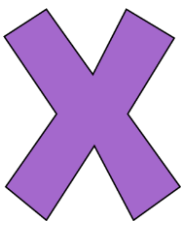
1. EQUACIONS

Els nombres x i y satisfan les equacions $\begin{cases} x(y+2)=100 \\ y(x+2)=60 \end{cases}$. Quin és el valor de l'expressió $x-y$?

2. QUINA X MÉS DIFÍCIL

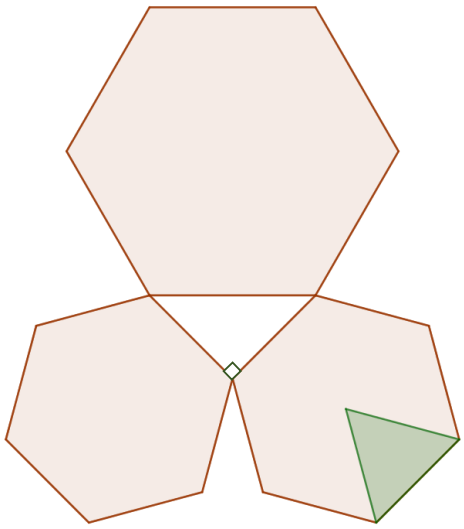
Calcula el valor de x:

$$9^{-3}=\frac{3^{\frac{12}{x}}}{3^{\frac{18}{x}}\cdot 9^{\frac{6}{x}}}$$



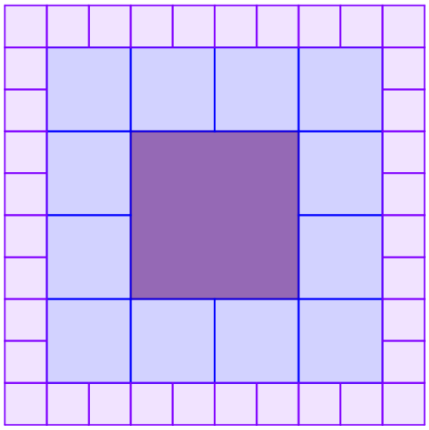
3. ÀREES HEXAGONALS

Calcula l'àrea total sabent que l'àrea de la superfície verda és 1 cm^2.



4. DE QUADRATS VA LA COSA

Tenim un quadrat de costat 1 cm. Envoltem aquest quadrat amb quadrats el costat dels quals és la meitat de l'inicial. És a dir, envoltem el quadrat de costat 1 cm amb quadrats de costat 0,5 cm. Després passem a envoltar de nou amb quadrats de costat igual a la meitat del costat dels quadrats anteriors, i obtenim la figura que es veu en la imatge. I així seguiríem successivament.



Volem representar aquest dibuix en un cartell quadrat. Com haurien de ser les dimensions (com a mínim) d'aquest cartell per a assegurar-nos que hi ha suficient per a qualsevol nombre de quadrats que hom vulga fer?

5. MOSAIC

En el dibuix apareix una peça d'un mosaic. Esbrina el perímetre i l'àrea de la figura que apareix ombrejada.



6. EL TRANSPORT

Sis amics volen passar les vacances junts, i decideixen, cada dos, utilitzar un mitjà de transport diferent. Marc no utilitza el cotxe. Àlex no va en avió. Alícia no viatja ni en cotxe ni en tren. Maria no va acompanyada de Pere i no usa l'avió. Àlex viatja amb Marc. Podries dir en quin mitjà de transport arriba al destí Josep?



7. DESBUDELLANT NOMBRES

Anomenem N un nombre. Aquest nombre és:

$$N = 2^{2022} \cdot 125^{675}$$

Es demana esbrinar:

a) El nombre de xifres que té el nombre N.

b) La suma de totes les xifres del nombre N.



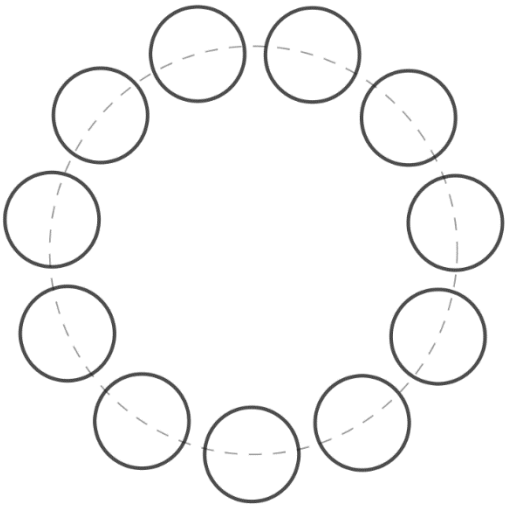
8. LES PARELLES

Determineu si és possible disposar sobre una circumferència els nombres 0, 1, 2, ..., 10 de manera que la suma de dos nombres adjacents qualssevol, siga com a molt:

a) 10

b) 11

c) 12



9. NOMBRE DE QUADRATS

Determina quants nombres enters, n, verifiquen que n^2 té el mateix nombre de xifres que n.

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE CAMP

1. LA FONT DE LA GLORIETA

Junt a la font de la Glorieta hi ha una bassa que s'omple amb l'aigua d'aquesta. Si per cada canella ixen 10 litres d'aigua per minut, quant de temps tardarà a omplir-se la bassa?





2. LA PLAÇA DE LA GLORIETA

Tres amics han quedat a les 17.00 h a la Plaça de la Glorieta. Els tres són puntuals però, com que van mirant el mòbil, no s'adonen de l'arribada dels altres. Si els tres elegeixen una porta per a entrar i un banc per a seure a l'atzar, quina és la probabilitat que es troben asseguts en distints bancs?

Quina és la probabilitat que entren per portes diferents i s'asseguen en bancs diferents?



3. LES BOMBETES DELS FANALS

L'ajuntament de Tibi vol canviar les bombetes dels fanals del passeig que comença en l'ermita, amb la finalitat de reduir el consum d'energia.

Han trobat dues empreses que venen les bombetes que ells volen instal·lar, amb les següents condicions:

Empresa *Il·lumina-t*: 5 € com a despesa d'enviament i 13 € la unitat.

Empresa *La llum*: 67,5 € de despeses d'enviament i 10,5 € la unitat.

Per a quin nombre de bombetes el cost d'ambdues empreses és el mateix?

Quina empresa els interessa més per a comprar totes les bombetes del passeig?



4. LES ESCALES DE L'ARC

Al final del passeig que comença en l'ermita hi ha una rampa de terra que acaba en un parc infantil. Ací podem trobar aquest joc. Volem pujar a la part de dalt i som capaços de pujar un o dos esglaons al mateix temps. De quantes maneres podem pujar fins a la part més alta si ho fem per la part d'enmig?



ENUNCIATS



XXXII OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE AUTONÒMICA - ALACANT

PROBLEMES DE NIVELL C

FASE AUTONÒMICA ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. TOT PER A LA SEUA LLAR



El director de l'empresa "Tot per a la seua llar" va contractar Sergi el passat mes de febrer perquè realitzara els treballs de neteja de la seua empresa amb motiu de la pandèmia que estem patint. Com a pagament es podia quedar amb els materials i equip necessaris per al treball i havia de cobrar a més 1 000 € a final de mes.

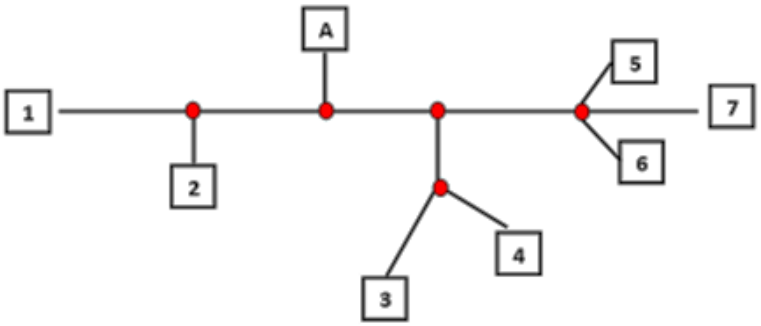
Passats 12 dies i no estant del tot satisfet amb la feina que Sergi venia realitzant, va procedir a acomiadar-lo, i li va donar com a pagament per la feina feta en tots aquests dies 200 € i el material i l'equip subministrats.

En quants euros estava valorat aquest material i equipament?

2. XARXA DE SENDERS

Els dígits 2, 2, 3 i 5 s'ordenen a l'atzar per a formar un nombre de quatre dígits.

Quina és la probabilitat que la suma del primer i l'últim dígit siga parell?
Aquest és el plànol d´una xarxa de senders de la comarca del Vinalopó Mitjà. A cada bifurcació, la probabilitat que els senderistes continuen per un camí o per un altre és la mateixa.



LLEGENDA
1 – Bosc
2 – Alberg
3 – Riu
4 – Cataractes
5 – Torre guaita
6 – Barranc
7 – Cova Negra

Si un grup de senderistes està situat a A sense saber a on anar:

a) Quina és la probabilitat que el grup puga arribar a l'alberg?

b) I que puguen veure i observar les cascades?

c) I que arriben fins a la torre de guaita?

d) I endinsar-se al bosc?

e) I la probabilitat que puguen arribar al riu per a poder refrescar-se?

f) I visitar la Cova Negra?

3. PARCEL·LES

El període de confinament ens ha fet valorar la importància de tenir la major extensió possible de jardí als nostres habitatges. Si tenim una parcel·la amb forma de triangle rectangle isòsceles que ocupa una extensió de 882 m^2 i volem construir una casa de planta quadrada tal com ens indica la figura:

a) Quina superfície de jardí podem tenir?

b) Quin seria el perímetre de la casa?



4. EL JOC DE LES FITXES

Sara i Pablo han d'ordenar l'habitació de jocs. Com que tenen pressa, s'ho juguen a la 21.

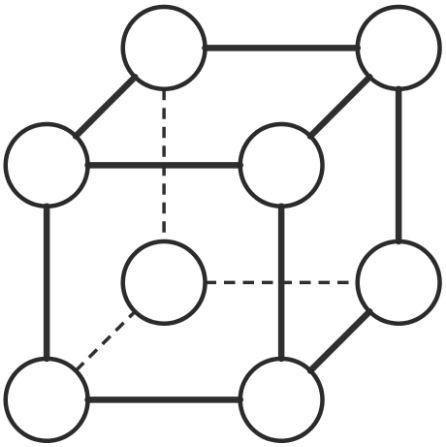
D'un grapat de 21 fitxes, poden retirar alternativament una, dues o tres fitxes de la pila. Qui retira l'última fitxa guanya i se'n podrà anar abans.

Quina estratègia utilitzaries per a guanyar?



5. EL CUB MÉS PRIMER

Intenta col·locar en els vuit vèrtexs del cub, els nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de manera que els nombres de qualsevol aresta sumen un nombre primer.



PROBLEMES DE NIVELL A

FASE AUTONÒMICA ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. SUMANT

Si $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = 5$, quant val $\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)^2$?



2. LLANÇANT MONEDES

Paula i Robert juguen a llançar monedes. En quin cas és més probable que obtinguen el mateix nombre de cares?:

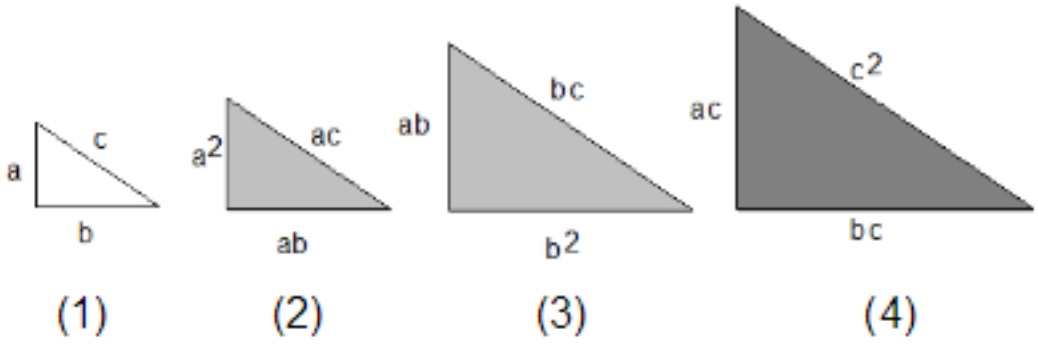
1r. cas: Paula llança 1moneda i Robert en llança 2.

2n. cas: Paula llança 2 monedes i Robert en llança 3.



3. DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA DE PITÀGORES

La imatge de la figura és una demostració del Teorema de Pitàgores. Justifica matemàticament aquesta demostració.



4. BALES VERDES

En una bossa tenim nou bales. Del contingut de la bossa sabem diverses coses:

1. Almenys n'hi ha una verda.
2. Si traiem quatre bales de la bossa, almenys dues seran del mateix color.
3. Si traiem cinc bales, com a molt n'hi ha tres del mateix color.

Quantes bales verdes hi ha a la bossa?



5. ESBORRANT XIFRES

Troba la suma de tots els nombres de cinc xifres distintes que donen lloc al número 3472 en esborrar-los una xifra.



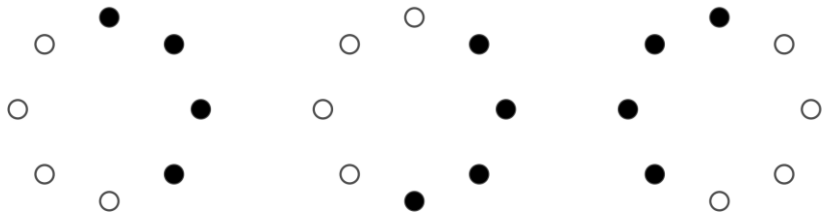
PROBLEMES DE NIVELL B

FASE AUTONÒMICA ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. BRAÇALET

Es tenen 4 perles idèntiques de color blanc i altres 4 de color negre.

Si gires un braçalet o fas una simetria (és a dir, el volteges), es considera el mateix braçalet. Per exemple, aquests tres braçalets es consideren iguals.



Raona quants braçalets diferents es poden fer utilitzant totes les perles.

2. TOTES LES FUNCIONS

Troba totes les funcions polinòmiques que són de la forma $f(x) = x^2 + ax + b$, que compleixen que $f(2) = 0$ i $f(f(3)) = 0$.



3. ENRAJOLANT EL TERRA

David té rajoles que tenen forma de triangle rectangle amb costats de 3 cm, 4 cm i 5 cm. Podrà David combinar les rajoles, sense deixar cap espai ni superposar-les, per a formar un rectangle de costats 2016 cm per 2021 cm?

Quantes rajoles necessitarà?

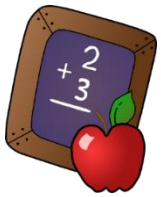
4. SUMES

Observa la suma següent:

$$9 + 26 = 35$$

Dels tres nombres implicats, un és divisible per 2, però no tots.

Un és divisible per 3, però no tots.



Un és divisible per 5, però no tots.

Un és divisible per 7, però no tots.

No hi ha cap nombre enter major que 1 que dividisca els tres nombres.

Una suma d'aquest tipus, direm que és 'interessant'.

a) Demostra breument que cap nombre major que u divideix dos dels tres nombres implicats en una suma *interessant*.

b) Pots trobar totes les sumes *interessants* en les quals el resultat és menor que 30?

5. EL BOSC

Sabem que nou nombres consecutius de sis xifres acaben en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Quins són els primers amb aquesta condició, que verifiquen que el primer és múltiple d'1, el segon de 2, el tercer de 3, ... i l'últim és múltiple de 9? Un capritxós mag viu en un bosc màgic en el qual inicialment hi ha 800 arbres: 100 avets i 700 pins.

Cada nit, el mag tria un únic arbre a l'atzar i li aplica un encanteri que el transforma en l'altra espècie.

El seu encanteri no sempre ix bé; només aconsegueix transformar una tercera part de les vegades un avet en un pi, però quan comença amb un pi és pitjor, només la cinquena part de les vegades aconsegueix que es transforme en un avet.

a) Què és més probable que passe la primera nit, que augmenten els avets, o els pins en el bosc (se suposa que no poden haver-hi més de 800 arbres en el bosc, no en naixen nous, ni tampoc en moren)?

b) I si hi haguera 700 avets i 100 pins al principi?

c) Amb quina quantitat inicial de pins i avets la probabilitat d'augmentar els pins o els avets és la mateixa?



SOLUCIONS



XXXII OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE PROVINCIAL - ALACANT

PROBLEMES DE NIVELL C

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. LES NOTES

Solució: Ha fet 11 problemes bé i quatre malament.

BÉ	PUNTS	MAL	PUNTS	TOTAL
14	28	1	-1	27
13	26	2	-2	24
12	24	3	-3	21
11	**22**	**4**	**-4**	**18**
10	20	5	-5	15

2. DÍGITS A L'ATZAR

Solució: La probabilitat és 1/3.

Es calcula primer la quantitat total de nombres de quatre xifres que es poden formar amb 2, 2, 3, 5.

Primer comptem de quantes formes diferents podem distribuir els dos dosos en els quatre llocs possibles, cosa que es pot fer de 6 maneres. Després, en algun dels dos espais restants col·loquem el 3, i en l'altre el 5. Per tant, n'hi ha $6 \times 2 = 12$ nombres.

Ara bé, perquè la suma dels dígits primer i últim siga parell, tots dos han de tenir la mateixa paritat, és a dir, tots dos són 2 o bé un és 3 i l'altre 5.

Només hi ha quatre d'aquests nombres: 2352, 2532, 3225, 5223.

En conseqüència, la probabilitat cercada és $4/12 = 1/3$.

3. SEIENTS EN EL CINEMA

Solució: 480 maneres distintes.

Primer determinem de quantes maneres es poden asseure Paco i Mariano:

- Si Paco s'asseu en la primera butaca, Mariano pot asseure's en quatre posicions entre la tercera i la sisena.
- Si ho fa en la segona, la tercera, la quarta o la cinquena, Mariano té tres opcions.
- Si Paco s'asseu en la sisena butaca, Mariano pot fer-ho en quatre llocs.

En total Paco i Mariano poden asseure's de $4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 20$ maneres diferents.

Les altres quatre butaques les ocuparan les dones de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneres diferents.

Així que el nombre total de formes distintes d'asseure's serà:

$$20 \cdot 24 = 480$$

Un altre procediment:

La quantitat de formes diferents de col·locar-se 6 persones en 6 seients consecutius és $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Dos xics junts poden posar-se de 10 formes distintes:

VVMMMM-MVVMMM-MMVVMM-MMMVVM-MMMMVV

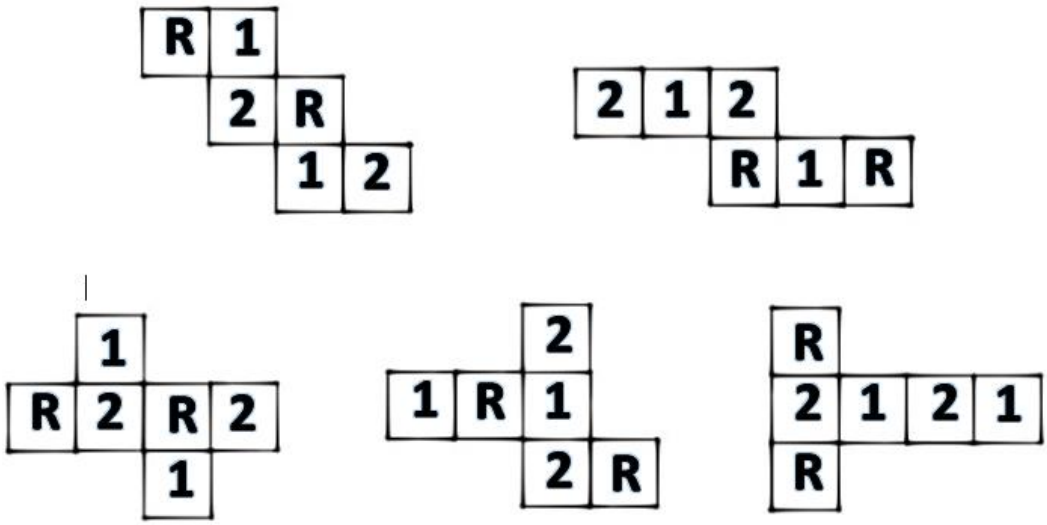
I en cadascuna d'aquestes cinc, els xics poden ser Paco-Mariano o Mariano-Paco.

Per a cadascuna d'aquestes 10 formes de col·locar-se els xics, les xiques es poden col·locar de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formes diferents; és a dir, hi ha $10 \times 24 = 240$ formes de col·locar-se amb dos xics junts.

Aleshores, els xics estaran separats de $720 - 240 = 480$ formes diferents.

4. DAUS PINTATS

Solució:



Tenint en compte que:

- 1 / 1 són cares oposades
- 2 / 2 són cares oposades
- R / R són cares oposades

I poden pintar les cares amb l'1 de blau o groc, i les cares amb el 2, de groc o blau, respectivament.

5. I LA CLAU?

Solució: La clau està a la caixa 4.

Si la clau és a la caixa 1, llavors *c* i *d* serien vertaderes, la qual cosa contradiu la hipòtesi.

De manera similar, si la clau és a la caixa 2, llavors *b* i *d* serien vertaderes simultàniament.

Si la clau és a la caixa 3, *a* i *c* serien vertaderes.

Per tant, la clau ha d'estar a la caixa 4, de manera que únicament l'opció *a* és vertadera.

FASE PROVINCIAL ALACANT– PROVA DE VELOCITAT

1. ELS COALES

Solució: Dues hores.

En una hora la cria menjarà 1/10 de les fulles de l'eucaliptus i cada adult 2/10. Els tres en menjaran en una hora 5/10, és a dir, la meitat de l'eucaliptus. Així que per a menjar-se'n totes les fulles, necessitaran dues hores.

2. KIKO

Solució:



3. LLETRES

Solució: 12 paraules.

Hi ha 6 paraules que comencen per A i, de la mateixa manera, hi ha 6 paraules que comencen per E.

Per tant, hi ha 12 paraules.

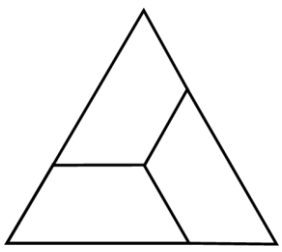
A E M S	A E S M	A S E M	A S M E	A M E S	A M S E
E A M S	E A S M	E S A M	E S M A	E M A S	E M S A

4. TRIANGLES

Solució: 15 triangles.

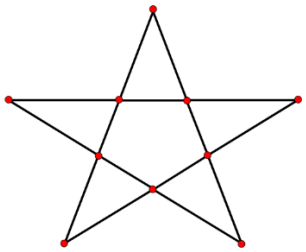
5. TRENCACLOSQUES

Solució:



6. EL BOSC

Solució: 10 arbres en cinc fileres amb quatre arbres cadascuna.



7. JOVE I VELL

Solució: La solució és la c.

Si C és més vell que A i D és més vell que C, tenim $a < c < d$, on a, c i d són les edats respectives. Aleshores, D és més vell que A.

8. LES CINC ATLETES

Solució:

Posicions d'arribada:
1a. – Júlia, 2a. – Gemma, 3a. – Reme, 4a. – Laura, 5a. – Maria.

9. GELAT

Solució: Se'n presenta una per a cada cas, però poden haver-ne més.

a) $4 + 3 - 2 - 1 = 4$

b) $4 + 3 + 2 - 1 = 8$

c) $4 \cdot 3 \cdot (2 - 1) = 12$

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE CAMP

1. BANC BLAU

Solució: N'hi ha dues maneres.

La primera combinació no és vàlida perquè l'enunciat diu "tornar a seure". Per tant, només n'hi ha dues maneres:

A	B	C	–	Primera combinació
B	C	A		
C	A	B		

2. OMPLINT PAPERERES

Solució: Caldria fer 35 viatges.

Altura $= 54$ cm Diàmetre $= 35$ cm $\rightarrow$ Radi $= 17{,}5$ cm

V = àrea de la base × altura

$V = \pi \times 17{,}5^2 \times 54 \approx 51\,954{,}09\ \text{cm}^3 \approx 51{,}95$ litres

$51{,}95\ \text{l} : 1{,}5\ \text{l} \approx 34{,}6 \rightarrow 35$ viatges

3. COMPTANT QUADRATS A LA BIBLIOTECA PÚBLICA MUNICIPAL

Solució: 11 915 quadrats.

Façana dreta:

18 rectangles × 7 fileres × 50 quadrats en cada rectangle:

$18 \times 7 \times 50 = 6\,300$ quadrats

Façana esquerra:

15 rectangles × 7 fileres × 50 quadrats en cada rectangle:

$15 \times 7 \times 50 = 5\,250$ quadrats

Part superior de la porta (llinda):

36,5 quadrats × 10 fileres:

$36{,}5 \times 10 = 365$ quadrats

Total quadrats de la façana:

$6\,300 + 5\,250 + 365 = 11\,915$ quadrats

4. FER VOLTES AL PATI

Solució: 1, 2, 5 o 10.

Els nombres romans que falten són: I I

Amb ells es poden formar els següents nombres:

II - V - X (en romans) i també l'I, utilitzant-ne només un.

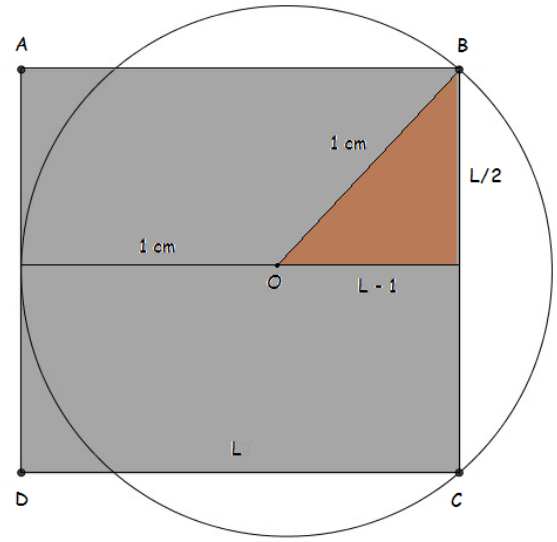
PROBLEMES DE NIVELL A

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. QUADRAT ENCAIXAT

Solució: Àrea del quadrat* $= \frac{64}{25}$ *cm²* $<$ *π cm²* $=$ *Àrea del cercle.

Si suposem que el costat del quadrat fa L cm, es té:



S'aplica el teorema de Pitàgores i s'obté:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (L-1)^2 = 1^2$$

$$\frac{L^2}{4} + L^2 - 2L + 1 = 1 \;\rightarrow\; \frac{L^2}{4} + L^2 - 2L = 0$$

$$5L^2 - 8L = 0 \rightarrow L(5L-8) = 0 \rightarrow \begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

El costat del quadrat ha de mesurar $\frac{8}{5} = 1{,}6$ cm.

L'àrea del quadrat és $\text{À}_{\text{quadrat}} = 1{,}6^2 = 2{,}56\ \text{cm}^2$, que és menor que l'àrea del cercle $\text{À}_{\text{cercle}} = \pi \cdot 1^2 = \pi\ \text{cm}^2$.

2. LA MEUA CLASSE

Solució: La probabilitat és 1/8.

Com que $\frac{1}{3}$ de la classe juga a bàsquet i $\frac{2}{3}$ juga a futbol (16 alumnes), es dedueix que juguen a bàsquet 8 alumnes i que la classe està formada per 24 alumnes.

Si de 24 alumnes, $\frac{1}{4}$ porta ulleres, tenim 6 alumnes amb ulleres.

	BÀSQUET	FUTBOL	TOTALS
AMB ULLERES	5	1	6
SENSE ULLERES	3	15	18
TOTALS	8	16	24

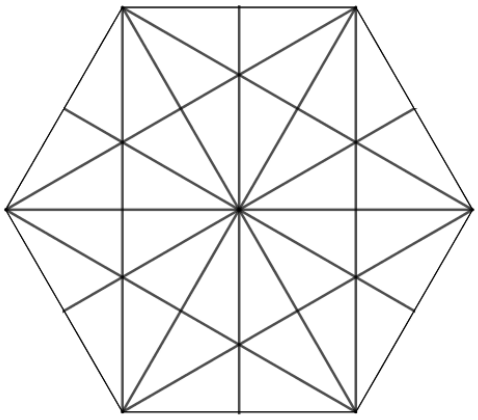
La probabilitat que una persona de la classe jugue a bàsquet i no porte ulleres, si mirem la taula de contingència, serà:

$$\mathrm{P(B\ i\ sense\ U)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

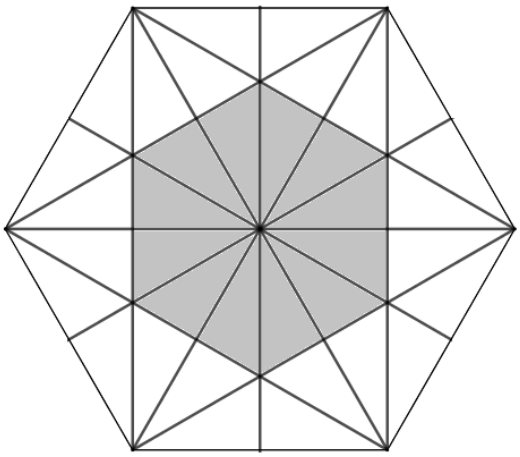
3. ÀREES DE DOS HEXÀGONS

Solució: La raó és 3:1.

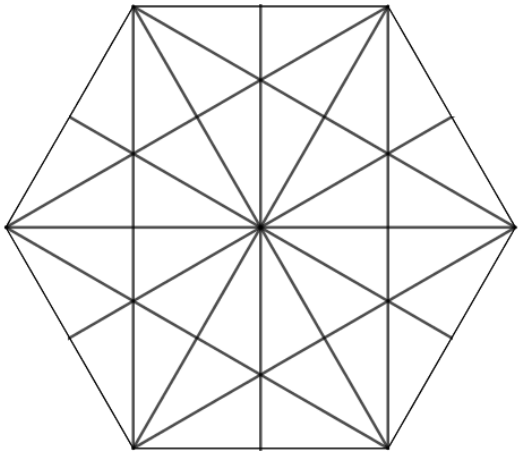
Una imatge val més que mil paraules. Si dividim la figura com apareix davall:



Comptem els triangles que apareixen en l'hexàgon gran i en el xicotet:



Són 12 triangles



Són 36 triangles

Per tant, la relació és 36:12 = 3:1.

4. COSES DE NOMBRES PRIMERS

Solució: Els nombres són el 60 i el 84 respectivament.

Per a obtenir les solucions s'han de considerar les combinacions que en multiplicar resulten 12 ($2 \cdot 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 2 \cdot 6$ i $1 \cdot 12$), però és senzill veure que quan es resta una unitat a cada combinació, s'obtindrà 1-1-2, 2-3, 1-5, 0-11, i que la que donarà nombres més reduïts serà la primera.

A més, perquè s'obtinga el menor nombre, s'hauran d'utilitzar els nombres primers de menor valor, és a dir, 2, 3 i 5, i elevar-los en ordre invers perquè el valor siga el més petit possible. Dit d'una altra forma, $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 150$ és més gran que $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$. El nombre 60 és el més petit amb 12 divisors: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

En cas que, a més, siga divisible entre 7, haurem de combinar les menors bases possibles amb els exponents que facen els nombres més petits, que, com en el cas anterior, seran 1-1-2. Les menors bases seran 2 i 3, a més del propi 7. S'obté $2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 84$.

5. EL CADENAT

Solució: Existeixen 13 codis diferents.

Com que el producte dels tres nombres és imparell, els únics nombres possibles són 1, 3, 5, 7 i 9.

La suma dels tres dígits ha de ser 4, 9, 16 o 25, ja que ha de ser un quadrat perfecte.

Les úniques combinacions possibles de nombres, sense tenir en compte l'ordenació, són:

{1,3,5} que, en tenir en compte diferents ordenacions, origina 6 codis.

{1,1,7} que, en tenir en compte diferents ordenacions, origina 3 codis.

{3,3,3} que origina 1 únic codi.

{9,9,7} que origina 3 codis.

Per tant, tenim 6+3+1+3=13 codis diferents.

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE VELOCITAT

1. LA CLAU DEL CADENAT

Solució: 5 intents com a màxim.

Ens posem en el pitjor dels casos:

La primera clau no obri els tres primers cadenats. No cal provar amb el quart cadenat, ja que sabem que n'obri un dels quatre.

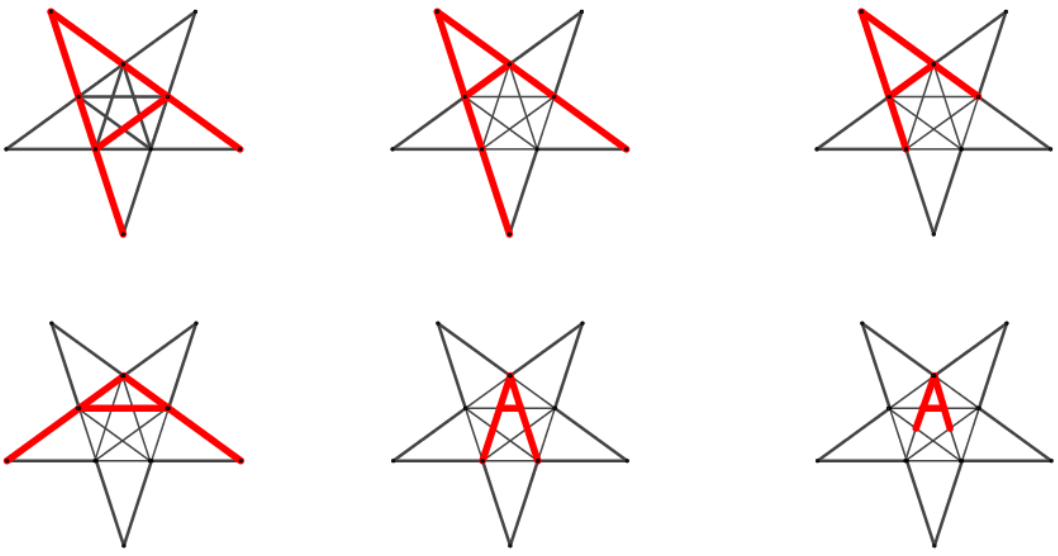
Queden tres cadenats i una clau. Si no obri els dos primers, serà la del tercer i últim.

Amb cinc intents sabem a quin cadenat correspon cada clau.

2. COMPTANT AS

Solució: 90 en total.

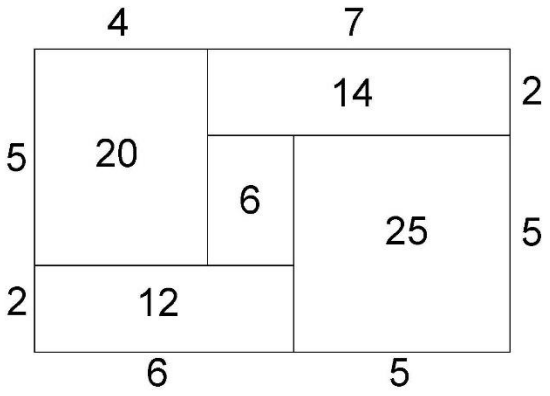
De cada tipus n'hi ha 5 en cadascuna de les tres figures:



3. EL JARDÍ

Solució: Isabel ha de gastar almenys 131 €.

Escrivim en cadascun dels espais el nombre de flors que hi planta Isabel:



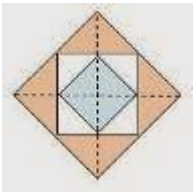
La mínima despesa possible vindrà donada quan el nombre de flors en cada part siga menor com més cares siguen. Així doncs, col·locaria 6 begònies (3 € cadascuna), 12 dàlies (2,5 € cadascuna), 14 margarides (2 € cadascuna), 20 geranis (1,5 € cadascun) i 25 petúnies (1 € cadascuna). És a dir, la despesa mínima seria:

$$6 \cdot 3 + 12 \cdot 2{,}5 + 14 \cdot 2 + 20 \cdot 1{,}5 + 25 \cdot 1 = 131 \text{ €}$$

4. QUADRATS SUPERPOSATS

Solució: La diferència entre les àrees és 30 cm².

Traçant les diagonals del quadrat major, podem observar que el quadrat menor està format per 4 triangles iguals, mentre que el major està format per 16 d'aquests triangles.



Així, la diferència entre les seues àrees equival a 12 d'aquests triangles o, el que és el mateix, al triple de l'àrea del quadrat menut.

Per tant, la diferència buscada és:

$$\mathrm{D} = 3 \cdot 10 = 30 \text{ cm}^2.$$

5. DE L'1 AL 5

Solució:

①	3	5	4	②
②	4	1	5	3
4	5	③	2	1
3	2	④	1	⑤
⑤	1	2	3	4

6. CLAVELL?

Solució: A CLAVELL li correspon el nombre 23.

Si CAE $= 6$ i CE $= 5$, el valor de A serà 1.

De VELA $= 13$ i ALE $= 8$ deduïm que V $= 5$.

Per a E i C, sabem que han de ser un 2 i un 3, ja que són diferents i sumen 5 (L'opció d'1 i 4 no és possible perquè A $= 1$). També sabem que LE val 7 (de ALE $= 8$ i $A = 1$), i si ho unim a la informació anterior, si E $= 2$ llavors L $= 5$, que no és possible perquè el 5 sabem que és la V. Aleshores, ha de ser E $= 3$ i L $= 4$. La C serà 2.

Per tant, CLAVELL $= 2 + 4 + 1 + 5 + 3 + 4 + 4 = 23$.

7. VIATGES

Solució: Melcior arribarà al seu destí a les 12.00.

És un problema que obliga a discriminar les dades importants d'aquelles que són irrellevants per a la pregunta que ens fan. Les velocitats són dades que només serveixen per a despistar.

Es desplaça mitja hora + hora i mitja + vint minuts + tres quarts d'hora:

$$30 + 90 + 20 + 45 = 185 \text{ minuts}$$

Si surt a les 8.55 i el viatge dura 3 hores i 5 minuts, arribarà a les 12.00.

8. BARALLA DE CARTES

Solució: Són 8 les cartes que porten un 4 escrit.

Com que totes les cartes porten un 3 o un 4 escrit, la suma dels nombres de les vint cartes ha de ser, com a mínim, $60 = 3 \cdot 20$.

Com que 60 no és múltiple de 17, hi ha d'haver cartes que porten un 4 escrit.

Tampoc totes les cartes poden portar un 4 escrit, perquè $20 \cdot 4 = 80$ no és múltiple de 17.

Si anomenem q el nombre de cartes que porten un 4, estem buscant un nombre de la forma $60 + q$ i múltiple de 17, ja que per cada carta que porte un 4, afegim 1 a la suma de 60 ($4 = 3 + 1$). Aquest nombre ha de ser menor de 80 i entre els múltiples de 17 (17, 34, 51, 68, 85,…) sols trobem el 68.

Són 8 cartes les que porten un 4 escrit.

9. QUI SOC?

Solució: El major nombre possible és 9 863 210.

La condició de trobar el major nombre de 7 xifres diferents obliga que comence per 98. Si intentem posar un 7 en la tercera xifra, al sumar 9, 8 i 7 ens dona 24, i només resten 5 per a arribar a 29, que ha de ser la suma total de les xifres. Però és impossible aconseguir que les quatre xifres que queden siguen diferents i sumen 5, perquè el mínim seria $3 + 2 + 1 + 0 = 6$. Aleshores, la tercera xifra ha de ser 6 i el nombre resultant és 9 863 210, que a més és múltiple de 5.

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE CAMP

1. LA FLOR VIOLETA

Solució: El cost mínim serà 36,25 €.



Primer, arrepleguem les dades:

Diàmetre del cercle negre: 116 cm.

Diàmetre del semicercle violeta dels pètals: 34 cm.

Grossor de la línia dels pètals: 2 cm.

Ample de la tija: 19,5 cm.

Altura de la tija: 12 cm.

Rendiment pintura: 5,5 m^2/l.

Ara, calcularem l'àrea que haurem de pintar de negre:

Àrea del cercle: $\text{À}_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 58^2 \approx 10\,568 \text{ cm}^2$

Àrea del tronc: $\text{À}_2 = 19{,}5 \cdot 12 = 234 \text{ cm}^2$

El contorn dels pètals és una corona circular de radis 19 cm y 17 cm:

$$\text{À}_3 = \frac{1}{2}\pi \cdot (R^2 - r^2) = \frac{1}{2}\pi \cdot (19^2 - 17^2) = 36\,\pi \text{ cm}^2 \approx 113{,}10 \text{ cm}^2$$

Així, l'àrea de la superfície negra d'una flor és:

$$S_{\text{negra}} = \text{À}_1 + \text{À}_2 + 10 \cdot \text{À}_3 \approx 10\,568 + 234 + 10 \cdot 113{,}1 = 11\,933 \text{ cm}^2$$

Passem ara a calcular l'àrea que haurem de pintar de violeta:

Àrea d'un pètal: $\text{À}_4 = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\, 17^2 \approx 453{,}96 \text{ cm}^2$

Àrea de la superfície violeta: $S_{\text{violeta}} = 10 \cdot \text{À}_4 \approx 4539{,}6 \text{ cm}^2$

Per tant, per a cinc flors, les àrees seran:

$S_{5N} \approx 5 \cdot 11\,933 = 59\,665 \text{ cm}^2 = 5{,}9665 \text{ m}^2$

$S_{5V} \approx 5 \cdot 4539{,}6 = 22\,698 \text{ cm}^2 = 2{,}2698 \text{ m}^2$

Tenint el compte el rendiment de 5,5 m^2/l, calcularem la quantitat de pintura necessària:

$$V_N \approx 5{,}9665 \cdot \frac{1}{5{,}5} \approx 1{,}085\,\text{l} = 1085\,\text{ml}$$

$$V_V \approx 2{,}2698 \cdot \frac{1}{5{,}5} \approx 0{,}413\,\text{l} = 413\,\text{ml}$$

I, finalment, el cost:

Quantitat necessària	**Envàs de 750 ml**	**Envàs de 375 ml**	**Envàs de 125 ml**	**Quantitat total (ml)**	**Cost (€)**
1085 ml	2	0	0	1500	28
1085 ml	1	1	0	1125	23
413 ml	1	0	0	750	14
413 ml	0	2	0	750	18
413 ml	0	1	1	500	13,25
413 ml	0	0	4	500	17

Així, el cost total serà de 36,25 €.

2. LA FONT DE LA GLORIETA

Solució: Hi caben 284 544 litres.



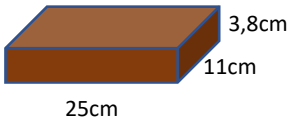


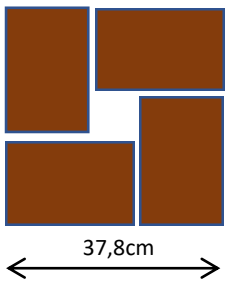
Les mesures són: 15,20 m per 15,60 m i 1,20 m de profunditat.

$$15{,}20 \cdot 15{,}60 \cdot 1{,}20 = 284{,}544\ \text{m}^3 = 284\,544\ \text{litres}.$$

3. EL CIMENT

Solució: En cada pilar s'han emprat uns 82,06 litres de ciment.







Àrea rectangle= $25 \cdot 11 = 275 \text{cm}^2$

Àrea quadrat blanc= $15{,}8^2 \approx 250 \text{cm}^2$

L'altura del pilar és de 124 cm i té 22 rajoles; per tant, l'altura que queda ocupada pels espais entre rajola i rajola és: $124 - 22 \cdot 3{,}8 = 40{,}4$ cm.

El volum de ciment que hi ha entre rajoles (sense el buit central) serà:

$$40{,}4 \cdot (275 \cdot 4) = 44\,440 \text{ cm}^3$$

I en vertical: $[(1{,}8 \cdot 11 \cdot 3{,}8) \cdot 4] \cdot 22 \approx 6621 \text{ cm}^3$

El volum de ciment al buit central serà: $250 \cdot 124 = 31\,000 \text{ cm}^3$

En total el volum de ciment és:

$$44\,440 + 6621 + 31\,000 = 82\,061 \text{ cm}^3 \approx 82{,}06 \text{ l}$$

Un mètode alternatiu per a resoldre el problema seria el següent:

Volum total del pilar: $V_P = 124 \cdot 37{,}8^2 \approx 177\,176 \text{ cm}^3 \approx 177 \text{ l}$

Volum d'una rajola: $V_R = 25 \cdot 11 \cdot 3{,}8 = 1045 \text{ cm}^3$

Quantitat de rajoles: $N = 4 \cdot 22 = 88$

Volum: $V_C = V_P - N \cdot V_R \approx 177\,176 - 88 \cdot 1045 = 85\,216 \approx 85 \text{ l}$

4. LES ESCALES DE L'ARC

Solució: De 5 maneres diferents.

Les diferents possibilitats venen representades a la taula de la dreta. Cada fila representa una manera, i les creus són els esglaons pels que passem:

	1	2	3	F
1	×	×	×	×
2		×	×	×
3	×		×	×
4	×	×		×
5		×		×

PROBLEMES DE NIVELL B

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. CAMIONS DE REPARTIMENT

Solució: 90 km/h, 75 km/h i 72 km/h.

Si les velocitats són x, y, z, i els temps t_1, t_2 i t_3, tenim:

$$\begin{cases} y = x - 15 \\ z = y - 3 \end{cases} \rightarrow \quad z = x - 15 - 3 = x - 18$$

$$\begin{cases} t_2 = t_1 + 12 \\ t_2 = t_3 - 3 \end{cases}$$

$$\text{velocitat} = \frac{\text{espai}}{\text{temps}} = \frac{e}{t} \quad \rightarrow \quad \text{temps} = \frac{\text{espai}}{\text{velocitat}} = \frac{e}{v}$$

$$\begin{cases} \frac{e}{y} = \frac{e}{x} + 12 \\ \frac{e}{y} = \frac{e}{z} - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{e}{x-15} = \frac{e}{x} + 12 \\ \frac{e}{x-15} = \frac{e}{x-18} - 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} e \cdot x = (x-15) \cdot (e + 12x) \\ e \cdot (x-18) = (x-15) \cdot (e - 3x + 54) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 15e = 12x^2 - 180x \\ -3e = -3x^2 + 99x - 810 \end{cases} \rightarrow \quad 3x^2 - 315x + 4050 = 0$$

$$x = 90 \ ; \ x = 15$$

Si $x = 15 \rightarrow y = 0$. Solució no vàlida. Per tant:

$$x = 90 \text{ km/h}; y = 90 - 15 = 75 \text{ km/h}; z = 90 - 18 = 72 \text{ km/h}$$

2. LA FUNCIÓ DE LA VENTAFOCS

Solució: El producte és 12.

Primer, com que $f(x+y) = \frac{f(x)}{2} \cdot f(y)$, tenim:

$$f(x) \cdot f(y) = 2 \cdot f(x+y)$$

Per tant:

$$f\left(\frac{2022}{2021}\right) \cdot f\left(\frac{2020}{2021}\right) = 2 \cdot f\left(\frac{2022}{2021} + \frac{2020}{2021}\right) = 2 \cdot f\left(\frac{4042}{2021}\right) = 2 \cdot f(2)$$

Per altra banda, per l'altra propietat, tenim que:

$$f(x) = \frac{f(x+2)}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f(x)}{2} \cdot f(2) = \frac{1}{6} \cdot f(x) \cdot f(2)$$

D'aquesta igualtat es dedueix que $f(2) = 6$ i, per tant:

$$f\left(\frac{2022}{2021}\right) \cdot f\left(\frac{2020}{2021}\right) = 2 \cdot f(2) = 2 \cdot 6 = 12$$

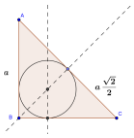
3. CERCLE INSCRIT AL TRIANGLE

Solució: La raó és $\frac{3+2\sqrt{2}}{\pi}$.

Si considerem el triangle rectangle isòsceles de la figura, de catets de longitud a, la hipotenusa mesura $a\sqrt{2}$. El punt de tangència P està en el punt mitjà d'aquesta i, per tant, dista $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ del vèrtex C. Si anomenem P' el punt de tangència de la circumferència amb el catet BC, la distància entre P' i B és igual al radi del cercle. Per tant el radi és:

P

$$r = a - a\frac{\sqrt{2}}{2} = a\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$



P'

L'àrea del cercle és:

$$\text{À}_\text{C} = \pi r^2 = \pi\left(a\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi a^2 \frac{4-4\sqrt{2}+2}{4} = \pi a^2 \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$

L'àrea del triangle és:$\text{À}_\text{T} = \frac{a^2}{2}$

I la raó entre les àrees:

$$R = \frac{\text{À}_T}{\text{À}_C} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\pi a^2 \frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\pi(3-2\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}}{\pi(9-8)} = \frac{3+2\sqrt{2}}{\pi}$$

4. CERCLE INSCRIT AL TRIANGLE

Solució: No és possible guanyar el pernil.

La suma de múltiples d'un nombre és múltiple d'aqueix mateix nombre. Com que els nombres de les paperetes són múltiples de 3, i 100 no ho és, no és possible guanyar el pernil.

5. MÚLTIPLES CONSECUTIUS

Solució: 100801, 100802, ..., 100809.

Podem emprar diferents mètodes per a arribar a la solució. En mostrarem dos a continuació.

- Primer mètode:

El nombre natural x immediatament anterior als que busquem ha de ser múltiple d'1, de 2, de 3, ... i de 9, ja que si $x+1$ és múltiple d'1, $x+2$ és múltiple de 2, etcètera, tenim que per a cada valor de $k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ existeix un nombre a_k tal que $x+k = a_k \cdot k$ i, per tant, $x = (a_k - 1)k$ (múltiple de k).

$$\text{MCM}(1,2,3,\ldots,9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$$

El primer múltiple de 2520 de sis xifres és el $40 \cdot 2520 = 100\,800$, ja que $100\,000 : 2520 \approx 39{,}68$.

Els nombres han de ser 100 801, 100 802, 100 803, 100 804, 100 805, 100 806, 100 807, 100 808 i 100 809.

- Segon mètode:

La suma de totes les xifres de l'últim dels nombres d'aquesta llista, és múltiple de 9 (per ser-ho el propi nombre).

Si comencem per 100 000, i considerem els nombres que acaben en 9, cap dels següents nombres és múltiple de 9: 100 009, 100 019, 100 029, 100 039, 100 049, 100 059, 100 069 i 100 079. En tots els casos la suma de les xifres és major que 9 i menor que 18. El següent, 100 089, sí que és múltiple de 9. Provem amb 100 081, 100 082, 100 083..., però quan arribem a 100 087 veiem que no és divisible per 7.

El següent nombre que acaba en i és divisible per 9 és 100 179, però si comencem per 100 171, el vuitè nombre no és divisible per 8. Si continuem provant, arribarem a la sèrie que finalitza en 100 809. Aquesta llista compleix totes les condicions i és la mateixa que hem trobat més amunt.

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE VELOCITAT

1. EQUACIONS

Solució: $x - y = 20$.

$$\begin{cases} x(y+2) = 100 \\ y(x+2) = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy + 2x = 100 \\ yx + 2y = 60 \end{cases}$$

Restant les dues equacions:

$$2x - 2y = 40 \rightarrow 2(x-y) = 40 \rightarrow x - y = 20$$

2. QUINA X MÉS DIFÍCIL

Solució: $x = 3$.

$$9^{-3} = \frac{3^{\frac{12}{x}}}{3^{\frac{18}{x}} \cdot 9^{\frac{6}{x}}} = \frac{3^{\frac{2\cdot 6}{x}}}{3^{\frac{2\cdot 9}{x}} \cdot 9^{\frac{6}{x}}} = \frac{9^{\frac{6}{x}}}{9^{\frac{9}{x}} \cdot 9^{\frac{6}{x}}} = \frac{1}{9^{\frac{9}{x}}} = 9^{-\frac{9}{x}}$$

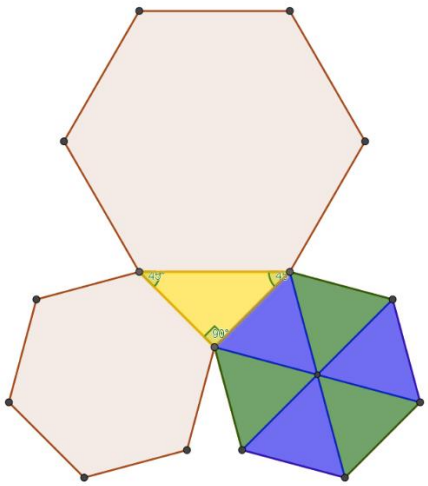
Igualant les dos expressions:

$$9^{-\frac{9}{x}} = 9^{-3} \rightarrow \frac{9}{x} = 3 \rightarrow x = 3$$

3. ÀREES HEXAGONALS

Solució: L'àrea total és 24 cm².

Cadascun dels hexàgons xicotets es pot descompondre en 6 triangles equilàters com el de la figura original. Per tant l'àrea de cada hexàgon xicotet és de 6 cm^2.



El triangle format pels tres hexàgons és un triangle rectangle, per la qual cosa s'hi pot aplicar el teorema de Pitàgores. Si diem c al costat de l'hexàgon xicotet, llavors el costat del gran serà: $c' = c\sqrt{2}$. La raó entre els costats dels dos hexàgons és: $\sqrt{2}$ i, per tant, la raó entre les seues àrees és 2.

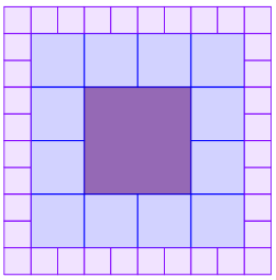
L'àrea de l'hexàgon gran és $2 \cdot 6 = 12$ cm^2 i l'àrea total és 24 cm^2.

4. DE QUADRATS VA LA COSA

Solució: 3 cm × 3 cm.

Cada nou quadrat té el costat igual a la meitat de l'anterior, pel que tenim una successió tal que:

$$a_i = \frac{1}{2^i} \ , i \geq 1$$



Com que ens interessa sumar tots els costats possibles (de forma indefinida), obtenim la suma dels infinits termes de la successió:

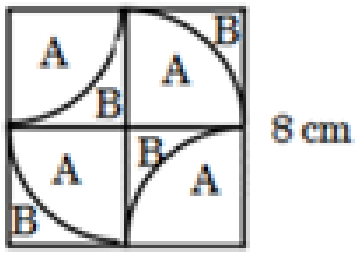
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

Ara bé, com que tenim el quadrat central de costat 1 cm i els dos laterals que convergeixen a 1, bastarà que el costat del cartell mesure 3 cm d'ample per a abraçar la figura. Anàlogament, per simetria, ha de tenir una altura de 3 cm. Les dimensiones seran 3 cm × 3 cm.

5. MOSAIC

Solució: L'àrea és 32 cm² i el perímetre 8π cm.

La figura està formada per quatre peces iguals del tipus A i altres quatre peces del tipus B:



La figura ombrejada està formada per dues del tipus A i dues del tipus B; per tant, la seua àrea serà la meitat de l'àrea del quadrat inicial:

$$\frac{64}{2} = 32 \text{ cm}^2.$$

Cada un dels arcs que limiten la figura és un quadrant de circumferència; per tant, els quatre arcs formen una circumferència de radi $\frac{8}{2} = 4$ cm.

El perímetre valdrà $2\pi \cdot 4 = 8\pi$ cm.

6. EL TRANSPORT

Solució: Josep arriba en cotxe.

Sabem que Maria no va amb Pere i no usa l'avió. Aleshores, com que Marc i Àlex viatgen junts en tren i Alícia sols pot viatjar en avió, Maria ha de viatjar en cotxe amb Josep. Tenim:

	Marc/Àlex	**Alícia/Pere**	**Maria/Josep**
Cotxe	NO	NO	SÍ
Avió	NO	SÍ	NO
Tren	SÍ	NO	NO

7. DESBUDELLANT NOMBRES

Solució: a) El nombre té 2025 xifres; b) Les seues xifres sumen 8.

Aquest problema es resol fent ús de les propietats de les potències.

En primer lloc cal factoritzar les bases en nombres primers:

$$N = 2^{2022} \cdot 125^{675} = 2^{2022} \cdot (5^3)^{675} = 2^{2022} \cdot 5^{2025}$$

Tenint en compte la propietat de la multiplicació de potències de la mateixa base, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, es pot reescriure l'expressió del nombre N de la següent forma:

$$N = 2^{2022} \cdot 5^{2025} = 2^{2022} \cdot 5^{2022} \cdot 5^3$$

Si ara es té en compte la propietat del producte de potències amb el mateix exponent, $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$, es pot reescriure novament l'expressió com segueix:

$$N = 2^{2022} \cdot 5^{2025} = 10^{2022} \cdot 5^3 = 125 \cdot 10^{2022}$$

Per tant, el nombre *N* és el format pels dígits 1, 2 i 5 seguits de 2022 zeros. Aleshores, les respostes a les preguntes formulades són:

a) El nombre *N* té 2025 xifres.

b) La suma de totes les xifres del nombre *N* és 8.

8. LES PARELLES

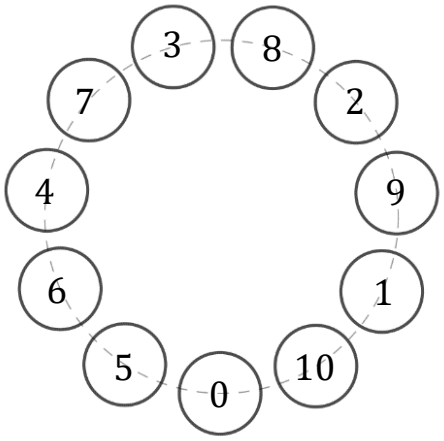
Solució: a) No; b) Sí; c) Sí.

Tallem la circumferència a l'esquerra del 0. Descartat el 0, ens queden 10 nombres, que podem agrupar en cinc parelles que sumen en total:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$$

Per tant, no pot succeir que les cinc sumen menys d'11, ja que $55/5 = 11$.

Així que la resposta a la pregunta del primer apartat és *no*, mentre que per als altres dos apartats és *sí*, com podem comprovar si, per exemple col·loquem els nombres en el següent ordre:



9. NOMBRE DE QUADRATS

Solució: Sols 7 nombres enters compleixen la propietat.

Analitzarem primer el cas dels nombres positius:

Com que $10^2 = 100$, $100^2 = 10\,000$, i així successivament, veiem que si un nombre és major que 10, no pot verificar la propietat.

Un senzill compte ens diu que únicament la verifiquen 1, 2 i 3.

Una vegada analitzat el cas dels nombres positius, estenem el mateix raonament als nombres negatius i hi afegim també el zero. Tenim:

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

FASE PROVINCIAL ALACANT – PROVA DE CAMP

1. LA FONT DE LA GLORIETA

Solució: Tardarà aproximadament 6 h 46 min 28 s.

Les mesures són: 15,20 m × 15,60 m i 1,20 m de profunditat. La capacitat:

$$15{,}20 \cdot 15{,}60 \cdot 1{,}20 = 284{,}544 \text{ m}^3 = 284\,544 \text{ litres}$$

11 canelles, a 10 litres per minut cada canella: 110 l/m.

$$284\,544 : 110 = 2586{,}7\widehat{63} \text{ min} \approx 43 \text{ h } 6 \text{ min } 46 \text{ s}$$

2. LA PLAÇA DE LA GLORIETA

Solució: Aproximadament, 0,612 i 0,294.

A la plaça hi ha 7 bancs i s'hi pot entrar per 5 portes diferents.

El nombre de possibilitats en què les tres persones entren per portes diferents és $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (5 opcions per a una qualsevol de les tres persones, diguem-ne la primera; 4 que no coincidisquen amb la triada per aquella, per a la segona persona; i 3 que no coincidisquen amb les dues anteriors, per a la tercera persona).

El nombre total de possibilitats és $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

Si considerem l'esdeveniment $E =$ 'entrar per portes distintes':

$$P(E) = \frac{60}{125} = 0{,}48$$

D'igual forma, $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ són les possibilitats de seure en tres bancs diferents; i $7^3 = 343$ són totes les possibilitats de seure tres persones en set bancs.

Si considerem ara l'esdeveniment $S =$ 'seure en bancs distints':

$$\mathrm{P}(S) = 210 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \approx 0{,}612$$

Finalment, si considerem E i S com a esdeveniments independents, tenim que la probabilitat que entren per portes diferents i seguen en bancs diferents és:

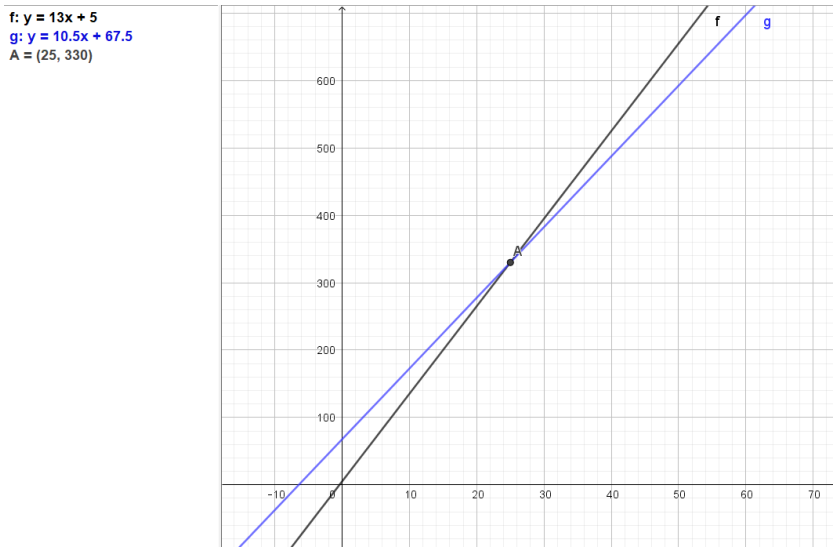
$$P(E \cap S) \approx 0{,}48 \cdot 0{,}612 = 0{,}294$$

3. LES BOMBETES DELS FANALS

Solució: El cost coincideix per a 25 bombetes. Interessa l'empresa B.

De manera gràfica, o resolent el sistema que indiquem a continuació, es troba que el nombre de bombetes per al qual el cost total coincideix en les dues empreses és 25.

$$\begin{cases} y = 13x + 5 \\ y = 10{,}5x + 67{,}5 \end{cases}$$



Com que al passeig hi ha 29 fanals, els interessa més l'empresa B. Els costos respectius són:

Empresa A: $13 \cdot 29 + 5 = 382$ €. Empresa B: $10{,}5 \cdot 29 + 67{,}5 = 372$ €.

4. LES ESCALES DE L'ARC

Solució: De 21 maneres diferents.

Si numerem els esglaons amb 1, 2, 3, 4, 5 i 6, i la posició superior com a F, en la taula següent recollim totes les possibilitats. La X en una casella indica que l'esglaó corresponent s'ha utilitzat per a pujar fins a la part més alta de l'estructura:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
6	X	X	X	X	X	X		X	X	X		X	X		X			X			
5	X	X	X	X	X		X	X	X		X	X		X		X	X		X	X	X
4	X	X	X	X		X	X	X		X	X		X	X	X	X		X	X		
3	X	X	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X			X			X	X
2	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X				X	X	X	X	X	X	
1	X		X	X	X	X	X					X	X	X	X	X	X				X
F	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

SOLUCIONS



XXXII OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE AUTONÒMICA - ALACANT

PROBLEMES DE NIVELL C

FASE AUTONÒMICA ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. TOT PER A LA SEUA LLAR

Solució: L´equipament lliurat a Sergi està valorat en 400 €.

Anomenem x al valor de l'equipament. Si Sergi haguera treballat els 28 dies de febrer, el seu sou hauria sigut de $1000 + x$ euros, però sabem també que, com que només va treballar 12 dies, li van correspondre $200 + x$ euros.

Plantegem una regla de tres:

28 dies $\longrightarrow$ $1000 + x$ euros

12 dies $\longrightarrow$ $200 + x$ euros

Com que aquesta regla de tres és simple i directa, podem escriure la proporció següent:

$$28 \cdot (200 + x) = 12 \cdot (1000 + x)$$

$$5600 + 28x = 12\,000 + 12x$$

$$28x - 12x = 12\,000 - 5\,600$$

$$16x = 6\,400 \rightarrow x = 6400/16 \rightarrow x = 400\,€$$

2. XARXA DE SENDERS

Solució:

Amb un arbre de probabilitats en què apareguen les bifurcacions del plànol podem establir fàcilment les probabilitats:

a) $\mathrm{P}(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $\mathrm{P}(4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

c) $\mathrm{P}(5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

d) $\mathrm{P}(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

e) $\mathrm{P}(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

f) $\mathrm{P}(7) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

3. PARCEL·LES

Solució: a) La superfície de jardí té una àrea de 441 m2; b) El perímetre de la casa és de 84 m.

a) En traçar la diagonal paral·lela a la hipotenusa, el quadrat queda dividit en dos triangles que són congruents amb els reservats per a jardí. Aleshores, el quadrat ocupa la meitat de la superfície de tota la figura.
Per tant, l'àrea del jardí és: $\frac{882}{2} = 441\ \text{m}^2$

b) La superfície de la casa és un quadrat de costat c. I com que l'àrea d'aquest quadrat és $441\ \text{m}^2$:

$$c^2 = 441 \rightarrow c = \sqrt{441} = 21\ \text{m}$$

Per tant, el perímetre: $4 \times 21 = 84$ m.

4. EL JOC DE LES FITXES

Solució:

Tindrà avantatge qui jugue en primer lloc: si retira primer una fitxa, l'oponent pot retirar fins a la segona, la tercera o la quarta. A continuació la primera persona retira fins a la cinquena; després, les necessàries fins a la novena; en el següent torn, fins a la tretzena i, després, fins a la dissetena. En aquest punt, l'altra persona, n'agafe les que n'agafe, es veurà obligada a deixar encara 1, 2 o 3 fitxes sobre la taula, amb la qual cosa la primera persona podrà retirar-ne la darrera.

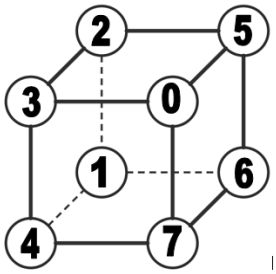
El procediment, si el nombre total de fitxes és múltiple de n, el nombre màxim de fitxes a retirar per cada persona en cada torn, és:

- Retirar una fitxa en la primera jugada.
- En les següents jugades retirar $n + 1$ menys les que retire l'altra persona: si en retira 1, la primera en lleva n; si en retira 2, $n - 1$; si 3, $n - 2$... D'aquesta manera, en cada jugada es retiren $n + 1$ fitxes entre ambdues persones, i la primera persona a jugar podrà ser l'última a retirar fitxa.

5. EL CUB MÉS PRIMER

Solució:

Els nombres primers que ixen són: 3 – 5 – 7 – 11 – 13.



PROBLEMES DE NIVELL A

FASE AUTONÒMICA ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. SUMANT

Solució: El valor buscat és 20.

Sabem que:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = 5 \rightarrow a+\frac{1}{a} = \sqrt{5} \qquad (1)$$

D'altra banda:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3 = a^3+3a^2\frac{1}{a}+3a\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3} = a^3+3a+3\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3} =$$

$$= \left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

Aïllant:

$$a^3+\frac{1}{a^3} = \left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right) = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right) =$$

$$= 5\sqrt{5}-3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Per tant el valor buscat és:

$$\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$$

Podeu comprovar que el resultat no canvia si considerem l'arrel negativa en l'expressió (1):

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = 5 \rightarrow a+\frac{1}{a} = -\sqrt{5}$$

2. LLANÇANT MONEDES

Solució: És més probable en el primer cas.

Com que $\frac{1}{3}$ de la classe juga a bàsquet i $\frac{2}{3}$ juga a futbol (16 alumnes), es dedueix que juguen a bàsquet 8 alumnes i que la classe està formada per 24 alumnes. Siguen els successos P_0, P_1 i P_2 'Paula obté 0, 1 i 2 cares', respectivament; i R_0, R_1 i R_2 els successos, 'Robert obté 0, 1 i 2 cares', respectivament.

En el primer cas la probabilitat d'obtindre el mateix nombre de cares és:

$$\mathrm{P}(P_0 \cap R_0) + \mathrm{P}(P_1 \cap R_1) = 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/8 + 1/4 = 3/8$$

En el segon cas, la probabilitat d'obtindre el mateix nombre de cares és:

$$P(P_0 \cap R_0) + P(P_1 \cap R_1) + P(P_2 \cap R_2) =$$
$$1/4 \cdot 1/8 \ + 1/2 \cdot 3/8 + 1/4 \cdot 3/8 = 5/16$$

Un procediment alternatiu a l'anterior és:

		Robert			
		CC	C+	+C	++
Paula	C		=	=	
	+				=

$$\text{Probabilitat} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}} = \frac{3}{8}$$

		Robert							
		CCC	CC+	C+C	+CC	C++	+C+	++C	+++
Paula	CC		=	=	=				
	C+					=	=	=	
	+C					=	=	=	
	++								=

$$\text{Probabilitat} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

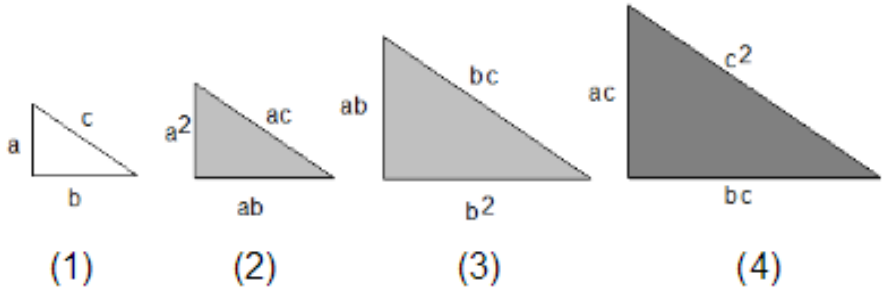
$$\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$$

3. DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA DE PITÀGORES

Solució:

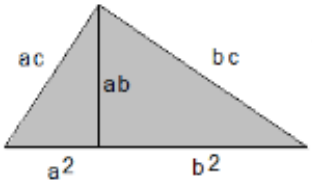
En primer lloc, ens hem d'adonar del següent:

- El triangle (2) té els seus costats multiplicats per a.
- El triangle (3) té els seus costats multiplicats per b.
- El triangle (4) té els seus costats multiplicats per c.



(1) (2) (3) (4)

En segon lloc, unim els triangles (2) i (3) pel costat de longitud ab:



(5)

Una vegada arribats a aquest punt s'observa que el triangle (5), resultant de la unió, i el triangle (4) tenen costats iguals, bc i ac. Per tant, les hipotenuses d'aquests també han de ser iguals. S'obté així la demostració del Teorema de Pitàgores.

Referències: La demostració és atribuïda a Frank Burk, qui la va publicar el 1996.

4. BALES VERDES

Solució: 3 bales verdes.

Que en traure 4 bales sapiguem que almenys un color es repetirà, ens indica que no hi ha més de tres colors, ja que si foren quatre, podria donar-se el cas que en traguérem una de cada i no n'hi hagués de repetides.

De cada color no pot haver-hi més de tres bales, perquè si no fora així, en traure´n 5, podríem tenir quatre o cinc del mateix color.

Com que en total ha d'haver-hi 9 bales, a la bossa hi ha tres colors i tres bales de cada color. Com que sabem que un dels colors és el verd, la resposta que busquem és tres bales verdes.

5. ESBORRANT XIFRES

Solució: La suma és 1 143 375.

Com que totes les xifres dels nombres han de ser distintes, per a la xifra esborrada ens queden sis opcions: 0, 1, 5, 6, 8, 9.

A més hem de tindre en compte que el zero no pot ocupar el lloc de les desenes de miler.

Els nombres que busquem són de la forma:

Nombres					Quantitat	Opcions per a X
3	4	7	2	X	6	0, 1, 5, 6, 8, 9
3	4	7	X	2	6	0, 1, 5, 6, 8, 9
3	4	X	7	2	6	0, 1, 5, 6, 8, 9
3	X	4	7	2	6	0, 1, 5, 6, 8, 9
X	3	4	7	2	5	1, 5, 6, 8, 9

En total haurem de sumar $6 \cdot 4 + 5 = 29$ nombres. Sumarem per columnes, sabent que $0 + 1 + 5 + 6 + 8 + 9 = 29$:

Unitats: $29 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 75$ unitats

Desenes: $2 \cdot 6 + 29 + 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 7 \cdot 5 = 160$ desenes $= 1600$ unitats

Centenes:

$$7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 29 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 157 \text{ centenes} = 15\,700 \text{ unitats}$$

Unitats de miler:

$$4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 29 + 3 \cdot 5 = 116 \text{ unitats de miler} = 116\,000 \text{ unitats}$$

Desenes de miler:

$$3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 29 = 101 \text{ desenes de miler} = 1\,010\,000 \text{ unitats}$$

Si sumem les quantitats obtingudes, el nombre buscat serà:

$$75 + 1600 + 15\,700 + 116\,000 + 1\,010\,000 = 1\,143\,375$$

PROBLEMES DE NIVELL B

FASE AUTONÒMICA ALACANT – PROVA INDIVIDUAL

1. BRAÇALET

Solució: 8 braçalets diferents.

Considerem totes les formes en què es poden ordenar les perles negres. N'hi ha 5 possibilitats diferents:

Cas A: 4 perles negres consecutives.

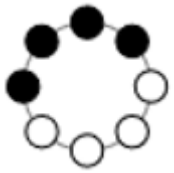
Cas B: 3 perles negres consecutives + 1 perla negra.

Cas C: 2 perles negres consecutives + 2 perles negres consecutives.

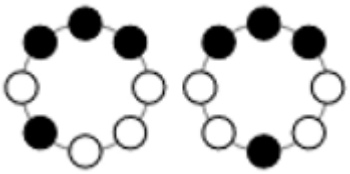
Cas D: 2 perles negres consecutives + 1 perla negra + 1 perla negra.

Cas E: 4 perles negres no consecutives.

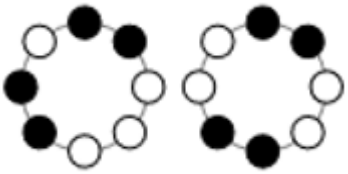
Cas A (4): En aquest cas solament hi ha una opció per a col·locar les perles blanques, les quals estaran consecutives.



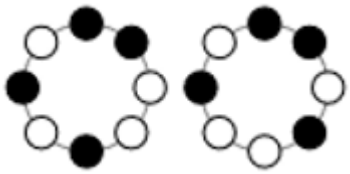
Cas B (3 + 1): En aquest cas es tenen dues opcions per a col·locar les perles blanques, les quals es poden agrupar de dues maneres diferents: 3 + 1 o 2 + 2. Per tant, es poden obtenir 2 braçalets.



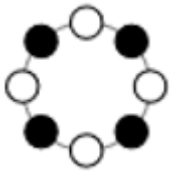
Cas C (2 + 2): En aquest cas també hi ha dues possibilitats per a col·locar les perles blanques, les quals novament es poden agrupar de dues maneres diferents: 3 + 1 ó 2 + 2. Per tant, es poden obtindre 2 braçalets.



Cas D (2 + 1 + 1): En aquest cas hi ha tres posicions on col·locar les perles blanques i, per tant, una única forma de col·locar-les: 2 + 1 + 1. N'hi ha, però, 2 possibles braçalets, depenent de com es col·loquen les perles negres.



Cas E (1 + 1 + 1 + 1): Les perles blanques han d'ocupar quatre posicions diferents. Per tant, n'hi ha una única opció i un únic braçalet.



Per tant, es poden fer 8 braçalets diferents.

2. TOTES LES FUNCIONS

Solució: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 2}$ ***i*** $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3{,}5x + 3}$***.***

Veurem que es pot arribar a la solució del problema emprant dos procediments alternatius.

- Primer procediment:

  Sabent que $f(2) = 0$, hi ha una relació entre a i b, ja que $4 + 2a + b = 0$, per la qual cosa $b = -2a - 4$. A partir d'ací, $f\big(f(3)\big)$ serà:

  $$f\big(f(3)\big) = f(9 + 3a - 2a - 4) = f(5 + a),$$

  i tindrem:

  $$f(5 + a) = 25 + 10a + a^2 + 5a + a^2 - 2a - 4 = 2a^2 + 13a + 21 = 0,$$

  per la qual cosa $2a^2 + 13a + 21 = 0$, i per això, o bé $a = -3$, o bé $a = -3{,}5$. En el primer cas, $b = 2$ i en el segon $b = 3$.

- Segon procediment:

  Observem que $f(x) = (x - 2)(x - r)$ per a algun valor r, per la qual cosa:

  $$f\big(f(3)\big) = f\big((3 - 2)(3 - r)\big) = f(3 - r) = (3 - r - 2)(3 - r - r) = 0,$$

  amb el que o bé $3 - r - 2 = 0$, és a dir, $r = 1$, o bé $3 - 2r = 0$, amb el que $r = 1{,}5$.

Així, les dues possibles funcions són:

$$f(x) = (x - 2)(x - 1) = x^2 - 3x + 2$$
$$f(x) = (x - 2)(x - 1{,}5) = x^2 - 3{,}5x + 3$$

3. ENRAJOLANT EL TERRA

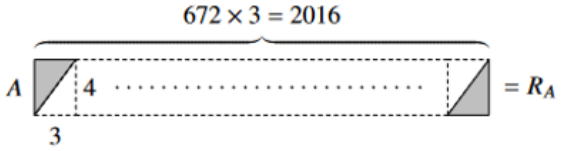
Solució: Sí que ho podrà fer. Necessitarà 679 056 rajoles.

Dos triangles rectangles es poden unir per la seua hipotenusa per a formar un rectangle.

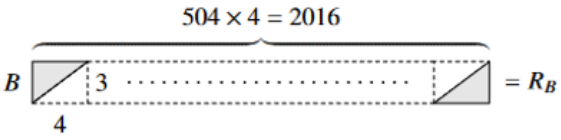
Anomenarem rajola A el rectangle que resulta d'unir 2 rajoles i té una base de 3 cm i una altura de 4 cm.

Anomenarem rajola B el rectangle que resulta d'unir 2 rajoles i té una base de 4 cm i una altura de 3 cm.

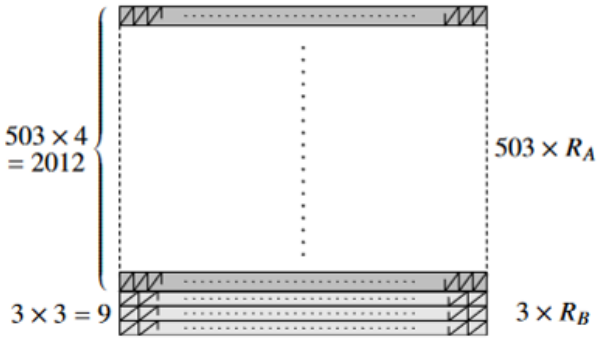
Si s'ajunten 672 rajoles del tipus A es crea un rectangle que té una base de 2016 cm i una altura de 4 cm. Aquest rectangle l'anomenarem R_A.



Si s'ajunten 504 rajoles del tipus B es crea un rectangle que té una base de 2016 cm i una altura de 3 cm. Aquest rectangle l'anomenarem R_B.



Si s'ajunten 503 rectangles R_A i 3 rectangles R_B es crearà un rectangle de base 2016 cm i altura 2021 cm.



Per tant, David sí que podrà formar el rectangle de costats 2016 cm per 2021 cm.

El càlcul de la quantitat total de rajoles es pot fer seguint el procés anterior, però es fa més senzill si només ens preocupem de la superfície a pavimentar i de la de la rajola. Com que la superfície a pavimentar és de $2016 \times 2021 = 4\,074\,336$ cm^2 i cada rajola té una superfície de $3 \times 4/2 = 6$ cm^2, necessitarem $4\,074\,336/6 = 679\,056$ rajoles.

4. SUMES

Solució: b) Hi ha 13 sumes interessants possibles.

a) Si dos nombres són múltiples d'un mateix nombre, la seua suma i la seua diferència també ho són, per la propietat distributiva. Per això, si dos dels tres nombres són múltiples d'un nombre, també ho és el tercer, la qual cosa fa que la suma deixe de ser *interessant*.

b) Potser la manera de trobar-les el més ràpid possible és considerar els possibles resultats de la suma (des del 5 fins al 29) i cercar els sumands tenint en compte quin és el major nombre (2, 3, 5, 7, segons el cas) pel qual volem que siga divisible un dels dos sumands.

De menor a major, el primer que trobem és $10 = 3 + 7$. A continuació, $5 + 7 = 12$, etcètera. No és gens trivial trobar-les ràpid:

$$3 + 7 = 10 \qquad 5 + 7 = 12 \qquad 5 + 9 = 14 \qquad 7 + 8 = 15$$
$$5 + 16 = 21 \qquad 10 + 11 = 21 \qquad 7 + 15 = 22 \qquad 7 + 18 = 25$$
$$5 + 21 = 26 \qquad 7 + 20 = 27 \qquad 3 + 25 = 28 \qquad 13 + 15 = 28$$
$$14 + 15 = 29$$

5. EL BOSC

Solució: a) És més probable, en el primer cas, que hi haja més avets. b) En el segon, que augmente el nombre de pins. c) S'equilibra quan hi ha 300 avets i 500 pins.

a) Podem emprar diferents mètodes per a arribar a la solució. En mostrarem dos a continuació. a) La probabilitat que trie un avet és $1/8$, i la probabilitat que aquest acabe convertint-se en un pi és $1/3$, és a dir, hi ha una probabilitat d'$1/24$ que augmente el nombre de pins, mentre que, per un raonament anàleg, hi ha $7/40$ de probabilitat que augmente el nombre d'avets. Aquesta segona probabilitat és major.

b) De manera similar, en el segon cas tindrem que la primera probabilitat és $7/24$ i la segona $1/40$, així que és més probable que augmente el nombre de pins.

c) Raonant amb l'ajuda d'una incògnita, si anomenem p la probabilitat que el mag trie inicialment un avet, tindrem que $p/3 = (1-p)/5$ perquè s'equilibren les probabilitats, per la qual cosa $5p = 3-3p$, és a dir, $p = 3/8$.

Això vol dir que perquè hi haja la mateixa probabilitat de canvi, han d'haver-hi 300 avets i 500 pins, i en aqueix cas hi ha la mateixa probabilitat que augmenten uns o que augmenten els altres.

Com que si eixim d'aqueix punt d'equilibri, la probabilitat es torna cap a ell, és molt probable que les accions del mag facen que el bosc s'acoste a aqueixa proporció (equilibri estable).

CONTACTEU AMB NOSALTRES...!!!

SI VOLS ENVIAR-NOS SOLUCIONS DE PROBLEMES OBERTS, PROPOSTES DE PROBLEMES O DE TEMES, COMENTARIS I SUGGERIMENTS POTS ENVIAR UNA CARTA A L'ADREÇA:



SEMCV "AL-KHWARIZMI"

PROBLEMA OBERT

APARTAT 22045

46071 VALÈNCIA

TAMBÉ POTS ENVIAR UN MISSATGE AL CORREU ELECTRÒNIC:



problemesolimpics@semcv.org

ESPEREM LES VOSTRES COL·LABORACIONS!!!

S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

Vols formar part de la nostra societat? Emplena la següent butlleta d'inscripció i ens l'envies a la nostra seu. Anima els teus companys i les teues companyes o inscriu el teu centre en la nostra societat.

INSCRIPCIÓ I DOMICILIACIÓ BANCÀRIA

S. E. M. C. V. AL-KHWARIZMI

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA "Al-Khwarizmi"

Facultat de Magisteri "Ausiàs March"
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Apartat 22045 46071 VALÈNCIA

Cognoms:

Nom: DNI/NIF:

Domicili particular:

Població: CP:

Carrer: Telèfon:

Correu-e:

Centre de treball:

Nom del centre:

Carrer:

Població: CP:

Correu-e: Telèfon:

Entitat bancària (on es farà el càrrec de la quota)

Nom complet del titular:

Carrer:

Població: CP

Codi IBAN compte client																							
IBAN				Entitat				Oficina				D.C.		Número de Compte									
E	S																						

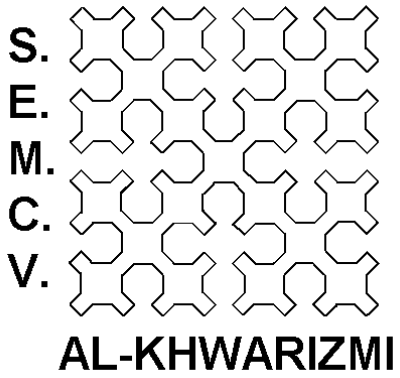
Data i signatura:

Esta revista es publica amb el suport de l'Acadèmia Valenciana de la Llengua

Amb la col·laboració de la Conselleria d'Educació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana

Trobaràs tota la informació en la nostra web.

Visiteu-la: www.semcv.org



Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"